Banque « Agro »
A et AE – 0600bis

MATHÉMATIQUES
Épreuve B
Durée : 3 heures 30 minutes

L'usage d'une calculatrice est interdit pour cette épreuve.

L'objet du problème est l'étude d'un évènement $\mathcal{E}$, dont les réalisations sont liées aux résultats d'une suite infinie d'expériences. **Trois exemples sont proposés dans les parties I, II et III, totalement indépendantes.** Dans le préambule, sont mis en place les notations et les résultats communs aux trois exemples.

PRÉAMBULE.

A] Examen des trois exemples :

On dispose de deux urnes, U et V, qu'on peut sélectionner aléatoirement avec probabilités p pour U et q pour V, p et q vérifiant $p+q=1$ et $p \in]0,1[$, et de boules en quantité illimitée.
On considère une suite infinie de sélections mutuellement indépendantes numérotées $1,2,3,\ldots$ selon les entiers.
On obtient ainsi une suite σ de U et de V; par exemple : $\sigma = (V,U,V,V,U,V,U,U,\ldots\ldots)$.

Premier exemple.
On dit que $\mathcal{E}$ est réalisé à chaque fois qu'on sélectionne l'urne U.
Dans la suite σ, donnée ci-dessus, $\mathcal{E}$ est réalisé aux instants $2,5,7,8,\ldots$.

Deuxième exemple.
Une urne étant sélectionnée, on y dépose une boule lorsqu'elle est vide, ou on la vide si elle contient une boule. Initialement les deux urnes sont vides. L'évènement $\mathcal{E}$ est réalisé à chaque fois que les deux urnes sont vides.
Dans la suite σ donnée ci-dessus, $\mathcal{E}$ est réalisé aux instants 6 et 8, etc.

A.1 Quels sont les deux premiers termes d'une suite pour laquelle l'évènement $\mathcal{E}$ est réalisé pour la première fois à l'instant 2 ?

A.2 Quels sont les quatre premiers termes d'une suite pour laquelle l'évènement $\mathcal{E}$ est réalisé pour la première fois à l'instant 4 ?

Troisième exemple.
Dans cette troisième partie, on dépose dans l'urne sélectionnée une boule supplémentaire. Initialement les deux urnes sont vides ; ainsi, à l'instant n, n boules auront été réparties entre les deux urnes. On dit que $\mathcal{E}$ est réalisé à chaque fois que les deux urnes contiennent un même nombre de boules.
Dans la suite σ donnée ci-dessus, $\mathcal{E}$ est réalisé aux instants 2 et 8, etc.

B] Notations :

Pour tout n entier naturel non nul, on désigne par A_n et R_n les évènements :
$A_n =$"$\mathcal{E}$ est réalisé à l'instant n" et
$R_n =$"$\mathcal{E}$ est réalisé à l'instant n pour <u>*la première fois*</u>".
On convient que A_0 est l'évènement certain et R_0 l'évènement impossible.
On note par la suite, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = P(A_n)$ et $r_n = P(R_n)$.

On note $A(s)$ la somme de la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n.s^n$ et $G(s)$ la somme de la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} r_n.s^n$.

C] Résultats essentiels :

Probabilité conditionnelle

On admettra le résultat suivant : pour tout couple (m,n) $\in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$, la probabilité conditionnelle que $\mathcal{E}$ soit réalisé à l'instant $m+n$ sachant que $\mathcal{E}$ est réalisé à l'instant n est égale à la probabilité <u>a priori</u> que $\mathcal{E}$ soit réalisé à l'instant m ; c'est à dire que

$$(*) \qquad P(A_{m+n}/A_n) = P(A_m) = a_m \qquad P(A_{m+n}/R_n) = P(A_m) = a_m.$$

Série entière produit

On rappelle enfin que si $u(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ et $v(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n$ sont deux séries entières de rayons de convergence respectifs $R_1 > 0$ et $R_2 > 0$; la série entière $w(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n$ de coefficient $w_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k v_{n-k}$, et son rayon de convergence R, vérifient :

i) $R \geq min(R_1, R_2)$.

ii) Pour tout réel x tel que $|x| < \min(R_1, R_2)$, on a $w(x) = u(x).v(x)$.

Résultats divers

On admettra les deux résultats suivants :

1) Formule de Stirling : $n!$ est équivalent à $n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$.

2) Si les termes généraux de deux séries à termes positifs sont équivalents, les séries sont de même nature.

C.1. Justifier la relation $P(R_1 \cup \ldots \cup R_n)= \sum_{k=0}^{k=n} r_k$.

Donner une définition simple des évènements

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \qquad et \qquad R = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n \quad ;$$

les comparer. On admettra la formule $P(R) = \sum_{n=0}^{+\infty} r_n$.

C.2. Justifier la relation : $R_n \subset A_n \subset R_1 \cup \ldots \cup R_n$, puis en déduire à l'aide de la propriété (*) que :

$$(1) \ P(A_n) = \sum_{j=0}^{j=n-1} a_j r_{n-j}$$

C.3. Montrer que les séries $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n s^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} r_n s^n$ ont toutes deux un rayon de convergence supérieur ou égal à 1.

C.4. En utilisant la relation (1) et C.3., montrer que pour tout s, réel tel que $0 \leq s < 1$, on a les égalités :

$$(2) \qquad A(s) = 1 + A(s)G(s), \ A(s) = \frac{1}{1-G(s)} \ et \ G(s) = 1 - \frac{1}{A(s)}$$

PARTIE I : Etude du premier exemple.

I.1.a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $a_n = p$ et $r_n = pq^{n-1}$.

I.1.b. Démontrer la relation : (1) $P(A_n) = \sum_{j=0}^{j=n-1} a_j r_{n-j}$ à partir de **1.1.a.** sans utiliser le résultat du **C.2.**.

I.2.a Quel est le rayon de convergence de la série entière $A(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n s^n$?
Montrer que pour tout $s \in [0,1[$, on a : $A(s) = \frac{1-qs}{1-s}$.

I.2.b. Montrer que le rayon de convergence de la série $G(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} r_n s^n$ est $\frac{1}{q}$ et montrer que pour tout $s \in [0, \frac{1}{q}[$, on a $G(s) = \frac{ps}{1-qs}$.
Indication : On pourra éventuellement vérifier ces calculs grâce à la formule (2).

I.3.a. Calculer $r = \sum_{n=0}^{+\infty} r_n$ et comparer r et $G(1)$.

I.3.b. On définit la variable aléatoire X, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ dont la loi vérifie : $P(X = n) = r_n$.
Déterminer l'espérance et la variance de la variable aléatoire X.

PARTIE II Deuxième exemple, deux urnes et deux boules.

II.1. Calcul de a_n

II.1.a. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, montrer qu'à l'instant $2k+1$ il y a une boule dans une urne et zéro dans l'autre. En déduire que $a_{2k+1} = 0$ et qu'à l'instant $2k$ soit les deux urnes sont vides, soit chacune contient une boule.

II.1.b. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on désigne par B_{2k} l'évènement : "A l'instant $2k$ il y a une boule dans chaque urne" et par b_{2k} la probabilité de cet évènement.
Montrer que $a_2 = p^2 + q^2$ et $b_2 = 2pq$.
Calculer les probabilités conditionnelles suivantes en fonction de p et de q pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$P(A_{2k+2}/A_{2k}),\ P(A_{2k+2}/B_{2k}),\ P(B_{2k+2}/A_{2k}),\ P(B_{2k+2}/B_{2k})$$

II.1.c. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$a_{2k+2} = (p^2+q^2)a_{2k} + 2pq b_{2k} \qquad ; \qquad b_{2k+2} = 2pq a_{2k} + (p^2+q^2) b_{2k}$$

II.1.d. Soit T la matrice

$$T = \begin{pmatrix} p^2+q^2 & 2pq \\ 2pq & p^2+q^2 \end{pmatrix}$$

Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a :

$$\begin{pmatrix} a_{2n} \\ b_{2n} \end{pmatrix} = T^n . \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$$

II.1.e. Rappeler pourquoi T est diagonalisable; déterminer ses valeurs propres ainsi qu'une base de vecteurs propres.
En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_{2n} = \frac{1}{2}(1 + (p-q)^{2n})$.

II.2. Une espérance.

II.2.a. Soit s un réel, $s \in [0,1[$, montrer que $A(s) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_{2n}s^{2n} = \frac{1}{2}(\frac{1}{1-s^2} + \frac{1}{1-(p-q)^2.s^2})$.

II.2.b. En déduire que $G(s) = 1 - \frac{(1-s^2)(1-(p-q)^2s^2)}{1-(p^2+q^2)s^2}$.

II.2.c. Déterminer G'(1)=$\lim\limits_{s\to 1} \frac{G(s)-G(1)}{s-1}$. Que représente cette dernière valeur?

PARTIE III Troisième exemple, deux urnes et des boules.

III.1.a.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a les égalités : $a_{2n+1} = 0$ *et* $a_{2n} = C_{2n}^n p^n q^n$.

III.1.b. En utilisant la formule de Stirling, montrer que a_{2n} est équivalent en $+\infty$ à

$$\frac{(4pq)^n}{\sqrt{n\pi}}$$

III.1.c. Déterminer le développement en série entière au voisinage de l'origine de la fonction $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ et son rayon de convergence.
En déduire que $A(s) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_{2n}s^{2n}$ a pour rayon de convergence $R = \frac{1}{2\sqrt{pq}}$.

III.1.d. Montrer que pour s réel vérifiant $s \in [0, R[$, on a :

$$A(s) = \frac{1}{\sqrt{1-4pqs^2}} \ et \ G(s) = 1 - \sqrt{1-4pqs^2}$$

III.I.e Déterminer le développement en série entière de $\sqrt{1-x}$ et en déduire que pour tout n, entier naturel non nul, on a : $r_{2n} = \frac{1}{2n-1}C_{2n}^n p^n q^n$.

III.2.a. Dans le cas où $p = q$, montrer que a_{2n} est équivalent à $\frac{1}{\sqrt{n\pi}}$; puis démontrer que la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ est divergente.

indication : On pourra démontrer par récurrence que $S_n = \sum\limits_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n}$.

III.2.b. Dans le cas où $p \neq q$, montrer que $R > 1$ puis que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ est convergente ; déterminer sa somme et en déduire que $r = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} r_n = 1 - |p-q|$.

FIN