ÉPREUVE B
Durée : 3 h 30

L'usage d'une calculatrice est autorisé pour cette épreuve.

Les parties I et II sont indépendantes.

Notations et rappels

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ est rapporté à la base B = ((1,0); (0,1)). A tout vecteur (x, y), on associera la matrice colonne :

$$M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

On rappelle que la norme d'un vecteur (x, y) est donnée par : $\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{{}^tM \times M}$

et que le produit scalaire des vecteurs (x, y) et (x', y') vérifie : $xx'+yy' = {}^tM' \times M$

Par ailleurs, on considèrera des matrices carrées d'ordre 2 et à coefficients réels ; elles pourront être associées, à l'aide de la base B, à des endomorphismes de $\mathbb{R}^2$. En particulier, on désignera par I la matrice unité, associée à l'endomorphisme identité.

Enfin, si A désigne la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

on notera : $\Delta(A) = ad - bc$

Résultat admis

Dans tout le problème on admetttra le résultat suivant : si (X_1, X_2) est un couple de variables aléatoires réelles, admettant sur $\mathbb{R}^2$ une densité conjointe f, alors, pour tout quadruplet de réels (u, v, w, z) vérifiant la condition : $uz - vw \neq 0$, $(uX_1 + vX_2, wX_1 + zX_2)$ est un couple de variables aléatoires réelles, admettant sur $\mathbb{R}^2$ une densité conjointe g liée à f par la formule :

$$f(x,y) = |uz - vw| \, g(ux+vy, wx+zy)$$

Question préliminaire

On rappelle qu'une variable aléatoire réelle X suit une loi normale de paramètres m et σ (où σ est un réel strictement positif), si elle admet une densité φ définie, pour tout x réel par :

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{(x-m)^2}{\sigma^2}\right]$$

On notera cette loi : **N** (m, σ). L'espérance de X est alors m et sa variance σ^2.

Dans cette question, a désigne un réel strictement positif et b un réel. En utilisant les propriétés des lois normales, justifier les relations :

$$(1) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}a^2(x+b)^2\right)dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{a}$$

$$(2) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x\exp\left(-\frac{1}{2}a^2(x+b)^2\right)dx = -b\frac{\sqrt{2\pi}}{a}$$

$$(3) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\exp\left(-\frac{1}{2}a^2x^2\right)dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{a^3}$$

PARTIE I

Dans toute la suite de cette partie, on suppose que A est une matrice symétrique réelle de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$$

Pour tout couple de réels (x, y) on posera :

$$Q_A(x, y) = {}^t M \times A \times M$$

On dira que A est *définie positive* si, pour tout couple (x, y) non nul, $Q_A(x, y)$ est un réel strictement positif.

1. Montrer que la relation : $A \times M = 0$ implique : $Q_A(x, y) = 0$

En déduire qu'une matrice définie positive est nécessairement inversible.

2. Dans cette question, on suppose que b est nul. Expliciter $Q_A(x, y)$ et montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que A soit définie positive est que a et d soient strictement positifs.

3. On suppose dans cette question que b est non nul.

3.a. Justifier que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

3.b. Montrer que, pour un réel λ, $A - \lambda I$ est non inversible si et seulement si :

$$(1) \quad \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - b^2 = 0$$

En déduire qu'elle admet deux valeurs propres distinctes λ_1 et λ_2 qui vérifient (1).

Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que les deux valeurs propres soient strictement positives est que a, d et $ad\text{-}b^2$ soient strictement positifs.

3.c. Montrer que l'on peut choisir deux vecteurs propres associés à λ_1 et λ_2, unitaires (de norme 1), notés v_1 et v_2. On notera P la matrice de passage de B vers la base (v_1, v_2), V_1 et V_2 les matrices colonnes associées aux vecteurs v_1 et v_2 dans la base B.

Après avoir justifié l'égalité :

$$ {}^tV_1 \times A \times V_2 = {}^tV_2 \times A \times V_1 $$

montrer que l'on a : $$ {}^tV_1 \times V_2 = 0 $$

et enfin que : $$ {}^tP \times P = I $$

3.d. On pose :

$$ \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = {}^tP \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} $$

Justifier la relation : $Q_A(x, y) = \lambda_1 (x')^2 + \lambda_2 (y')^2$

En déduire que A est définie positive si et seulement si λ_1 et λ_2 sont strictement positives.

4. Montrer que si A est définie positive, alors, pour toute matrice C inversible, ${}^tC \times A \times C$ est encore une matrice symétrique, définie positive.

5. Montrer que, si A est définie positive, il existe une matrice B symétrique et inversible telle que :

$$ A = B^2 $$

Indication : on pourra introduire la matrice :

$$ \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{pmatrix} $$

et utiliser la relation : ${}^tP \times P = I$

PARTIE II

Dans cette partie, $X = (X_1, X_2)$ désigne un couple de variables aléatoires réelles de densité conjointe définie, pour tout couple (x, y) de réels par :

$$ f(x,y) = k \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)} (x^2 - 2\rho xy + y^2) \right) $$

où ρ est un élément de $]-1, 1[$. On dira que X est un *couple normal standard*.

1. Déterminer k en fonction de ρ. On pourra pour cela remarquer l'identité :

$$ x^2 - 2\rho xy + y^2 = (x - \rho y)^2 + (1 - \rho^2) y^2 $$

et utiliser la question préliminaire.

2.a. Déterminer et reconnaître les lois marginales de X_1 et de X_2.

2.b. Calculer la matrice de covariance de X définie par la formule :

$$ V_X = \begin{pmatrix} E(X_1^2) & \operatorname{cov}(X_1, X_2) \\ \operatorname{cov}(X_2, X_1) & E(X_2^2) \end{pmatrix} $$

Montrer que X_1 et X_2 sont indépendantes si et seulement si elles sont non corrélées.

2.c. Justifier la formule :

$$ f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{|\Delta(V_X)|}} \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot {}^tM \times V_X^{-1} \times M \right) $$

M désignant toujours la matrice colonne associée au couple (x, y).

PARTIE III

Dans toute cette partie, A désigne une matrice symétrique réelle définie positive de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$$

et on notera $X = (X_1, X_2)$ un couple de variables aléatoires réelles dont une densité conjointe est donnée par :

$$f(x,y) = k \exp\left(-\frac{1}{2}.\ {}^tM \times A \times M\right)$$

On dira que X est un *couple normal.*

1. Etude d'un cas particulier.

1.a. Expliciter $f(x,y)$ lorsque A est égale à I (on donnera en particulier la valeur de k).

1.b. Déterminer k et les lois marginales du couple lorsque A est diagonale. Que peut-on dire de X_1 et X_2 ?

1.c. Démontrer que si U et V sont deux variables indépendantes réelles suivant chacune une loi normale centrée, alors (U, V) est un couple normal.

2. Etude du cas général.

2.a. Exprimer k en fonction de $\Delta(A)$.

2.b. Déterminer la matrice de covariance V_X du couple et l'exprimer en fonction de A^{-1}

3. Dans cette question, on considère le couple : $Y = (uX_1 + vX_2, wX_1 + zX_2)$, avec la condition : $uz - vw \neq 0$.

Montrer que Y est un couple normal dont on exprimera la matrice de covariance en fonction de la matrice V_X qui a été définie dans la partie II et de la matrice :

$$C = \begin{pmatrix} u & v \\ w & z \end{pmatrix}$$

4. En utilisant les résultats précédents et ceux de la question I.5, montrer que l'on peut choisir C tel que Y soit un couple normal standard de matrice de covariance I.