Ecole Polytechnique, option PC

Deuxième épreuve, 1999. Énoncé

Première partie.

On se fixe un entier $n \in \mathbb{N}$ et l'on désigne par E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales réelles de degré inférieur ou égal à n. On considère la forme linéaire L définie sur E par :

$$\forall\ P \in \mathrm{E}, \quad L(P) = \int_{-1}^{1} P(x)dx$$

1. Déterminer l'image par L de la fonction polynomiale P telle que $P(x) = \sum_{p=0}^{n} a_p x^p$.

Déterminer la dimension du noyau de L, puis une base de ce noyau.

2. On considère des nombres réels $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ tels que :

$$-1 \leq x_0 < x_1 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n \leq 1$$

a) Montrer que pour tout $i, 0 \leq i \leq n$, il existe une fonction polynomiale $P_i \in \mathrm{E}$ telle que :

$$\begin{cases} P_i(x_i) & = & 1 \\ P_i(x_j) & = & 0, \quad \text{pour } j \neq i, 0 \leq j \leq n \end{cases}$$

b) Montrer qu'il existe une unique famille de nombres réels $(\lambda_i)_{0 \leq i \leq n}$ telle que :

$$\forall\ P \in E, \quad L(P) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P(x_i)$$

3. On suppose que pour tout $i, 0 \leq i \leq n, x_{n-i} = -x_i$. Montrer que $\lambda_{n-i} = \lambda_i$. En déduire que si n est pair, toute fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à $n+1$ vérifie :

$$\int_{-1}^{1} P(x)dx = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P(x_i)$$

4. Soit f une fonction réelle de classe C^{n+1} sur l'intervalle $[-1, 1]$.
a) On pose $M_{n+1} = \sup_{x \in [-1,1]} |f^{(n+1)}(x)|$, où $f^{(n+1)}$ désigne la dérivée $(n+1)$-ième de f. Déterminer des réels positifs α et β tels que :

$$\left| \int_{-1}^{1} f(x)dx - \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f(x_i) \right| \leq M_{n+1}(\alpha + \beta \sum_{i=0}^{n} |\lambda_i|)$$

où les $(\lambda_i)_{0 \leq i \leq n}$ sont les nombres réels déterminés dans la question 2.
b) On suppose que f est de classe C^{n+2} sur $[-1, 1]$., que n est pair et que les points $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ sont choisis tels que $x_{n-i} = -x_i, 0 \leq i \leq n$.
Modifier la majoration précédente en utilisant $M_{n+2} = \sup_{x \in [-1,1]} |f^{(n+2)}(x)|$

5. On suppose que $n = 4$ et l'on choisit

$$x_0 = -1,\ x_1 = -\frac{1}{2},\ x_2 = 0,\ x_3 = \frac{1}{2},\ x_4 = 1$$

a) Calculer $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$.

b) En utilisant le résultat de la question 4.b), donner une majoration de $\left|\int_{-1}^{1} e^{(x/4)^2} dx - \sum_{i=0}^{4} \lambda_i e^{(x_i/4)^2}\right|$, où les $(\lambda_i)_{0\leq i\leq 4}$ sont les nombres réels trouvés en a).

Deuxième partie

Les notations sont celles de la première partie.

6. Soit N une norme sur E. On pose :

$$\mathcal{N}(L) = \sup_{P\in E, N(P)\leq 1} |L(P)|$$

a) Justifier l'existence de $\mathcal{N}(L)$ et montrer qu'il existe $Q \in E$ tel que $N(Q) = 1$ et $|L(Q)| = \mathcal{N}(L)$.

b) Montrer que si K est un nombre réel positif tel que :

$$\forall\ P \in E, \quad |L(P)| \leq KN(P)$$

alors $\mathcal{N}(L) \leq K$. Montrer que si, de plus, il existe $Q \in E$ tel que $N(Q) = 1$ et $|L(Q)| = K$, alors $\mathcal{N}(L) = K$.

7. Pour $P \in E$ tel que $P(x) = \sum_{p=0}^{n} a_p x^p$, on pose :

$$N_\infty(P) = \sup_{0\leq p\leq n} |a_p| \quad \text{et} \quad N_2(P) = \left(\sum_{p=0}^{n} (a_p)^2\right)^{1/2}$$

Comparer les normes N_∞ et N_2.

8. On désigne par $\mathcal{N}_\infty(L)$ et $\mathcal{N}_2(L)$ les nombres $\mathcal{N}(L)$ définis à la question 6., quand on choisit pour N respectivement N_∞ et N_2.

a) Trouver $Q_\infty \in E$ tel que $N_\infty(Q_\infty) = 1$ et $|L(Q_\infty)| = \mathcal{N}_\infty(L)$.

b) Trouver $Q_2 \in E$ tel que $N_2(Q_2) = 1$ et $|L(Q_2)| = \mathcal{N}_2(L)$.

Troisième partie

Soit F l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré quelconque.

Pour $P \in F$ de degré $d(P)$, définie par $P(x) = \sum_{p=0}^{d(P)} a_p x^p$, on pose :

$$N_\infty(P) = \sup_{0\leq p\leq d(P)} |a_p| \quad \text{et} \quad N_2(P) = \left(\sum_{p=0}^{d(P)} (a_p)^2\right)^{1/2}$$

et l'on définit ainsi des normes sur F (par convention $N_\infty(0) = N_2(0) = 0$).

Pour $P \in F$, on pose encore $L(P) = \int_{-1}^{1} P(x)dx$.

9. a) Trouver une suite $(P_k)_{k\geq 0}$ d'éléments de F telle que pour tout $k \in \mathbb{N}, N_\infty(P_k) = 1$ et $\lim_{k\to+\infty} L(P_k) = +\infty$.

b) L'application L est-elle continue ?

10. a) Montrer que $\sup_{P\in F, N_2(P)\leq 1} |L(P)|$ existe. On désigne ce nombre par $|||L|||$.

b) Existe-t-il une fonction polynomiale $Q \in F$ telle que $N_2(Q) = 1$ et $|L(Q)| = |||L|||$?