**ÉCOLE POLYTECHNIQUE** **FILIÈRE MP**

**CONCOURS D'ADMISSION 2002**

## DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆⋆⋆

*On attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.*

⋆⋆⋆

Dans les trois premières parties, on désigne par

- $n$ et $m$ des entiers $> 0$ tels que $n \leqslant m$ ;
- $E$ l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$ avec son produit scalaire usuel $(\cdot|\cdot)$ et la norme associée $\|\cdot\|$ ;
- $e_j$, $j = 1, \ldots, m$, des éléments non nuls de $E$ satisfaisant une condition de la forme

$$\forall\, x \in E \quad \alpha\|x\|^2 \leqslant \sum_j (x \,|\, e_j)^2 \tag{1}$$

où $\alpha$ est un réel $> 0$ ;

- $T$ l'endomorphisme de $E$ défini par

$$T(x) = \sum_j (x \,|\, e_j)\, e_j \ .$$

Si $S$ est un endomorphisme de $E$, sa norme $\|S\|$ est défini par

$$\|S\| = \sup\{\|S(x)\| : \|x\| = 1\} \ .$$

### Première partie

**1.** Donner un exemple simple de famille $(e_j)$ satisfaisant une condition de la forme (1).

**2.** Déterminer le sous-espace vectoriel de $E$ engendré par les $e_j$.

**3.** On prend $n = 2$, $m = 3$, $e_1 = (0, 1)$, $e_2 = (-\sqrt{3}/2, -1/2)$, $e_3 = (\sqrt{3}/2, -1/2)$. Déterminer $\sum_j (x \,|\, e_j)^2$ et $T$.

**4.** Vérifier que $T$ est autoadjoint, inversible et satisfait $\big(T(x) \,|\, x\big) \geqslant \alpha \|x\|^2$ pour tout $x \in E$.

**5.** Comparer $\|T\|$ et $\sup\{\big(T(x) \,|\, x\big) : \|x\| = 1\}$.

**6.** Trouver un réel $\beta$ tel que $\big(T^{-1}(x) \,|\, x\big) \leqslant \beta \|x\|^2$ pour tout $x \in E$. Que peut-on dire de $\|T^{-1}\|$ ?

**7.** On suppose que $\alpha \|x\|^2 = \sum_j (x \,|\, e_j)^2$ pour tout $x \in E$. Déterminer $T$.

## Deuxième partie

On note $F$ l'espace euclidien $\mathbf{R}^m$, $(f_1, \ldots, f_m)$ sa base naturelle, $(\cdot|\cdot)_F$ son produit scalaire naturel. On définit une application linéaire $\Phi : E \to F$ par

$$\Phi(x) = \sum_j (x \,|\, e_j)\, f_j \ .$$

On pourra admettre qu'il existe une unique application linéaire $\Psi : F \to E$ satisfaisant

$$(\Psi(h) \,|\, x) = (h \,|\, \Phi(x))_F \quad \text{pour tous} \quad x \in E\,,\, h \in F\ .$$

**8.** Vérifier que l'on a $\Psi(h) = \sum_j h_j e_j$ et $\Psi \circ \Phi = T$.

On pose $\tilde{e}_j = T^{-1}(e_j)$ et on définit une application linéaire $\tilde{\Phi} : E \to F$ par

$$\tilde{\Phi}(x) = \sum_j (x \,|\, \tilde{e}_j)\, f_j \ .$$

**9.** Vérifier que l'on a $F = \mathrm{Im}\ \tilde{\Phi} \oplus (\mathrm{Im}\ \Phi)^{\perp}$.

**10.** Étant donné un élément $x$ de $E$, déterminer le minimum des nombres $\sum_j h_j^2$ pour les familles $(h_j)$ vérifiant $x = \sum_j h_j e_j$, et préciser pour quelles familles $(h_j)$ ce minimum est atteint.

**11.** Expliquer ce qui se passe dans chacun des cas suivants :

**a)** les $e_j$ forment une base de $E$ ;

**b)** les $e_j$ forment une base orthonormale de $E$ ;

**c)** on a $\alpha \|x\|^2 = \sum_j (x \,|\, e_j)^2$ pour tout $x \in E$.

## Troisième partie

On se propose, dans cette partie, de résoudre l'équation $T(x) = y$ par une méthode d'itérations successives. On pose

$$a = \inf \{ \big(T(x) \,|\, x\big) : \|x\| = 1 \} \quad , \quad b = \|T\| \ ;$$

on a donc $0 < a \leqslant b$. Pour tout réel $s > 0$ on pose $V_s = id_E - sT$.

**12.** Montrer que l'on a

$$\|V_s\| = \max \left( |1 - a\,s| \, , \, |1 - b\,s| \right) \, ,$$

**13.** Déterminer le minimum $C$ de la fonction $s \mapsto \|V_s\|$, préciser pour quelle valeur $s_0$ de $s$ il est atteint, et montrer que $C \in [0, 1[$. À quelle condition $C$ est-il égal à 0 ?

[Il est conseillé de dessiner les courbes représentatives des fonctions $s \mapsto |1 - a\,s|$ et $s \mapsto |1 - b\,s|$ ].

On fixe un élément $y$ de $E$ et on définit une application $U$ de $E$ dans lui-même par

$$U(x) = x + s_0 \big( y - T(x) \big) \ .$$

**14.** Étant donné $x$ et $x' \in E$, comparer $\|U(x) - U(x')\|$ et $C\|x - x'\|$.

**15.** On désigne par $x_0$ un élément de $E$ et on pose, pour tout entier $n > 0$, $x_n = U^n(x_0)$. Étudier le comportement de la suite $(x_n)$. Conclure.

## Quatrième partie

Dans cette partie, on désigne par

- $E$ un espace préhilbertien réel ;
- $T$ un endomorphisme continu de $E$ (on ne le suppose pas autoadjoint) ;
- $x_0$ et $y_0$ des éléments de $E$.

Pour tout réel $s > 0$ on définit une application $U_s$ de $E$ dans lui-même par

$$U_s(x) = x + s \big( y_0 - T(x) \big) \ .$$

**16.a)** Trouver une condition portant sur $T$ suffisante pour que l'on ait une majoration de la forme

$$\|id_E - s\,T\|^2 \leqslant 1 - 2a\,s + b^2\,s^2$$

avec $a > 0$, $b$ réel.

**b)** Trouver alors une condition portant sur $E$, impliquant que la suite $x_n = U_s^n(x_0)$ soit convergente pour un $s$ convenable ; préciser dans ce cas la nature (injectif ?, surjectif ?) de $T$.

* *
*