

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

On attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

On se propose de démontrer quelques propriétés des nombres irrationnels et de leurs approximations par des rationnels.

On désigne par

- $\mathcal{E}$ l'ensemble des nombres réels irrationnels,
- $E(z)$ la partie entière d'un nombre réel z ,
- G le groupe des matrices $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ où a, b, c, d sont des entiers relatifs et $ad - bc = \pm 1$.

La première partie est indépendante des suivantes.

Première partie

Dans cette partie, on fixe un nombre réel $\alpha > 0$ et on définit deux suites de réels $> 0 : (p_n), (q_n), n \geq 0$, par les conditions

$$\begin{aligned} p_0 &= \alpha & , & & p_1 &= \alpha^2 + 1 & , & & p_n &= \alpha p_{n-1} + p_{n-2} \\ q_0 &= 1 & , & & q_1 &= \alpha & , & & q_n &= \alpha q_{n-1} + q_{n-2} \end{aligned}$$

pour $n \geq 2$.

1. Expliciter p_n et q_n en fonction de α .
2. Déterminer la limite λ de $r_n = p_n/q_n$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.
3. Supposant α entier, λ peut-il être rationnel ?

Seconde partie

On dit qu'un nombre réel irrationnel x est *algébrique* s'il annule un polynôme P de $\mathbb{Q}[X]$ de degré ≥ 2 .

4. Montrer que, si x est irrationnel et algébrique, il existe un unique polynôme P de $\mathbb{Q}[X]$ irréductible, de degré ≥ 2 , annulé par x et dont le coefficient du terme de plus haut degré est égal à 1. On notera P_x ce polynôme et d_x son degré.

5.a) Vérifier que, pour tout $g \in G$ et tout $x \in \mathcal{E}$, le nombre $T_g(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ existe et appartient à $\mathcal{E}$.

b) Vérifier que l'application $g \mapsto T_g$ est un homomorphisme de G dans le groupe des permutations de $\mathcal{E}$, et déterminer son noyau.

6. Montrer que si x est irrationnel et algébrique, $T_g(x)$ l'est aussi, et comparer d_x et $d_{T_g(x)}$.

7. On pose $x = \sqrt{m}$ où m est un entier > 0 , mais n'est pas le carré d'un entier. Déterminer les nombres y de la forme $T_g(x)$, $g \in G$, dont le carré est un entier.

Troisième partie

Dans cette partie, pour tout nombre réel x , on note $A(x)$ la matrice $\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On fixe une suite $u = (u_n)$, $n \in \mathbb{N}$, avec $u_0 \in \mathbb{N}$ et $u_n \in \mathbb{N}^*$ pour $n > 0$. Enfin, on définit p_n et q_n par

$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = A(u_0)A(u_1) \dots A(u_n) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

8. Vérifier que l'on a

$$p_n = u_n p_{n-1} + p_{n-2} \quad , \quad q_n = u_n q_{n-1} + q_{n-2}$$

pour $n \geq 2$.

On pose $r_n = p_n/q_n$.

9. Exprimer $r_n - r_{n-1}$ en fonction de q_n et q_{n-1} .

10. a) Montrer que la suite (r_n) admet une limite qu'on notera $\lambda(u)$.

b) Montrer que $\lambda(u)$ est irrationnel. [On pourra comparer $|\lambda(u) - r_n|$ et $1/q_n q_{n-1}$.]

c) Déterminer $E(\lambda(u))$.

Quatrième partie

Pour tout réel non entier x on pose $F(x) = \frac{1}{x - E(x)}$.

11. Montrer que l'itérée F^n est définie en x pour tout entier $n > 0$ si et seulement si $x \in \mathcal{E}$.

12. On considère une suite u ayant les propriétés indiquées à la troisième partie; on définit une suite u' par $u'_n = u_{n+1}$, laquelle définit à son tour des nombres p'_n, q'_n, r'_n et $\lambda(u')$.

a) Exprimer p_n et q_n en fonction de u_0, p'_{n-1}, q'_{n-1} .

b) Comparer $\lambda(u')$ et $F(\lambda(u))$.

c) On suppose la suite u périodique. Montrer que $\lambda(u)$ est algébrique et déterminer $d_{\lambda(u)}$.

d) Même question en supposant seulement la suite u périodique à partir d'un certain rang.

Cinquième partie

13. Dans cette question, on fixe deux nombres irrationnels x et y vérifiant $E(F^k(x)) = E(F^k(y))$ pour tout $k \geq 0$.

a) Établir l'égalité, pour $n \geq 1$

$$y - x = (-1)^n (F^n(y) - F^n(x)) \prod_{k=0}^{n-1} \left[\left(F^k(x) - E(F^k(x)) \right) \left(F^k(y) - E(F^k(y)) \right) \right].$$

b) Montrer que $x = y$.

14. Étant donné un nombre réel irrationnel x , construire une suite u vérifiant $\lambda(u) = x$, et démontrer son unicité.