

Concours d'admission 1996

## DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée: 4 heures)

\* \* \*

Dans tout le problème, la lettre  $K$  désigne un corps commutatif arbitraire. Si  $E$  et  $F$  sont des espaces vectoriels sur  $K$ , on note  $\mathcal{L}(E, F)$  l'espace vectoriel des applications linéaires de  $E$  dans  $F$ ; pour tout élément  $T$  de  $\mathcal{L}(E, E)$ , on désigne par  $\ker T$  et  $\text{Im } T$  respectivement le noyau de  $T$  dans  $E$  et son sous-espace image dans  $F$ . Un élément  $T$  de  $\mathcal{L}(E, F)$  est dit *nilpotent* s'il existe un entier strictement positif  $r$  tel que  $T^r = 0$ .

On appelle *sous-algèbre* de  $\mathcal{L}(E, E)$  tout sous-espace vectoriel stable par multiplication; une sous-algèbre  $\mathcal{A}$  est dite *commutative* si l'on a  $ST = TS$  pour tous  $S$  et  $T$  dans  $\mathcal{A}$ ; enfin  $\mathcal{A}$  est dite *nilpotente* s'il existe un entier strictement positif  $r$  tel que le produit de  $r$  éléments quelconques de  $\mathcal{A}$  soit nul, et on appelle *ordre de nilpotence* de  $\mathcal{A}$  le plus petit de ces entiers  $r$ .

Le but de ce problème est d'établir quelques propriétés des sous-algèbres commutatives nilpotentes.

**Première partie**

Dans cette partie on note  $E$  l'espace vectoriel  $K^2$ .

1. Soit  $T$  un endomorphisme nilpotent non nul de  $E$ ,  $r$  le plus petit entier positif tel que  $T^r = 0$ .
  - (a) Déterminer les dimensions de  $\ker T$  et  $\text{Im } T$ .
  - (b) Construire une base de  $E$  dans laquelle  $T$  est représenté par la matrice  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  et préciser la valeur de  $r$ .
2. Soit  $\mathcal{A}$  une sous-algèbre commutative nilpotente non nulle de  $\mathcal{L}(E, E)$ . Montrer qu'il existe une base de  $E$  dans laquelle les matrices représentant les éléments de  $\mathcal{A}$  sont exactement les matrices  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$  avec  $c \in K$ .

## Deuxième partie

Dans cette partie, on se donne un espace vectoriel  $E$  sur  $K$  et une décomposition de  $E$  en somme directe de sous-espaces vectoriels:  $E = E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_n$ ; pour tout  $i = 1, \dots, n$ , on note  $P_i$  le projecteur sur  $E_i$  associé à cette décomposition; on écrit aussi  $x_i$  au lieu de  $P_i(x)$  pour tout  $x \in E$ .

3. Étant donné un endomorphisme  $T$  de  $E$ , construire des applications linéaires  $T_{i,j}$  appartenant à  $\mathcal{L}(E_j, E_i)$  telles que l'on ait  $(T(x))_i = \sum_j T_{i,j}(x_j)$  pour tout  $x \in E$ .

On dira que  $T$  est représenté par le tableau d'applications linéaires  $(T_{i,j})$ .

4. Étant donné deux endomorphismes  $S$  et  $T$  de  $E$ , exprimer les composantes  $(ST)_{i,j}$  de  $ST$  en fonction de celles de  $S$  et  $T$ .

## Troisième partie

Dans cette partie on pose  $E = K^n$  où  $n$  est un entier strictement positif; on considère un endomorphisme nilpotent non nul  $T$  de  $E$  et on note  $r$  le plus petit entier strictement positif tel que  $T^r = 0$ . On pose  $E_3 = \text{Im } T \cap \ker T$ .

5. Vérifier que  $E_3$  est distinct de  $\{0\}$  et de  $E$ .
6. Pour quelles valeurs de  $r$  a-t-on  $E_3 = \text{Im } T$ ?
7. Dans cette question on suppose  $r \geq 3$  et on note  $E_1$  (resp.  $E_2$ ) un sous-espace vectoriel supplémentaire de  $\text{Im } T$  dans  $E$  (resp. de  $E_3$  dans  $\text{Im } T$ ). Vérifier que, dans la décomposition en somme directe  $E = E_1 \oplus E_2 \oplus E_3$ ,  $T$  est représenté par un tableau de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ T_{2,1} & T_{2,2} & 0 \\ T_{3,1} & T_{3,2} & 0 \end{pmatrix}.$$

8. Montrer que  $T_{2,2}$  est nilpotent et qu'il existe une base de  $E$  dans laquelle  $T$  est représenté par une matrice  $(t_{i,j})$  telle que  $t_{i,j}$  soit nul lorsque  $i \leq j$ .
9. Comparer  $r$  et  $n$ .
10. Appliquer ce qui précède au cas où  $n = 4$  et où  $T$  est représenté par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

dans la base naturelle de  $K^4$ .

## Quatrième partie

Dans cette quatrième et dernière partie, nous utiliserons les notations suivantes: si  $X$  et  $Y$  sont deux espaces vectoriels sur  $K$  et  $\mathcal{Z}$  un sous-ensemble de  $\mathcal{L}(X, Y)$ , nous désignerons par  $\mathcal{K}(\mathcal{Z})$  l'intersection des noyaux des éléments de  $\mathcal{Z}$ , et par  $\mathcal{I}(\mathcal{Z})$  le sous-espace vectoriel de  $Y$  engendré par les images des éléments de  $\mathcal{Z}$ .

On considère une sous-algèbre commutative nilpotente non nulle  $\mathcal{A}$  de  $\mathcal{L}(E, E)$ , où  $E = K^n$ ; on note  $r$  son ordre de nilpotence et on pose  $E_3 = \mathcal{I}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{K}(\mathcal{A})$ .

11. Vérifier que  $\mathcal{I}(\mathcal{A})$  est distinct de  $E$  et que  $E_3$  est distinct de  $\{0\}$  et de  $E$ .
12. Pour quelles valeurs de  $r$  a-t-on  $E_3 = \mathcal{I}(\mathcal{A})$ ?

Dans la suite du problème on suppose  $r \geq 3$ ; on note  $E_1$  (resp.  $E_2$ ) un sous-espace vectoriel supplémentaire de  $\mathcal{I}(\mathcal{A})$  dans  $E$  (resp. de  $E_3$  dans  $\mathcal{I}(\mathcal{A})$ ). On écrit les éléments  $T$  de  $\mathcal{A}$  sous la forme  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ T_{2,1} & T_{2,2} & 0 \\ T_{3,1} & T_{3,2} & 0 \end{pmatrix}$ ; pour  $i, j = 1, 2, 3$  on note  $\mathcal{A}_{i,j}$  l'espace vectoriel des  $T_{i,j}$  où  $T$  parcourt  $\mathcal{A}$ .

13. (a) Vérifier que  $\mathcal{A}_{2,2}$  est une sous-algèbre commutative nilpotente de  $\mathcal{L}(E_2, E_2)$  et dire pour quelles valeurs de  $r$  cette sous-algèbre est nulle.
- (b) Montrer qu'il existe une base de  $E$  dans laquelle tous les éléments  $T$  de  $\mathcal{A}$  sont représentés par des matrices  $(t_{i,j})$  telles que  $t_{i,j}$  soit nul lorsque  $i \leq j$ .
- (c) Comparer  $r$  et  $n$ .

À partir de maintenant on suppose  $r \geq 4$ .

14. Déterminer l'ordre de nilpotence  $r'$  de  $\mathcal{A}_{2,2}$ .
15. (a) Démontrer que l'on a  $T_{2,2}(\mathcal{I}(\mathcal{A}_{2,1})) \subset \mathcal{I}(\mathcal{A}_{2,1})$  pour tout  $T \in \mathcal{A}$ .
- (b) Démontrer que l'on a  $\mathcal{I}(\mathcal{A}_{2,1}) = E_2$ . [On pourra raisonner par l'absurde, introduire un supplémentaire  $E'_2$  de  $\mathcal{I}(\mathcal{A}_{2,1})$  dans  $E_2$  et démontrer que  $T_{2,2}$  peut s'écrire sous la forme  $\begin{pmatrix} A(T) & 0 \\ C(T) & D(T) \end{pmatrix}$ .]
16. Soit  $T$  un élément de  $\mathcal{A}$  tel que  $T_{2,1} = 0$ .
  - (a) Démontrer que  $T_{2,2}$  et  $T_{3,2}$  sont nuls.
  - (b)  $T_{3,1}$  est-il nul aussi?