ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ETIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE
ECOLE POLYTECHNIQUE (FILIÈRE TSI)

CONCOURS D'ADMISSION 1997

MATHÉMATIQUES

PREMIÈRE ÉPREUVE
FILIÈRE MP
(Durée de l'épreuve : 3 heures)

L'emploi de la calculette est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie : MATHÉMATIQUES I - MP.
L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière MP, comporte 5 pages.

Soit $C_{2\pi}^m$ l'espace vectoriel des fonctions complexes définies sur la droite réelle, 2π-périodiques et continues par morceaux. Soit $C_{2\pi}$ le sous-espace vectoriel des fonctions continues. Pour toute fonction f appartenant à $C_{2\pi}^m$, le coefficient de Fourier d'ordre n ($n\in\mathbb{Z}$) est noté $c_n(f)$; il est donné par la relation suivante :

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\,dt\,.$$

Par définition les polynômes trigonométriques de degré n sont les fonctions P appartenant à $C_{2\pi}$ qui s'écrivent :

$$P(x) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikx} \quad \text{avec } a_k\in\mathbb{C} \text{ et } |a_n| + |a_{-n}| \neq 0.$$

Le but de ce problème est, pour une fonction f appartenant à $C_{2\pi}^m$, de définir une suite de polynômes trigonométriques π_n^f, $n\geqslant 1$, et d'étudier la convergence de cette suite vers la fonction f. La première partie est consacrée à la définition des fonctions π_n^f et à l'étude de leurs propriétés à l'aide des fonctions ψ (questions I.1 et I.2), φ_u et G (questions I.3, I.4 et I.5). La seconde partie est consacrée à la convergence vers f des π_n^f, $n\geqslant 1$, en introduisant la fonction ω_f.

Première partie

Soit ψ la fonction définie sur l'intervalle ouvert $I =]0, \pi[$ par la relation ci-dessous :

$$\psi(x) = \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{\sin^2 x}\right).$$

I-1°) Expressions de la fonction ψ :

a. Démontrer qu'il existe une fraction rationnelle R telle que la fonction ψ s'écrive sous la forme : $\psi(x) = R(\sin x)$. Préciser la fraction rationnelle R.

Soit n un entier strictement positif ($n \in \mathbb{N}^*$) ;

b. La relation : $\dfrac{\sin(nx)}{\sin x} = e^{-i(n-1)x} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{2ikx}$, pour tout réel x de l'intervalle I, est admise. Démontrer qu'il existe un polynôme trigonométrique Q_n dont le degré sera précisé tel que, pour tout x de l'intervalle I, la relation ci-dessous ait lieu :

$$\left(\frac{\sin(nx)}{\sin x}\right)^2 = Q_n(2x).$$

c. En déduire l'existence d'un unique polynôme trigonométrique P_n tel que, pour tout réel x de l'intervalle I, la relation ci-dessous ait lieu :

$$\psi(x)\,\sin^4(nx) = P_n(2x).$$

Démontrer que le degré du polynôme P_n est $2n-1$ sans rechercher tous ses coefficients.

Dans la suite du problème le polynôme trigonométrique P_n est noté :

$$P_n(x) = \sum_{k=-2n+1}^{2n-1} a_{n,k}\, e^{ikx}.$$

I-2°) Polynômes π_n^f :

Étant donnés une fonction f appartenant à l'espace $C_{2\pi}^m$ et un entier n strictement positif, soit π_n^f le polynôme trigonométrique défini par la relation :

(1) $$\pi_n^f(x) = \frac{1}{4n^3} \sum_{k=-2n+1}^{2n-1} a_{n,-k}\, c_k(f)\, e^{ikx}.$$

Démontrer l'existence d'une constante C, qui sera déterminée, telle que, pour tout réel x, il vienne : $$\pi_n^f(x) = \frac{C}{n^3}\int_0^{\pi} f(x+2u)\,\psi(u)\,\sin^4(nu)\,du.$$

Soit u un réel de l'intervalle I ($u \in]0, \pi[$) ; soit φ_u la fonction, 2π-périodique, définie sur l'intervalle $[-\pi, \pi[$, par la relation :

pour tout réel x tel que $-\pi \leqslant x < \pi$, $\varphi_u(x) = \exp\left(-\dfrac{iux}{\pi}\right)$.

I-3°) Étude de la fonction φ_u :

a. Démontrer que la fonction φ_u est continue par morceaux ; calculer ses coefficients de Fourier $c_n(\varphi_u)$, $n \in \mathbb{Z}$.

b. En déduire, pour tout réel u de l'intervalle I, une relation entre les expressions

$$\frac{1}{\sin^2 u} \text{ et } \lim_{p\to\infty} \sum_{k=-p}^{p} \frac{1}{(u+k\pi)^2}.$$

c. En déduire, pour tout réel u de l'intervalle I, la relation suivante :

$$\psi(u) = 6 \lim_{p\to\infty} \sum_{k=-p}^{p} \frac{1}{(u+k\pi)^4}.$$

Étant donnés une fonction g appartenant à l'espace $C_{2\pi}^m$ et un entier n strictement positif ($n \geqslant 1$), soit $G : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ la fonction définie par la relation :

$$G(t) = \begin{cases} g(2t)\dfrac{\sin^4(nt)}{t^4}, & \text{si } t \neq 0, \\ n^4\, g(0), & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

La fonction g et l'entier n étant fixés, soit $(\gamma_p)_{p\geqslant 1}$ la suite des fonctions complexes définies sur l'intervalle I par la relation :

$$\gamma_p(u) = g(2u)\sin^4(nu) \sum_{k=-p}^{p} \frac{1}{(u+k\pi)^4}$$

I-4°) Propriétés de la fonction G :

a. Soit f une fonction de l'espace $C_{2\pi}^m$; établir que la fonction f est bornée.

Soit $\|f\|_\infty$ la borne supérieure de l'ensemble des réels $|f(x)|$, pour tout x réel :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|.$$

Soient g une fonction appartenant à l'espace $C_{2\pi}^m$ et n un entier strictement positif ($n \geqslant 1$).

b. Démontrer que la fonction G est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$.

c. Démontrer que chaque fonction γ_p, $p \geqslant 1$, se prolonge par continuité aux extrémités de l'intervalle I.

d. Comparer les deux intégrales $\displaystyle\int_{-p\pi}^{(p+1)\pi} G(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_0^{\pi} \gamma_p(u)\,du$.

e. En déduire l'expression de l'intégrale de la fonction G étendue à $\mathbb{R}$ en fonction de l'intégrale ci-dessous :

$$\int_0^{\pi} g(2u)\,\psi(u)\,\sin^4(nu)\,du.$$

I-5°) Propriétés du polynôme π_n^f :

Soit f une fonction quelconque de l'espace $C_{2\pi}^m$ et n un entier strictement positif.

a. Démontrer que, pour tout réel x donné, la fonction $t \mapsto f(x+\frac{2t}{n})\,\frac{\sin^4 t}{t^4}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

b. Démontrer que le polynôme trigonométrique π_n^f, défini à la question I-2, admet l'expression intégrale :

$$\pi_n^f(x) = \frac{3}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f(x+\frac{2t}{n})\,\frac{\sin^4 t}{t^4}\,dt\,.$$

c. Dans cette question la fonction f est la fonction constante égale à 1. Calculer π_1^f (n=1). En déduire la valeur de l'intégrale $I = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^4 t}{t^4}dt$. Que vaut $\pi_n^f(x)$?

Seconde partie

Étant donnée une fonction f, appartenant à $C_{2\pi}^m$, soit F la fonction complexe définie sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$ par la relation :

pour tout réel x et tout réel h positif ou nul, $F(x, h) = f(x+h) - f(x)$.

Soit ω_f la fonction, oscillation de f, définie sur $\mathbb{R}^+$ par la relation :

(2) pour tout réel t positif ou nul, $\omega_f(t) = \sup_{(x,h)\in\mathbb{R}\times[0,t]} |F(x, h)|$.

II-1°) Étude de l'oscillation ω_f de f :

f est une fonction donnée de $C_{2\pi}^m$.

a. Établir l'existence de la fonction ω_f.

b. Démontrer que la fonction ω_f est monotone sur la demi-droite $[0, \infty[$; donner son sens de variation. Que vaut $\omega_f(0)$?

Il est admis dans la suite que la fonction montone croissante ω_f possède aussi les propriétés suivantes :

i/ Soient a un réel et n un entier strictement positifs ($a>0$, $n \geqslant 1$) :

$$\omega_f(n\,a) \leqslant n\,\omega_f(a)\,.$$

ii/ Soient a et t deux réels strictement positifs :

$$\omega_f(t\,a) \leqslant (1+t)\,\omega_f(a)\,.$$

iii/ Si la fonction f n'est pas constante sur $\mathbb{R}$, alors pour tout réel t strictement positif, $\omega_f(t)$ est strictement positif.

II-2°) Uniforme continuité de la fonction ω_f :

Dans cette question la fonction f est continue ($f \in C_{2\pi}$).

Démontrer que la fonction ω_f est uniformément continue sur la demi-droite $\mathbb{R}^+$.

II-3°) Convergence de la suite des polynômes trigonométriques π_n^f, $n \geqslant 1$:

Dans cette question la fonction f est continue ($f \in C_{2\pi}$).

a. La fonction f est supposée différente d'une constante ; démontrer, pour tout entier n strictement positif, l'inégalité :

$$\|\pi_n^f - f\|_\infty \leqslant \frac{3}{\pi} \int_0^\infty \omega_f\left(\frac{2t}{n}\right) \frac{\sin^4 t}{t^4}\, dt .$$

b. Démontrer l'existence d'une constante A indépendante de la fonction f appartenant à $C_{2\pi}$ telle que la relation

(3) $$\|\pi_n^f - f\|_\infty \leqslant A\, \omega_f\left(\frac{1}{n}\right)$$

ait lieu.

c. Quelle conclusion tirer des résultats précédents sur la suite π_n^f, $n \geqslant 1$?

II-4°) Cas des fonctions appartenant à $C_{2\pi}^m$:

a. Démontrer qu'il existe une constante A telle que l'inégalité **(3)** ait lieu pour toute fonction f appartenant à l'espace $C_{2\pi}^m$.

b. Démontrer, pour une fonction f de $C_{2\pi}^m$, l'équivalence entre les trois propriétés suivantes :

i/ la fonction ω_f est continue en 0.

ii/ la fonction ω_f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.

iii/ la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

II-5°) Cas des fonctions continûment dérivables :

Démontrer, pour toute fonction f continûment dérivable, la majoration :

$$\|\pi_n^f - f\|_\infty \leqslant \frac{2}{n}\|f'\|_\infty .$$

FIN DU PROBLÈME

FIN DE L'ÉPREUVE