Concours Centrale - Supélec 1993

# Épreuve : MATHEMATIQUES I — Option MP'

Dans tout le problème f désigne une application de $]0,+\infty[$ dans $]0,+\infty[$.

## *Partie I -*

Dans cette partie on suppose que f est continue, décroissante et de limite nulle en $+\infty$. Pour $x > 0$, $k \geq 0$, $n \geq 0$, k et n entiers, on pose :

$$c_k(x) = f(x+k) - \int_{x+k}^{x+k+1} f(t)dt \qquad C_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k(x)$$

$$d_k(x) = f(x+k+1) - \int_{x+k}^{x+k+1} f(t)dt \qquad D_n(x) = \sum_{k=0}^{n} d_k(x)$$

**I.1)**

a) Interpréter géométriquement $c_k(x)$ et $C_n(x)$.

b) Établir l'inégalité $c_k(x) \leq f(x+k) - f(x+k+1)$.

En déduire que la série de terme général $c_k(x)$ converge pour tout $x > 0$ et que sa somme

$$C(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k(x)$$

vérifie l'inégalité $C(x) \leq f(x)$.

**I.2)** Après en avoir justifié l'existence, déterminer C(x) dans chacun des deux cas suivants :

a) $f(x) = e^{-x}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x(x+1)}$

**I.3)** Montrer que la série de terme général $d_k(x)$ converge pour tout $x > 0$ et exprimer sa somme

$$D(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} d_k(x)$$

au moyen de C(x) et de f(x).

**I.4)**

a) Montrer que la fonction $C : x \to C(x)$ est continue sur $]0,+\infty[$.

b) Étudier le comportement de C en $+\infty$.

**I.5)** On suppose **dans cette seule question** que $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$

a) Montrer que :

$$\int_x^{x+1} f(t)dt$$

est négligeable devant f(x) quand x tend vers 0.

b) En déduire que C(x) et f(x) sont équivalents quand x tend vers 0.

## *Partie II -*

Dans cette partie, on conserve les hypothèses faites sur f dans l'introduction de la Partie I, auxquelles on ajoute l'hypothèse supplémentaire suivante : f est de classe $\mathscr{C}^1$ et convexe, c'est-à-dire à **dérivée f' croissante**.

**II.1)** Montrer que f'(x) a une limite, que l'on précisera, lorsque x tend vers $+\infty$.

**II.2)** Montrer que la fonction C est de classe $\mathscr{C}^1$ et décroissante (on pourra utiliser la fonction $g = -f'$).

**II.3)** Pour $x > 0$ et $k$ entier, on pose :

$$u_k(x) = \frac{1}{2}[f(x+k) + f(x+k+1)] - \int_{x+k}^{x+k+1} f(t)\,dt, \qquad k \geq 0$$

$$v_k(x) = f(x+k) - \int_{x+k-\frac{1}{2}}^{x+k+\frac{1}{2}} f(t)\,dt, \qquad k \geq 1$$

a) Interpréter géométriquement $u_k(x)$ et $v_k(x)$.

b) Montrer que pour tout $x > 0$ les séries de termes généraux $u_k(x)$ et $v_k(x)$ sont convergentes et exprimer leurs sommes

$$U(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x) \text{ et } V(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} v_k(x)$$

au moyen de $C(x)$ et de $f(x)$.

**II.4)** Montrer que pour $x > 0$ on a :

$$\frac{1}{2}f(x) \leq C(x) \leq f(x) - \int_{x}^{x+\frac{1}{2}} f(t)\,dt.$$

**II.5)**

a) Montrer que, quand $x$ tend vers $+\infty$, les conditions suivantes sont équivalentes :

i/ $f'(x)$ est négligeable devant $f(x)$.

ii/ $f(x)$ et $f(x+1)$ sont équivalents.

b) Les conditions i) et ii) étant supposées remplies, montrer que, quand $x$ tend vers $+\infty$, on a :

$$C(x) \sim \frac{1}{2}f(x)$$

c) Donner un exemple de fonction $f$ satisfaisant à ces conditions.

**II.6)**

a) Pour $f(x) = e^{-x}$, que peut-on dire du rapport $\dfrac{C(x)}{f(x)}$ ?

b) Montrer que, pour tout $m \in \,]1/2, 1[$ , il existe une fonction $f$ telle que :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{C(x)}{f(x)} = m$$

## *Partie III -*

Dans cette partie, où $f$ vérifie les hypothèses de l'introduction de la Partie I, on utilisera, sans le démontrer, le résultat classique suivant :

la suite de terme général

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n \qquad (n \geq 1)$$

admet une limite finie $\lambda\ (0 < \lambda < 1)$, appelée constante d'Euler, lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

On pose, pour $x > 0$, $k \geq 0$, $n \geq 0$, $k$ et $n$ entiers :

$$\gamma_k(x) = xf((k+1)x) - \int_{(k+1)x}^{(k+2)x} f(t)\,dt, \qquad \Gamma_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \gamma_k(x)$$

$$\delta_k(x) = xf((k+2)x) - \int_{(k+1)x}^{(k+2)x} f(t)\,dt, \qquad \Delta_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \delta_k(x)$$

**III.1)**

a) Interpréter géométriquement $\gamma_k(x)$ et $\Gamma_n(x)$.

b) En posant $f_x(u) = xf(ux)$, montrer que la série de terme général $\gamma_k(x)$ converge pour tout $x > 0$ et que sa somme

$$\Gamma(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \gamma_k(x)$$

est une fonction continue de $x$ sur $]0, +\infty[$.

**III.2)** Montrer que la série de terme général $\delta_k(x)$ converge pour tout $x > 0$. Calculer sa somme

$$\Delta(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta_k(x)$$

en fonction de $\Gamma(x)$ et de $f(x)$.

**III.3)** On suppose dans cette question que $xf(x)$ a une limite finie, A, quand x tend vers 0.

Montrer que $\Gamma(x)$ tend vers $A\lambda$ quand x tend vers 0.

**III.4)** On suppose dans cette question que

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{x}.$$

a) Montrer que

$$\Gamma(x) = -\ln(1-e^{-x}) - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$$

b) Montrer que

$$\ln x + \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$$

admet une limite, que l'on déterminera, lorsque x tend vers 0.

c) Montrer que la série

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{-(x+k)}}{x+k} \text{ converge normalement sur } [0,+\infty[.$$

d) Donner un développement asymptotique à trois termes significatifs de C(x) (C a été définie en I) lorsque x tend vers 0.

--- 

**••• FIN •••**