Préambule

Pour tout entier naturel k on définit le polynôme Γ_k par :

$$\Gamma_0 = 1, \Gamma_1 = X, \Gamma_2 = \frac{X(X-1)}{2} \dots$$

$$\Gamma_k = \frac{X(X-1)\dots(X-k+1)}{k!}$$

Le but du problème est d'étudier quelques propriétés de ces polynômes et des séries du type

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \Gamma_n(x)$$

où x est une variable réelle et $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle.

Partie I

On étudie dans cette partie quelques propriétés des polynômes Γ_k.

I.1) Montrer que pour tout entier relatif x, $\Gamma_k(x)$ est aussi un entier relatif. Calculer $\Gamma_k(k)$ et $\Gamma_k(-1)$.

I.2) Établir pour tout entier $n \geq 1$ les formules :

$$\Gamma_n(X+1) - \Gamma_n(X) = \Gamma_{n-1}(X)$$

$$n\Gamma_n(X) = (X-n+1)\Gamma_{n-1}(X)$$

I.3) Soit un polynôme Q de degré n. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes.

- Pour tout entier relatif x, $Q(x)$ est un entier relatif.
- Il existe $n+1$ entiers relatifs consécutifs $x_0, \dots, x_n$ tels que les $Q(x_i)$ soient des entiers relatifs.
- Il existe des entiers relatifs $a_0, a_1, \dots a_n$ tels que

$$Q(X) = a_0 + a_1\Gamma_1(X) + \dots + a_n\Gamma_n(X)$$

On pourra observer que tout polynôme est une combinaison linéaire des polynômes Γ_k et raisonner par récurrence sur le degré de Q.

Pour M seuls :

I.4) Soit une fraction rationnelle $F = P/Q$, où P et Q sont deux polynômes réels. On suppose qu'il existe un entier N tel que, pour tout n entier au moins égal à N, $F(n)$ soit entier relatif. Montrer que F est un polynôme satisfaisant aux conditions de I.3. On pourra utiliser une récurrence sur d, d désignant le degré de F, c'est-à-dire la différence entre le degré de P et le degré de Q.

Partie II

II.1) Soit f une application de $[\alpha, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, où $\alpha \leq 0$.

a) Montrer qu'il existe une suite de réels $(a_n)_{n \geq 0}$ et une seule possédant la propriété suivante : pour tout n, la fonction

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k \Gamma_k(x)$$

est nulle pour x égal aux $n+1$ entiers consécutifs $0, 1, 2, \dots n$.

La suite $(a_n)_{n \geq 0}$ sera dite suite associée à la fonction f.

b) Montrer que la suite associée à la fonction $x \to b^x$ $(b > 0)$ est $a_n = (b-1)^n$

II.2)

a) On suppose de plus ici que f est de classe infinie. On donne un réel $x \geq \alpha$. Montrer qu'il existe, pour tout entier naturel N, un réel θ tel que :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k \Gamma_k(x) + \Gamma_{N+1}(x) f^{(N+1)}(\theta)$$

On pourra utiliser la fonction auxiliaire qui à t associe

$$f(t) - \sum_{k=0}^{N} a_k \Gamma_k(t) - A\Gamma_{N+1}(t)$$

où A est une constante convenablement choisie et appliquer le théorème de Rolle.

b) En déduire que, pour tout n entier naturel, il existe un réel positif λ_n tel que

$$a_n = f^{(n)}(\lambda_n)$$

A SUIVRE

a) Déduire de ce théorème que, si la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \Gamma_n(x)$$

converge en un point x_0 (x_0 non entier naturel), alors elle converge uniformément sur tout compact de $[x_0, +\infty[$.

b) Montrer de plus qu'il y a convergence absolue sur $[x_0+1, +\infty[$.

III.5) pour P' et TA et III.6) pour M

On considère, dans cette question, la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} h^n \Gamma_n(x)$$

a) On suppose $|h| < 1$. Pour quels x la série est-elle convergente ? Quelle est alors sa somme ?

b) Que se passe-t-il lorsque $|h| > 1$?

c) On prend $h = 1$. Pour quels x la série converge-t-elle ? Montrer que la somme est égale à 2^x. On pourra appliquer II.2.a) et s'en servir pour déterminer le signe de

$$2^x - \sum_{k=0}^{n} \Gamma_k(x)$$

d) On prend $h = -1$. Pour quels x la série $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \Gamma_n(x)$ est-elle absolument convergente ?

Pour quels x est-elle convergente ? Soit $\sigma(x)$ sa somme ; donner $\sigma(x)$ lorsque x est un entier naturel. Pour TA voir suite page suivante.

M et P' ↓

e) On fixe x strictement positif, et l'on pose, t décrivant $[0, 1]$:

$$\varphi_x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n \Gamma_n(x)$$

Reconnaître, pour $t \neq 1$, cette fonction. Établir que la série ci-dessus converge normalement en t sur $[0, 1]$. En déduire $\sigma(x)$.

Partie IV

On considère dans cette partie des fonctions de la forme

$$f(x) = \int_{-1}^{0} (1+t)^x h(t)\,dt$$

où h est une application continue de $[-1, 0]$ dans $\mathbb{R}$.

IV.1) Montrer que, pour $x > 0$, on a la relation

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{-1}^{0} t^n h(t)\,dt \right) \Gamma_n(x) \qquad (1)$$

IV.2) h désigne une fonction définie et continue sur $[-1, 0]$. On suppose $x > -1$.

Établir à l'aide de la formule de Taylor avec reste sous forme d'intégrale la relation, pour tout entier N

$$(1+t)^x = \sum_{0 \le n \le N} t^n \Gamma_n(x) + R_N(t,x)$$

où $$R_N(t,x) = (N+1)\Gamma_{N+1}(x) \int_0^t \left(\frac{t-u}{1+u}\right)^N (1+u)^{x-1} du$$

IV.3) Conservant les hypothèses du IV.2) on étudie ici

$$\lim_{N \to \infty} \int_{-1}^{0} h(t) R_N(t,x)\,dt$$

a) Montrer que l'intégrale $\int_{-1}^{0} h(t) R_N(x,t)\,dt$ converge.

b) À l'aide du changement de variable $s = \dfrac{t-u}{1+u}$, établir pour $|t| < 1$

$$R_N(t,x) = (N+1)\Gamma_{N+1}(x)\,(1+t)^x \int_0^t (s+1)^{-x-1} s^N ds$$

c) En posant

$$r_N(t) = \int_0^t (s+1)^{-x-1} s^N ds \text{ et } H(t) = \int_{-1}^t (1+s)^x h(s)\,ds,$$

établir, à l'aide d'une intégration par parties :

A SUIVRE

$$\int_{-1}^{0} R_N(t,x)\,h(t)\,dt = -(N+1)\Gamma_{N+1}(x)\int_{-1}^{0} H(t)\,(1+t)^{-x-1}t^N dt$$

d) Montrer que l'application $t \to |H(t)\,(1+t)^{-x-1}|$ est bornée.

En déduire que la relation (1) est vérifiée pour $x > -1$.

IV.4) On prend ici $h(t) = (1+t)^{\lambda}$, où $\lambda \geq 0$.

a) Pour quelles valeurs de x l'intégrale définissant f a-t-elle un sens ?

b) Calculer $a_n = \int_{-1}^{0} t^n h(t)\,dt$ pour tout n entier naturel.

c) Établir, pour $x > -1$ la relation

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Gamma_n(x) \qquad (2)$$

d) En utilisant les pôles et les zéros de la différence

$$f(x) - \sum_{n=0}^{N} a_n \Gamma_n(x)$$

déterminer les valeurs réelles de x pour lesquelles la relation (2) est valable.

••• FIN ••• M et P

Enoncé TA : I 1-2-3, II 1-2 III 1-2-3-4-
III 5 (TA) jusque d - complété par :

III 5 d (suite)

Établir pour tout x réel et tout n entier strictement positif, la formule :

$$\Gamma_0(x) - \Gamma_1(x) + \ldots + (-1)^n\Gamma_n(x) = (-1)^n\Gamma_n(x-1)$$

En déduire, pour $x \geq 0$, la valeur de $\sigma(x)$.

III.6) Soit λ un réel strictement positif. On prend ici pour f l'application de $]-\lambda, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe

$$\frac{1}{x+\lambda}$$

On considère la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ associée à cette fonction f (cf II.1).

a) On pose, pour tout n entier naturel et pour tout $x > -\lambda$:

$$g_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k \Gamma_k(x)$$

Établir que

$$g_n(x) = -(n+1)\,a_n \frac{\Gamma_{n+1}(x)}{x+\lambda} \qquad (1)$$

On pourra observer que la fonction qui à x associe $(x+\lambda)\,g_n(x)$ est polynomiale et utiliser ses zéros.

b) En utilisant la formule (1) ci-dessus pour deux valeurs consécutives de n, trouver une formule de récurrence pour le calcul des a_n.

c) Déterminer a_n. Établir que, pour tout $x > -\lambda$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Gamma_n(x)$$

••• FIN ••• TA