❋ Banque filière PT ❋

Epreuve de Mathématiques I-A

Durée 4 h

$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des nombres entiers positifs ou nuls,
et $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels.

Partie I

1°) Soit f la fonction de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(t)=\dfrac{\sin t}{t}$.

Quelle valeur faut-il attribuer à $f(0)$ pour prolonger par continuité f sur $[0,+\infty[$?
On désigne encore par f la fonction ainsi prolongée.

2°) On définit la fonction F de $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ par

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt.$$

On pose, pour tout entier $n \geqslant 0$, $\theta_n = F(n\pi)$.
Dresser le tableau de variation de F dans l'intervalle $[2k\pi,(2k+3)\pi]$, k étant un entier positif.

3°) On pose, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t + n\pi} dt$.

a) Montrer que $\theta_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$.

Etudier la convergence de la série $\sum u_n$.

b) Préciser le sens de variation des suites $(\theta_{2k})_{k \in \mathbb{N}}$ et $(\theta_{2k+1})_{k \in \mathbb{N}}$.

c) La série $\sum u_n$ est-elle absolument convergente ?

4°) Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est convergente.

Est-elle absolument convergente ?

Partie II

On définit la fonction ϕ de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ par la relation

$$\phi(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x)\, dx .$$

1°) Montrer que ϕ est définie sur $[0, +\infty[$.

2°) Soit $a > 0$. Montrer que ϕ est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$.
En déduire que ϕ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et calculer sa dérivée ϕ'.

3°) Calculer $\lim_{s \to +\infty} \phi(s)$. En déduire la valeur de $\phi(s)$ pour $s > 0$.

Partie III

Soit g une fonction continue de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ telle que

(i) $\lim_{x \to +\infty} g(x) = \alpha$ existe dans $\mathbb{R}$,

(ii) l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-sx} |g(x)|\, dx$ est convergente pour tout $s > 0$.

Pour $s > 0$, on pose $\gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} g(x)\, dx$ et $\delta(s) = s\, \gamma(s) - \alpha$.

1°) Montrer que $\delta(s) = s \int_0^{+\infty} e^{-sx} (g(x) - \alpha)\, dx$.

2°) Soient $\varepsilon > 0$ et $A > 0$ tels que $|g(x) - \alpha| \leqslant \varepsilon$ pour tout $x \geqslant A$.

Etablir que $|\delta(s)| \leq \varepsilon + s \int_0^{A} |g(x) - \alpha|\, dx$ pour tout $s > 0$.

3°) En déduire la valeur de la limite $\lim_{s \to 0} s\, \gamma(s)$.

Partie IV

1°) f et F étant les fonctions définies dans la partie I, montrer que

$$s\int_0^{+\infty} e^{-sx}F(x)dx = \int_0^{+\infty} e^{-sx}f(x)dx \text{ pour tout } s > 0.$$

2°) En utilisant les résultats précédents, calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt$.

3°) On pose, pour tout x réel,

$$I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x t}{t}dt \text{ et } C(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\cos(x t)\, dt.$$

Etablir l'existence de ces intégrales.
Calculer $I(x)$ et $C(x)$ pour tout x réel.
Représenter graphiquement les fonctions $I : x \mapsto I(x)$ et $C : x \mapsto C(x)$.

Partie V

1°) Montrer que, pour tout $x > 0$,

$$\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt = \frac{\cos x}{x} + \frac{\sin x}{x^2} + \rho(x),$$

$$\text{avec } |\rho(x)| \leq \frac{1}{x^2}.$$

Montrer que, pour tout entier $n > 0$,

$$F(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)!\, \sin(x - k\frac{\pi}{2})}{x^k} + R_n(x),$$

$$\text{avec } |R_n(x)| \leq \frac{(n-1)!}{x^n}.$$

2°) Pour tout $x > 0$ fixé, et pour tout n entier strictement positif, on pose :

$$v_n = \frac{(n-1)!}{x^n}.$$

Etudier les variations de la suite $(v_n)_{n>0}$.
Quelle est la limite de cette suite ?

3°) Déduire de ce qui précède une valeur approchée de $F(50)$ à 10^{-4} près.

4°) Pourrait-on utiliser la même méthode pour déterminer une valeur approchée à 10^{-4} près de $F(1)$?