Epreuve de Mathématiques I-A

durée 4h

On désigne par $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers positifs ou nuls.
Les suites et les séries envisagées dans ce problème sont à termes réels ou complexes.
On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$, et on note ln la fonction logarithme népérien.

Les trois parties sont indépendantes.

Première partie

1.1. Montrer que la suite de terme général $u_n = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1}\right) - ln\, n$ est convergente.

1.2. En déduire la valeur de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$.

(Indication : on pourra poser $s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$ et comparer s_{2n} et $u_{2n} - u_n$.)

1.3. Combien de termes de cette série faut-il calculer pour obtenir une valeur approchée à 10^{-6} près de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$?

1.4. En observant que $ln\, 2 = -ln(1 - \frac{1}{2})$, et en utilisant un développement en série entière, écrire $ln\, 2$ comme somme d'une série numérique à termes positifs.
Combien de termes de cette série faut-il calculer pour obtenir une valeur approchée à 10^{-6} près de $ln\, 2$?

Deuxième partie

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels ou complexes.

2.1. On lui associe la suite $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = \dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k$.

2.1.1. Montrer que si la suite u converge vers 0, il en est de même de la suite v.
(Indication : $\varepsilon > 0$ étant donné, on pourra considérer n_0 tel que $|u_n| < \varepsilon$ pour tout $n > n_0$ et étudier séparément $\dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_0} u_k$ et $\dfrac{1}{n+1}\sum_{k=n_0+1}^{n} u_k$.)
En déduire que si la suite u converge vers une limite L, il en est de même de la suite v.

2.1.2. θ étant une constante réelle non entière, on pose ici $u_n = e^{2i\pi n\theta}$.
Etudier la convergence des suites u et v.

2.2. A la suite u, on associe la suite $w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $w_n = \dfrac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u_k$, où $\binom{n}{k}$ est le coefficient du binôme $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

2.2.1. Montrer que si la suite u converge vers une limite L, il en est de même de la suite w.

2.2.2. Donner un exemple de suite u divergente, mais dont la suite w associée converge.

2.3. A toute suite u on associe, pour k dans $\mathbb{N}$, les suites $u^{(k)} = \left(u_n^{(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :
pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n^{(0)} = u_n$,
pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n^{(1)} = u_n^{(0)} + u_{n+1}^{(0)}$,
pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n^{(k)} = u_n^{(k-1)} + u_{n+1}^{(k-1)}$.

2.3.1. Etablir que $u_0^{(k)} = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}u_j$.

2.3.2. Soit $\sum u_n$ une série de terme général u_n. On pose $s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n}\dfrac{u_0^{(k)}}{2^{k+1}}$.
Montrer que $S_n = \dfrac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}s_k$.

2.3.3. Déduire de ce qui précède que, si la série $\sum u_n$ converge et a pour somme S, il en est de même de la série $\sum \dfrac{u_0^{(n)}}{2^{n+1}}$.

2.3.4. Calculer $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{k+1}x^{k+1}$.

On pose <u>ici</u> $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$.

Expliciter $u_0^{(n)}$.

Combien de termes de la série $\sum \frac{u_0^{(n)}}{2^{n+1}}$ faut-il calculer pour obtenir une valeur approchée à 10^{-6} près de sa somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u_0^{(n)}}{2^{n+1}}$?

Troisième partie

Dans cette partie, x désigne une variable réelle.

A toute série $u = \sum u_n$, de terme général u_n, on associe, lorsqu'elles existent :

la limite $B_1(u) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{s_n}{n!}x^n$ où $s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$,

et l'intégrale $B_2(u) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u_n x^n}{n!}\right)dx$.

<u>**3.1.**</u> Calculer $B_1(u)$ et $B_2(u)$ dans le cas où $u_n = (-1)^n$.

<u>**3.2.**</u> Dans le cas où la série $u = \sum u_n$ converge, donner les rayons de convergence des séries entières $\sum \frac{u_n}{n!}x^n$ et $\sum \frac{s_n}{n!}x^n$.

<u>**3.3.**</u> Calculer $\lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\int_{\varepsilon}^{2\varepsilon}\frac{dx}{x}$ et en déduire la valeur de $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}dx$.

Soit <u>ici</u> la série u de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$. Calculer $B_2(u)$.

<u>**3.4.**</u> q est un nombre réel donné. Soit <u>ici</u> u la série de terme général $u_n = q^n$.
Pour quelles valeurs de q la limite $B_1(u)$ existe-t-elle ? La calculer alors.
Pour quelles valeurs de q l'intégrale $B_2(u)$ converge-t-elle ? La calculer alors.