Banque « Agro – Véto » **Énoncé**
27 avril 2009 (13 h 30 - 17 h 00)

Mathématiques A

(durée : 3 h 30)

L'usage d'une calculatrice est interdit pour cette épreuve.
Les deux problèmes sont indépendants.
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Problème 1

Soient E un espace vectoriel réel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ une base de E. Considérons l'endomorphisme u de E tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = A$ où

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. **Diagonalisation de u**
   a) Déterminer les valeurs propres de u. Ce résultat suffit-il à assurer la diagonalisabilité de u ? *Votre réponse sera justifiée.*
   b) Pour chaque valeur propre de u, déterminer une base du sous-espace propre associé.
   c) En déduire que u est diagonalisable.
   d) Déterminer une base $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{e_1}', \overrightarrow{e_2}', \overrightarrow{e_3}')$ de E telle que la matrice de u dans cette nouvelle base $\mathcal{B}'$ soit

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. **Recherche des « racines carrées » de u**
   a) On suppose qu'il existe un endomorphisme v de E tel que $v \circ v = u$.
      i. Démontrer que $u \circ v = v \circ u$.
      ii. Démontrer que $u\big(v(\overrightarrow{e_1}')\big) = -2v(\overrightarrow{e_1}')$. En déduire que $v(\overrightarrow{e_1}')$ et $\overrightarrow{e_1}'$ sont colinéaires puis que $\overrightarrow{e_1}'$ est un vecteur propre de v.
      iii. Soit $\overrightarrow{x}$ un vecteur propre de u associé à la valeur propre 1. Démontrer que $u\big(v(\overrightarrow{x})\big) = v(\overrightarrow{x})$ et en déduire que $v(\overrightarrow{x})$ appartient à $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{e_2}', \overrightarrow{e_3}')$.
      iv. En déduire qu'il existe des nombres réels a, x, y, z, t tels que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(v) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & x & y \\ 0 & z & t \end{pmatrix}.$$

v. Démontrer que $\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(v)\right)^2 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$ et en déduire que $a^2 = -2$.

b) Existe-t-il des endomorphismes v de E tels que $v \circ v = u$? *Votre réponse sera justifiée.*

3. **Construction d'une base de E dans laquelle la matrice de u est de diagonale nulle**

Nous constatons que la somme des éléments diagonaux de A est nulle et nous nous proposons de démontrer que A est semblable à une matrice dont tous les éléments diagonaux sont nuls.

a) Mettons en place notre premier changement de base.

i. Démontrer que la famille $\left(\overrightarrow{e_1}, u(\overrightarrow{e_1})\right)$ est libre.

ii. Démontrer qu'un vecteur $\overrightarrow{x}$ de composantes (a, b, c) dans la base $\mathcal{B}$ appartient à $\mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{e_1}, u(\overrightarrow{e_1})\right)$ si, et seulement si, $4b - c = 0$. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que la famille $\left(\overrightarrow{e_1}, u(\overrightarrow{e_1}), \overrightarrow{x}\right)$ soit une base de E.

► *Dans la suite de ce problème, $\overrightarrow{e_3}''$ désigne le vecteur de composantes $(1, 1, 1)$ dans la base $\mathcal{B}$. On note alors $\mathcal{B}''$ la famille $\left(\overrightarrow{e_1}, u(\overrightarrow{e_1}), \overrightarrow{e_3}''\right)$.*

iii. Justifier que $\mathcal{B}''$ est une base de E.

iv. Écrire la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}''$ et calculer P^{-1}. Calculer alors la matrice A'' de u dans la base $\mathcal{B}''$.

► *La matrice obtenue est de la forme*

$$A'' = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 1 & \gamma & \delta \\ 0 & \lambda & \mu \end{pmatrix}$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu$ désignent des nombres réels.

b) Soit $\mathcal{C} = \left((1, 0), (0, 1)\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Considérons l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ \lambda & \mu \end{pmatrix},$$

où les nombres $\gamma, \delta, \lambda, \mu$ ont été calculés à la question précédente.

i. Démontrer que la famille $\mathcal{C}' = \left((0, 1), f((0, 1))\right)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et écrire la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{C}'$.

ii. Calculer alors la matrice de f dans cette nouvelle base $\mathcal{C}'$.

c) En notant la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{C}'$ de la façon suivante

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

où a, b, c, d désignent des nombres réels calculés précédemment, définissons la matrice R par

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}.$$

i. Démontrer que R est inversible et calculer R^{-1}.

ii. Calculer $R^{-1}A''R$.

d) En déduire que A est semblable à une matrice dont les éléments diagonaux sont tous nuls.

Problème 2
Développement asymptotique d'une somme de Riemann

Pour toute fonction $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous noterons

$$S_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(\frac{k}{n}\Big).$$

0. Quelle est la limite de la suite $\big(S_n(f)\big)$? *Aucune démonstration n'est attendue.*

1. **Application**

   Considérons la suite (u_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+n}$$

   et la suite (v_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad v_n = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{2k+1}.$$

   a) Écrire un algorithme qui, pour un nombre entier naturel non nul n donné, calcule la valeur de u_n.

   b) Démontrer que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.

   c) Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad v_n + \frac{1}{2}u_n = u_{2n}.$$

   d) Démontrer alors que la suite (v_n) converge vers $\dfrac{1}{2}\ln 2$.

2. **Développement asymptotique d'une somme de Riemann**

   Dans cette partie, f désigne une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur le segment $[0;1]$, à valeurs réelles.

   a) Justifier l'existence d'un nombre réel M tel que $\forall x \in [0;1]\,,\ |f^{(3)}(x)| \leqslant M$.

   b) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in [\![0; n-1]\!]$ et $t \in \Big[\dfrac{k}{n}; \dfrac{k+1}{n}\Big]$.

      i. À l'aide de la formule de Taylor–Lagrange appliquée à la fonction f de classe $\mathcal{C}^3$ sur l'intervalle $[k/n; t]$, démontrer que

$$\left| f(t) - f\Big(\frac{k}{n}\Big) - \Big(t - \frac{k}{n}\Big) f'\Big(\frac{k}{n}\Big) - \frac{1}{2}\Big(t-\frac{k}{n}\Big)^2 f''\Big(\frac{k}{n}\Big)\right| \leqslant \frac{M}{6}\Big(t - \frac{k}{n}\Big)^3.$$

      ii. Soit $q \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la primitive sur $\mathbb{R}$ de $t \longmapsto \Big(t - \dfrac{k}{n}\Big)^q$ qui s'annule en $\dfrac{k}{n}$?

      iii. Par intégration entre $\dfrac{k}{n}$ et $\dfrac{k+1}{n}$, démontrer que

$$\left| \left(\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\,\mathrm{d}t\right) - \frac{1}{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big) - \frac{1}{2n^2} f'\Big(\frac{k}{n}\Big) - \frac{1}{6n^3} f''\Big(\frac{k}{n}\Big)\right| \leqslant \frac{M}{24n^4}.$$

   c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En additionnant les inégalités obtenues à la question 2. b) γ], démontrer que

$$\left| \left(\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right) - S_n(f) - \frac{1}{2n} S_n(f') - \frac{1}{6n^2} S_n(f'')\right| \leqslant \frac{M}{24n^3}.$$

d) Définissons la suite (ε_n) par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \varepsilon_n = n^2\left(S_n(f) + \frac{1}{2n}S_n(f') + \frac{1}{6n^2}S_n(f'') - \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

Démontrer que la suite (ε_n) converge vers 0 et que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad S_n(f) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2n}S_n(f') - \frac{1}{6n^2}S_n(f'') + \frac{\varepsilon_n}{n^2}\cdot$$

e) Justifier l'existence de deux suites (ε'_n) et (ε''_n) de limite nulle telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad S_n(f') = \int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2n}S_n(f'') + \frac{\varepsilon'_n}{n}$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad S_n(f'') = \int_0^1 f''(t)\,\mathrm{d}t + \varepsilon''_n.$$

f) En déduire l'existence d'une suite (δ_n) de limite nulle telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad S_n(f) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2n}\int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{12n^2}\int_0^1 f''(t)\,\mathrm{d}t + \frac{\delta_n}{n^2}\cdot$$

Nous venons ainsi de démontrer que

$$S_n(f) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2n}\int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{12n^2}\int_0^1 f''(t)\,\mathrm{d}t + o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)\cdot$$

3. **Application**

Les suites (u_n) et (v_n) ont été définies à la question 1.

a) Démontrer qu'il existe une suite (α_n) de limite nulle telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = \ln 2 + \frac{1}{4n} + \frac{1}{16n^2} + \frac{\alpha_n}{n^2}\cdot$$

b) En déduire un équivalent simple de $u_n - \ln 2$ lorsque n tend vers $+\infty$.

c) Démontrer que

$$v_n - \frac{1}{2}\ln 2 \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{64n^2}\cdot$$

d) Comparer les vitesses de convergence des suites (u_n) et (v_n).

FIN DE L'ÉPREUVE