Mathématiques A

(durée : 3 h 30)

L'usage d'une calculatrice est interdit pour cette épreuve.
Les deux problèmes sont indépendants.
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Problème 1
Réduction d'une matrice

Soit A la matrice carrée d'ordre 3 à coefficients réels définie par :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{7}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{7}{12} \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -4 & 8 & -4 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

1. **Méthode matricielle**
   a) Déterminer les valeur propres de A.
   Ce résultat suffit-il à assurer la diagonalisabilité de A ?
   b) Pour chaque valeur propre de A, déterminer une base du sous-espace propre associé. Les vecteurs seront choisis de troisième composante égale à 1.
   c) En déduire une matrice R réelle et inversible telle que

$$R^{-1}AR = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

   d) Calculer R^{-1} (le détail des calculs figurera sur la copie).

2. **Méthode vectorielle**
   Rappelons que $\mathbb{R}_2[X]$ désigne l'ensemble des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à 2.
   a) Montrer que $\mathbb{R}_2[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\big(\mathbb{R}[X], +, \cdot\big)$.
   Déterminer une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et en déduire sa dimension.

b) P appartenant à $\mathbb{R}_2[X]$, nous lui associons la fonction P^* définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad P^*(x) = \frac{1}{x}\int_0^x P(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad P^*(0) = P(0).$$

Démontrer que P^* est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2.

Nous définissons alors une application φ de $\mathbb{R}_2[X]$ dans lui même en posant :

$$\varphi \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & P^* \end{array} \right.$$

c) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

d) Calculer la matrice M de φ dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}_2[X]$ (les polynômes de $\mathscr{B}$ seront rangés par ordre de degré croissant).

e) Notons $f_0 : x \longmapsto (x-1)^2$, $f_1 : x \longmapsto (x-1)(x+1)$ et $f_2 : x \longmapsto (x+1)^2$.
Montrer que $\mathscr{F} = (f_0, f_1, f_2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
Soit P appartenant à $\mathbb{R}_2[X]$. En notant (c_0, c_1, c_2) ses composantes dans la base $\mathscr{F}$, exprimer c_0, c_1 et c_2 en fonction de $P(1)$, $P(-1)$ et $P'(1)$, dérivée de P en 1.

f) Calculer $\varphi(f_0)$, $\varphi(f_1)$, $\varphi(f_2)$ dans la base $\mathscr{F}$ puis écrire la matrice M' de φ dans la base $\mathscr{F}$.

g) Écrire la relation matricielle entre M et M' et retrouver les résultats de la question 1. c).

3. **Application à l'étude de trois suites numériques**

Considérons trois suites réelles u, v et w définies sur $\mathbb{N}$ qui vérifient les relations :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \left\{ \begin{array}{l} u_{n+1} = \dfrac{7u_n - 2v_n + w_n}{12}, \\[2mm] v_{n+1} = \dfrac{-u_n + 2v_n - w_n}{12}, \\[2mm] w_{n+1} = \dfrac{u_n - 2v_n + 7w_n}{12}. \end{array} \right.$$

a) Écrire un algorithme qui calcule, pour un entier naturel n donné, les valeurs de u_n, v_n et w_n.
Écrire ensuite un algorithme qui, pour un entier naturel n donné, calcule $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.

b) Montrer que, pour tout entier naturel n :

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}.$$

c) Déterminer, pour tout entier naturel n, une expression de A^n (on pensera à utiliser la réduction de la matrice A).
En déduire, pour tout entier naturel n, une expression de u_n, v_n et w_n en fonction de n et des réels u_0, v_0 et w_0.

d) Les suites u, v et w sont-elles convergentes ? Si oui, préciser leur limite respective.

Problème 2
Étude d'une application fonctionnelle

1. **Étude d'une fonction définie par une intégrale**

   Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}$.

   a) Pour tout réel non nul x, justifier l'existence de l'expression $\displaystyle\frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.

   Nous définissons alors la fonction g par

   $$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad g(x) = \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad g(0) = f(0).$$

   b) Justifier l'existence d'une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
   F étant l'une des primitives de f sur $\mathbb{R}$, exprimer, pour tout réel x non nul, $g(x)$ à l'aide de la fonction F.

   c) Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$.

   d) Montrer que g est paire.
   Que peut-on dire de plus sur g si f est impaire ? Le démontrer.

   Nous définissons l'application a de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad a(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}\cdot$$

   e) Montrer que $g(0) = a(0)$ et que, pour tout réel non nul x,

   $$g(x) = \frac{1}{x}\int_{0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t.$$

   f) Montrer maintenant que g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que :

   $$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad xg'(x) + g(x) = a(x).$$

   g) Dans cette question seulement, f est supposée dérivable en 0.
   Montrer qu'alors a est dérivable en 0.
   Puis, à l'aide du développement limité à l'ordre 1 en 0 de a, montrer que g est dérivable en 0 et préciser $g'(0)$.

   h) Dans cette question seulement, $f : x \longmapsto |x|$.
   Pour tout réel x strictement positif puis, pour tout réel x strictement négatif, calculer l'expression de $g(x)$.
   Montrer alors que g n'est pas dérivable en 0.

2. **Dans le cas où f « diminue les distances »**

   Dans cette question 2., f est une application définie sur $\mathbb{R}$ qui vérifie :

   $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad x \neq y \implies |f(x) - f(y)| < |x - y|.$$

   a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

   Nous pouvons alors associer à f la fonction g définie à la question 1.

   b) a désignant toujours l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad a(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2},$$

   montrer que, pour tout réel x :

   $$g(x) = \int_{0}^{1} a(xu)\,\mathrm{d}u.$$

c) Montrer que, pour tous réels distincts v et w :

$$|a(v) - a(w)| < |v - w|$$

puis en déduire que, pour tous réels distincts x et y :

$$|g(x) - g(y)| < |x - y|.$$

3. **Étude d'un endomorphisme de fonctions**

$\left(\mathscr{C}^0(\mathbb{R}), +, \cdot\right)$ désigne l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles muni des lois usuelles.

Nous allons maintenant nous intéresser à la fonction Φ qui, à toute fonction f appartenant à $\mathscr{C}^0(\mathbb{R})$, associe la fonction g définie à la question 1.

a) Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R})$.

b) Déterminer le noyau de Φ (on pourra utiliser la question 1. f))

c) Nous savons que l'application sin est continue sur $\mathbb{R}$ et impaire. Admet-elle un antécédent par Φ dans $\mathscr{C}^0(\mathbb{R})$?
Que peut-on en déduire sur la fonction Φ ?

d) Montrer que l'application $u : x \longmapsto |x - 1| + |x + 1|$, continue sur $\mathbb{R}$ et paire, n'admet pas d'antécédent par Φ dans $\mathscr{C}^0(\mathbb{R})$.

FIN

Correction de l'épreuve A

(durée : 3 h 30)

Problème 1

Soit A la matrice carrée d'ordre 3 à coefficients réels définie par $A = \dfrac{1}{12}\begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -4 & 8 & -4 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$.

1. a) *Déterminer les valeurs propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?*

On a

$$\begin{aligned}
\operatorname{rg}(A-\lambda I_3) &= \operatorname{rg}\big(12(A-\lambda I_3)\big)\\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 7-12\lambda & -2 & \boxed{1} \\ -4 & 8-12\lambda & -4 \\ 1 & -2 & 7-12\lambda \end{pmatrix}\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 7-12\lambda & -2 & \boxed{1} \\ 2-4\lambda & -\lambda & 0 \\ -4+14\lambda-12\lambda^2 & 1-2\lambda & 0 \end{pmatrix}\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftarrow (L_2+4L_1)/12 \\ L_3 \leftarrow \big(L_3-(7-12\lambda)L_1\big)/12 \end{array}
\end{aligned}$$

On distingue alors deux cas :
<u>Premier cas : $\lambda = 0$</u> On a

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 7 & -2 & \boxed{1} \\ \boxed{2} & 0 & 0 \\ -4 & \boxed{1} & 0 \end{pmatrix} = 3$$

<u>Second cas : $\lambda \neq 0$</u> On peut continuer la méthode du pivot en choisissant $-\lambda$ comme pivot, ce qui donne

$$\operatorname{rg}(A-\lambda I_3) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 7-12\lambda & -2 & \boxed{1} \\ 2-4\lambda & \boxed{-\lambda} & 0 \\ \ast & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow \big(-\lambda L_3-(1-2\lambda)L_2\big)/2 \end{array}$$

où

$$\ast = 6\lambda^3 - 11\lambda^2 + 6\lambda - 1 = 6(\lambda-1)\Big(\lambda-\frac{1}{2}\Big)\Big(\lambda-\frac{1}{3}\Big).$$

Donc

$$\operatorname{rg}(A-\lambda I_3) = \begin{cases} 2 & \text{si } \lambda \in \{1; 1/2; 1/3\}, \\ 3 & \text{sinon.} \end{cases}$$

<u>Bilan :</u> Comme $\lambda \in \operatorname{Sp}(A) \iff \operatorname{rg}(A-\lambda I_3) < 3$, on en déduit que

$$\boxed{\operatorname{Sp}(A) = \Big\{1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}\Big\}.}$$

La matrice carrée A étant d'ordre 3 et possédant 3 valeurs propres distinctes, on sait, d'après le cours, que les 3 sous-espaces propres associés sont de dimension 1 et que

$$\boxed{A \text{ est diagonalisable.}}$$

b) *Pour chaque valeur propre de A, déterminer une base du sous-espace propre associé. Les vecteurs seront choisis de troisième composante égale à 1.*

Déterminons $E_1(A) = \mathrm{Ker}(A - I_3)$. D'après la réduite de gauß déterminée à la question précédente, on a, pour $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$,

$$(A - I_3)X = 0 \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrl} -5x & - & 2y & + & \boxed{z} & = 0 \\ -2x & & \boxed{-y} & & & = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rl} x = & \lambda \\ y = & -2\lambda \\ z = & \lambda \end{array} \right. \quad (\lambda \in \mathbb{R}),$$

donc

$$\boxed{E_1(A) = \mathrm{Vect}\big((1, -2, 1)\big).}$$

Déterminons $E_{1/2}(A) = \mathrm{Ker}\,\big(A - (1/2)I_3\big)$. D'après la réduite de gauß déterminée à la question précédente, on a, pour $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$,

$$\Big(A - \frac{1}{2}I_3\Big)X = 0 \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrl} x & - & 2y & + & \boxed{z} & = 0 \\ & & \boxed{-\dfrac{1}{2}y} & & & = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rl} x = & \lambda \\ y = & 0 \\ z = & -\lambda \end{array} \right. \quad (\lambda \in \mathbb{R}),$$

donc

$$\boxed{E_{1/2}(A) = \mathrm{Vect}\big((-1, 0, 1)\big).}$$

Déterminons $E_1(A) = \mathrm{Ker}\,\big(A - (1/3)I_3\big)$. D'après la réduite de gauß déterminée à la question précédente, on a, pour $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$,

$$\Big(A - \frac{1}{3}I_3\Big)X = 0 \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrl} 3x & - & 2y & + & \boxed{z} & = 0 \\ \dfrac{2}{3}x & & \boxed{-\dfrac{1}{3}y} & & & = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rl} x = & \lambda \\ y = & 2\lambda \\ z = & \lambda \end{array} \right. \quad (\lambda \in \mathbb{R}),$$

donc

$$\boxed{E_{1/3}(A) = \mathrm{Vect}\big((1, 2, 1)\big).}$$

c) *En déduire une matrice R réelle et inversible telle que $R^{-1}AR = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$.*

On sait, d'après le cours que la matrice A se diagonalise sous la forme

$$A = R \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{3} \end{pmatrix} R^{-1}$$

où R désigne la matrice de passage de la base canonique vers la base de vecteurs propres, c'est-à-dire la matrice obtenue en juxtaposant (en colonne) les vecteurs des bases des sous-espaces propres, c'est-à-dire

$$\boxed{R = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.}$$

d) *Calculer R^{-1} (le détail des calculs figurera sur la copie).*

Soit X le vecteur colonne de coordonnées x, y, z et Y celui de coordonnées a, b, c. Alors

$$RX = Y \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl l} x & - & y & + & z & = & a & L_1 \\ -2x & & & + & 2z & = & b & L_2 \\ x & + & \boxed{y} & + & z & = & c & L_3 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl l} \boxed{2x} & & & + & 2z & = & a + c & L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ -2x & & & + & 2z & = & b & L_2 \\ x & + & \boxed{y} & + & z & = & c & L_3 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl l} \boxed{2x} & & & + & 2z & = & a + c & L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ & & & & \boxed{4z} & = & a + b + c & L_2 \leftarrow L_1 + L_2 \\ x & + & \boxed{y} & + & z & = & c & L_3 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} x = \frac{1}{4}a - \frac{1}{4}b + \frac{1}{4}c \\ y = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c \\ z = \frac{1}{4}a + \frac{1}{4}b + \frac{1}{4}c \end{array}\right.$$

$$\iff X = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} Y$$

donc, d'après le cours,

$$\boxed{R^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}.$$

2. *Rappelons que $\mathbb{R}_2[X]$ désigne l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.*

a) *Montrer que $\mathbb{R}_2[X]$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}[X], +, \cdot)$. Déterminer une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et en déduire sa dimension.*

Le polynôme nul est de degré $-\infty$ donc appartient à $\mathbb{R}_2[X]$. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$. Alors, d'après les règles sur les degrés, on a

$$\deg(\lambda P + \mu Q) \leqslant \max\{\deg(\lambda P); \deg(\mu Q)\} \leqslant \max\{\deg(P); \deg(Q)\} \leqslant 2,$$

donc $\lambda P + \mu Q \in \mathbb{R}_2[X]$. On a ainsi prouvé que

$$\boxed{\mathbb{R}_2[X] \text{ est un sous-espace vectoriel de } (\mathbb{R}[X], +, \cdot).}$$

Par ailleurs, on sait, d'après la définition des polynômes, que tout polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$ s'écrit, de manière unique, sous la forme $aX^2 + bX + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$. Cela signifie que

$$\boxed{\mathscr{B} = (1, X, X^2) \text{ est une base de } \mathbb{R}_2[X]}$$

et donc que

$$\boxed{\dim \mathbb{R}_2[X] = 3.}$$

b) *À tout élément P de $\mathbb{R}_2[X]$, nous associons la fonction P^* définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $P^*(x) = \frac{1}{x}\int_0^x P(t)\,\mathrm{d}t$ et $P^*(0) = P(0)$. Démontrer que P^* est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2.*

Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$ de sorte que $P(X) = aX^2 + bX + c$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$P^*(x) = \frac{1}{x}\int_0^x (at^2 + bt + c)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\Big[a\frac{t^3}{3} + b\frac{t^2}{2} + ct\Big]_0^x = \frac{a}{3}x^2 + \frac{b}{2}x + c$$

et

$$P^*(0) = P(0) = c.$$

Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P^*(x) = \frac{a}{3}x^2 + \frac{b}{2}x + c,$$

ce qui prouve bien que

$$\boxed{P^* \text{ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2.}}$$

c) *Nous définissons alors l'application $\varphi : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$ définie par $\varphi(P) = P^*$. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.*

Le résultat de la question précédente signifie que $\varphi(\mathbb{R}_2[X]) \subset \mathbb{R}_2[X]$. Reste donc à démontrer la linéarité de φ. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda P + \mu Q)(x) &= \frac{1}{x}\int_0^x \big(\lambda P(t) + \mu Q(t)\big)\,\mathrm{d}t \\
&= \lambda\frac{1}{x}\int_0^x P(t)\,\mathrm{d}t + \mu\frac{1}{x}\int_0^x Q(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \lambda\varphi(P)(x) + \mu\varphi(Q)(x)
\end{aligned}$$

et

$$\varphi(\lambda P + \mu Q)(0) = (\lambda P + \mu Q)(0) = \lambda P(0) + \mu Q(0) = \lambda\varphi(P)(0) + \mu\varphi(Q)(0),$$

d'où

$$\varphi(\lambda P + \mu Q) = \lambda\varphi(P) + \mu\varphi(Q).$$

En conclusion,

$$\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_2[X].}$$

d) *Calculer la matrice M de φ dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}_2[X]$ (les polynômes de $\mathscr{B}$ seront rangés par ordre de degré croissant).*

On a vu que, si $P(X) = aX^2 + bX + c$, alors $\varphi(P)(X) = \frac{a}{3}X^2 + \frac{b}{2}X + c$. Il s'ensuit que

$$\varphi(1) = 1, \qquad \varphi(X) = \frac{1}{2}X \qquad \text{et} \qquad \varphi(X^2) = \frac{1}{3}X^2$$

et donc que

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}}.$$

e) *Notons* $f_0 : x \longmapsto (x-1)^2$, $f_1 : x \longmapsto (x-1)(x+1)$ *et* $f_2 : x \longmapsto (x+1)^2$. *Montrer que* $\mathscr{F} = (f_0, f_1, f_2)$ *est une base de* $\mathbb{R}_2[X]$. *Soit* P *appartenant à* $\mathbb{R}_2[X]$. *En notant* (c_0, c_1, c_2) *la famille des composantes de* P *dans la base* $\mathscr{F}$, *exprimer* c_0, c_1 *et* c_2 *en fonction de* $P(1)$, $P(-1)$ *et* $P'(1)$.

La matrice de la famille (f_0, f_1, f_2) dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est donnée par

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 4R^{-1}.$$

Comme cette matrice est inversible (puisque c'est l'inverse de $(1/4)R$), on en déduit bien que

$$\boxed{\mathscr{F} = (f_0, f_1, f_2) \text{ est une base de } \mathbb{R}_2[X].}$$

Comme (c_0, c_1, c_2) est la famille des composantes de P dans la base $\mathscr{F}$, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) = c_0(x-1)^2 + c_1(x-1)(x+1) + c_2(x+1)^2.$$

En évaluant cette relation en 1 et -1, on obtient

$$P(1) = 4c_2 \qquad \text{et} \qquad P(-1) = 4c_0.$$

Par ailleurs, en dérivant, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P'(x) = 2c_0(x-1) + c_1(x+1) + c_1(x-1) + 2c_2(x+1),$$

ce qui donne, lorsqu'on fait $x = 1$,

$$P'(1) = 2c_1 + 4c_2.$$

On en déduit que

$$\boxed{c_0 = \frac{P(-1)}{4}, \qquad c_1 = \frac{P'(1) - P(1)}{2} \qquad \text{et} \qquad c_2 = \frac{P(1)}{4}.}$$

f) *Calculer* $\varphi(f_0)$, $\varphi(f_1)$, $\varphi(f_2)$ *dans la base* $\mathscr{F}$ *puis écrire la matrice* M' *de* φ *dans la base* $\mathscr{F}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$\varphi(f_0)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x (t-1)^2 \,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\left[\frac{(t-1)^3}{3}\right]_0^x = \frac{(x-1)^3+1}{3x} = \frac{1}{3}x^2 - x + 1,$$

donc, lorsque $P = f_0$, on obtient

$$c_0 = \frac{\varphi(f_0)(-1)}{4} = \frac{7}{12}, \qquad c_1 = \frac{\varphi(f_0)'(1) - \varphi(f_0)(1)}{2} = -\frac{1}{3}, \qquad c_2 = \frac{\varphi(f_0)(1)}{4} = \frac{1}{12}$$

ce qui donne

$$\boxed{\varphi(f_0) = \frac{7}{3}f_0 - \frac{1}{3}f_1 + \frac{1}{3}f_2.}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$\varphi(f_1)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x (t^2-1) \,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\left[\frac{t^3}{3} - t\right]_0^x = \frac{1}{3}x^2 - 1,$$

donc, lorsque $P = f_0$, on obtient

$$c_0 = \frac{\varphi(f_1)(-1)}{4} = -\frac{1}{6}, \qquad c_1 = \frac{\varphi(f_1)'(1) - \varphi(f_1)(1)}{2} = \frac{2}{3}, \qquad c_2 = \frac{\varphi(f_1)(1)}{4} = -\frac{1}{6}$$

ce qui donne

$$\boxed{\varphi(f_1) = -\frac{1}{6}f_0 + \frac{2}{3}f_1 - \frac{1}{6}f_2.}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$\varphi(f_2)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x (t+1)^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\left[\frac{(t+1)^3}{3}\right]_0^x = \frac{(x+1)^3-1}{3x} = \frac{1}{3}x^2 + x + 1,$$

donc, lorsque $P = f_0$, on obtient

$$c_0 = \frac{\varphi(f_2)(-1)}{4} = \frac{1}{12}, \qquad c_1 = \frac{\varphi(f_2)'(1) - \varphi(f_2)(1)}{2} = -\frac{1}{3}, \qquad c_2 = \frac{\varphi(f_2)(1)}{4} = \frac{7}{12}$$

ce qui donne

$$\boxed{\varphi(f_0) = \frac{1}{12}f_0 - \frac{1}{3}f_1 + \frac{7}{12}f_2.}$$

On en déduit que

$$M' = \begin{pmatrix} \frac{7}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{7}{12} \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -4 & 8 & -4 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire

$$\boxed{M' = A.}$$

g) *Écrire la relation matricielle liant M et M' et retrouver les résultats de la question 1. c).*

La relation de changement de bases nous dit que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) = P_{\mathscr{B}\mathscr{F}}\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{F}}(\varphi)\,P_{\mathscr{F}\mathscr{B}}$$

où $P_{\mathscr{F}\mathscr{B}}$ est la matrice de passage de la base canonique $\mathscr{F}$ vers la base $\mathscr{B}$ et $P_{\mathscr{B}\mathscr{F}} = {P_{\mathscr{F}\mathscr{B}}}^{-1}$ est la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ vers la base $\mathscr{F}$.
On sait que M représente φ dans la base $\mathscr{B}$ et $M' = A$ représente φ dans la base $\mathscr{F}$. Comme $f_0(X) = (X-1)^2 = X^2 - 2X + 1$, $f_1(X) = (X-1)(X+1) = X^2 - 1$ et $f_2(X) = (X+1)^2 = X^2 + 2X + 1$, on a

$$P_{\mathscr{B}\mathscr{F}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = R\cdot$$

On obtient donc

$$\boxed{M' = RMR^{-1}}$$

ce qui permet de retrouver la relation

$$\boxed{A = R\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}R^{-1} \qquad \text{où} \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot}$$

3. *Considérons trois suites réelles u, v et w définies sur $\mathbb{N}$ qui vérifient les relations :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{7u_n - 2v_n + w_n}{12}, \\ v_{n+1} = \dfrac{-u_n + 2v_n - w_n}{12}, \\ w_{n+1} = \dfrac{u_n - 2v_n + 7w_n}{12}. \end{cases}$$

a) *Écrire un algorithme qui calcule, pour un entier naturel n donné, les valeurs de u_n, v_n et w_n. Écrire ensuite un algorithme qui, pour un entier naturel n donné, calcule $u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.*

En SCILAB :

```
//   Calcul des n-èmes termes et de la somme
u = 1; v = 1; w = 1;    //   Initialisation (valeurs modifiables)
s = 0;    //   Initialisation de la somme
for i = 1 : n do
  U = (7 * u - 2 * v + w)/12;
  V = (-u + 2 * v - w)/12;
  W = (u - 2 * v + 7 * w)/12;
  u = U; v = V; w = W;
  s = s + u;
end
u, v, w, s,
```

b) *Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $\mathscr{P}(n)$: $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$.*

Procédons par récurrence.

Initialisation : $\mathscr{P}(0)$ est vraie car $A^0 = I_3$.

Hérédité : Fixons $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$. On a

$$A^{n+1}\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = AA^n\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 7u_n - 2v_n + w_n \\ -u_n + 2v_n - w_n \\ u_n - 2v_n + 7w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix},$$

où la deuxième égalité découle de l'hypothèse de récurrence et la dernière de la définition des suites. Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : Par récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}.}$$

c) *Déterminer, pour tout entier naturel n, une expression de A^n puis celles de u_n, v_n et w_n en fonction de n et de u_0, v_0 et w_0.*

Soit $n \in \mathbb{N}$. Nous avons vu que $A = RMR^{-1}$, donc

$$\begin{aligned} A^n &= \underbrace{(RMR^{-1})(RMR^{-1})\cdots(RMR^{-1})}_{n \text{ facteurs } RM'R^{-1}} \\ &= RM\underbrace{R^{-1}R}_{=I_3}M\underbrace{R^{-1}R}_{=I_3}MR^{-1}\cdots RM\underbrace{R^{-1}R}_{=I_3}MR^{-1} \\ &= RM^nR^{-1}. \end{aligned}$$

Or M étant diagonale, on démontre, à l'aide d'une récurrence immédiate, que

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{3^n} \end{pmatrix}$$

donc, en effectuant le calcul RM^nR^{-1}, on obtient

$$A^n = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1+\dfrac{1}{2^{n-1}}+\dfrac{1}{3^n} & \dfrac{1}{3^n}-1 & 1-\dfrac{1}{2^{n-1}}+\dfrac{1}{3^n} \\ \dfrac{2}{3^n}-2 & \dfrac{2}{3^n}+2 & \dfrac{2}{3^n}-2 \\ 1-\dfrac{1}{2^{n-1}}+\dfrac{1}{3^n} & \dfrac{1}{3^n}-1 & 1+\dfrac{1}{2^{n-1}}+\dfrac{1}{3^n} \end{pmatrix}.$$

Reste alors à multiplier cette matrice par le vecteur colonne ${}^t\begin{pmatrix} u_0 & v_0 & w_0 \end{pmatrix}$, pour obtenir les expresions de u_n, v_n et w_n, ce qui donne

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \left\{\begin{array}{l} u_n = \left(1+\dfrac{1}{2^{n-1}}+\dfrac{1}{3^n}\right)u_0 + \left(\dfrac{1}{3^n}-1\right)v_0 + \left(1-\dfrac{1}{2^{n-1}}+\dfrac{1}{3^n}\right)w_0 \\ v_n = \left(\dfrac{2}{3^n}-2\right)u_0 + \left(\dfrac{2}{3^n}+2\right)v_0 + \left(\dfrac{2}{3^n}-2\right)w_0 \\ w_n = \left(1-\dfrac{1}{2^{n-1}}+\dfrac{1}{3^n}\right)u_0 + \left(\dfrac{1}{3^n}-1\right)v_0 + \left(1+\dfrac{1}{2^{n-1}}+\dfrac{1}{3^n}\right)w_0 \end{array}\right.}$$

d) *Les suites u, v et w sont-elles convergentes ? Si oui, préciser leurs limites respectives.*

Les expressions précédentes nous permettent d'affirmer que

$$\boxed{\lim u_n = u_0 - v_0 + w_0, \qquad \lim v_n = -2(u_0 - v_0 + w_0), \qquad \lim w_n = u_0 - v_0 + w_0.}$$

Problème 2

1. *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Nous définissons la fonction g par $g(0) = f(0)$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ g(x) = \dfrac{1}{2x}\displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$. On considère également l'application a de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ a(x) = \{f(x) + f(-x)\}/2$.*

   a) *Pour tout réel non nul x, justifier l'existence de l'intégrale définissant g.*

   La quantité $\displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'intégrale d'une fonction continue, donc elle est définie. Ainsi,

   $$\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R}^*,\ \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ est définie.}}$$

   b) *Justifier l'existence de primitives de f sur $\mathbb{R}$. Exprimer, pour tout réel x non nul, $g(x)$ à l'aide de l'une de ces primitives F.*

   La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}$, le théorème de Darboux assure que

   $$\boxed{f \text{ admet des primitives sur } \mathbb{R}.}$$

   Si l'on note F l'une de ces primitives, on a clairement

   $$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad g(x) = \frac{F(x) - F(-x)}{2x}\cdot}$$

   c) *Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$.*

   L'expression de g sur $\mathbb{R}^*$ donnée à la question précédente permet de justifier la continuité de g sur $\mathbb{R}^*$ à l'aide des théorèmes généraux de continuité (somme et quotient de fonctions continues).
   Par ailleurs, on a

   $$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad g(x) = \frac{1}{2}\Big(\frac{F(x) - F(0)}{x - 0} - \frac{F(-x) - F(-0)}{x - 0}\Big),$$

   donc g s'écrit comme la moitié de la différence du taux d'accroissement en 0 de la fonction $x \longmapsto F(x)$ et du taux d'accroissement de la fonction $x \longmapsto F(-x)$. Comme F est dérivable sur $\mathbb{R}$ (pardi, c'est une primitive de f), on a

   $$\lim_{x \to 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = f(0) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{F(-x) - F(-0)}{x - 0} = -f(0),$$

   où la seconde limite découle du fait que la dérivée de $x \longmapsto F(-x)$ est $x \longmapsto -f(-x)$.
   Il s'ensuit que

   $$\lim_{x \to 0} g(x) = \frac{1}{2}\big(f(0) + f(0)\big) = f(0) = g(0),$$

   ce qui justifie la continuité de g en 0.
   En conclusion,

   $$\boxed{g \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

   d) *Montrer que g est paire sur $\mathbb{R}$. Que peut-on dire de plus sur g si f est impaire sur $\mathbb{R}$? Le démontrer.*

   La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$, qui est symétrique par rapport à 0. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a

   $$g(-x) = \frac{1}{2(-x)}\int_{x}^{-x} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = g(x),$$

   donc

   $$\boxed{g \text{ est paire sur } \mathbb{R}.}$$

Nous allons démontrer que, si f est impaire sur $\mathbb{R}$, alors g est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$. Tout d'abord, si f est impaire sur $\mathbb{R}$, on a $f(0) = 0$ donc $g(0) = f(0) = 0$. Par ailleurs, toujours sous la même hypothèse, le changement de variable $u = -t$ dans l'intégrale définissant g donne, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$g(x) = \frac{1}{2x}\int_x^{-x} f(-u)\,(-\mathrm{d}u) = \frac{1}{2x}\int_x^{-x} \big(-f(u)\big)\,(-\mathrm{d}u) = -\frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f(u)\,\mathrm{d}u = -g(x),$$

ce qui démontre que $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ g(x) = 0$. On a donc bien démontré que

$$\boxed{\text{si } f \text{ est impaire sur } \mathbb{R}, \text{ alors } g \text{ est la fonction nulle sur } \mathbb{R}.}$$

e) *Montrer que* $g(0) = a(0)$ *et que, pour tout réel non nul* x, $g(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x a(t)\,\mathrm{d}t$.

On a $a(0) = \{f(0) + f(-0)\}/2 = f(0) = g(0)$. Par ailleurs, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x}\int_0^x a(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{x}\int_0^x \frac{f(t)+f(-t)}{2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2x}\int_0^x f(-t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2x}\int_0^{-x} f(u)\,(-\mathrm{d}u) && \text{en posant } u = -t \text{ dans la seconde intégrale} \\
&= \frac{1}{2x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2x}\int_{-x}^{0} f(u)\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2x}\int_{-x}^x f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= g(x).
\end{aligned}$$

En conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x a(t)\,\mathrm{d}t & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ a(0) & \text{si } x = 0. \end{cases}}$$

f) *Montrer maintenant que* g *est dérivable sur* $\mathbb{R}^*$ *et que* $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ xg'(x) + g(x) = a(x)$.

La fonction a est continue sur $\mathbb{R}$ d'après les théorèmes généraux de continuité (somme et composée de fonctions continues). Par suite, a admet des primitives sur $\mathbb{R}$. Notons A la primitive de a sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0. Alors, d'après la question précédente, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$g(x) = \frac{A(x)}{x}\cdot$$

On constate donc, à l'aide des théorèmes généraux de dérivabilité (quotient de fonctions dérivables), que

$$\boxed{g \text{ est une fonction dérivable sur } \mathbb{R}^*.}$$

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$g'(x) = \frac{a(x)}{x} - \frac{A(x)}{x^2}$$

donc

$$xg'(x) + g(x) = a(x) - \frac{A(x)}{x} + \frac{A(x)}{x} = a(x).$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad xg'(x) + g(x) = a(x).}$$

g) *Dans cette question seulement, f est supposée dérivable en 0. Montrer qu'alors a est dérivable en 0. Puis, à l'aide du développement limité à l'ordre 1 en 0 de a, montrer que g est dérivable en 0 et préciser $g'(0)$.*

D'après les théorèmes généraux de dérivabilité (somme et composée de fonctions dérivable en 0), on peut affirmer que

$$\boxed{a \text{ est dérivable en } 0.}$$

De plus, on a

$$a'(0) = \frac{f'(0) - f'(-0)}{2} = 0.$$

Il s'ensuit que

$$a(x) = a(0) + a'(0)x + o_{x\to 0}(x) = f(0) + o_{x\to 0}(x).$$

En primitivant ce développement limité, on obtient

$$\int_0^x a(t)\,\mathrm{d}t = 0 + f(0)x + o_{x\to 0}(x^2),$$

et donc, d'après le résultat de la question e),

$$g(x) = f(0) + o_{x\to 0}(x).$$

On en déduit que

$$\boxed{g \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } g'(0) = 0.}$$

h) *Dans cette question seulement, $f : x \longmapsto |x|$. Pour tout réel x strictement positif puis, pour tout réel x strictement négatif, calculer l'expression de $g(x)$. Montrer alors que g n'est pas dérivable en 0.*

Pour $x > 0$, on a

$$g(x) = \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} |t|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2x}\int_{-x}^{0} (-t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2x}\int_0^x t\,\mathrm{d}t = \frac{x}{4} + \frac{x}{4} = \frac{x}{2},$$

donc, comme g est paire sur $\mathbb{R}$, on a

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad g(x) = \frac{|x|}{2}.}$$

On constate que g est dérivable à gauche de 0 avec $g'(0^-) = -1/2$ et que g est dérivable à droite de 0 avec $g'(0^+) = 1/2$. Comme $g'(0^-) \neq g'(0^+)$, on en déduit bien que

$$\boxed{g \text{ n'est pas dérivable en } 0.}$$

2. *Dans cette question, f vérifie $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \neq y \implies |f(x) - f(y)| < |x - y|$.*

a) *Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$. Nous pouvons alors associer à f la fonction g définie à la question 1.*

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. L'hypothèse dit que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\},\ |f(x) - f(x_0)| < |x - x_0|$. Or $\lim_{x\to x_0} |x - x_0| = 0$, donc $\lim_{x\to x_0} |f(x) - f(x_0)| = 0$ d'après le théorème des gendarmes, c'est-à-dire $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, ce qui justifie la continuité de f en x_0. Comme x_0 est quelconque dans $\mathbb{R}$, on en déduit bien que

$$\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

b) *Montrer que, pour tout réel x, on a $g(x) = \displaystyle\int_0^1 a(xu)\,\mathrm{d}u$.*

Si $x = 0$, on a

$$\int_0^1 a(0u)\,\mathrm{d}u = a(0)\int_0^1 \mathrm{d}u = a(0) = f(0) = g(0).$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{x}\int_0^x a(t)\,\mathrm{d}t && \text{d'après 1. e)} \\ &= \frac{1}{x}\int_0^1 a(xu)\,x\mathrm{d}u && \text{en posant } t = xu \\ &= \int_0^1 a(xu)\,\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

En définitive, on a

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g(x) = \int_0^1 a(xu)\,\mathrm{d}u.}$$

c) *Montrer que, pour tous réels distincts v et w, $|a(v) - a(w)| < |v - w|$ puis en déduire que, pour tous réels distincts x et y, $|g(x) - g(y)| < |x - y|$.*

Soient u, v deux nombres réels distincts. On a

$$\begin{aligned} |a(v) - a(w)| &= \Big|\frac{f(v) + f(-v)}{2} - \frac{f(w) + f(-w)}{2}\Big| \\ &= \frac{1}{2}|f(v) - f(w) + f(-w) - f(-v)| \\ &\leqslant \frac{1}{2}|f(v) - f(w)| + \frac{1}{2}|f(-w) - f(-v)| && \text{d'après l'inégalité triangulaire} \\ &< \underbrace{\frac{1}{2}|v - w| + \frac{1}{2}|-w - (-v)|}_{=|v-w|} && \text{par hypothèse,} \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\text{pour tous réels distincts } v \text{ et } w,\ |a(v) - a(w)| < |v - w|.}$$

Soient x, y deux nombres réels distincts. On a, d'après b),

$$\begin{aligned} |g(x) - g(y)| &= \Big|\int_0^1 \big(a(xu) - a(yu)\big)\,\mathrm{d}u\Big| \\ &\leqslant \int_0^1 |a(xu) - a(yu)|\,\mathrm{d}u && \text{d'après l'inégalité triangulaire} \\ &< \int_0^1 |xu - yu|\,\mathrm{d}u && \text{car } \forall u > 0,\ |a(xu) - a(yu)| < |xu - yu| \text{ (ce qui se passe en 0 importe peu).} \end{aligned}$$

Or

$$\int_0^1 |xu - yu|\,\mathrm{d}u = |x - y|\int_0^1 u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}|x - y| < |x - y|,$$

donc

$$\boxed{\text{pour tous réels distincts } x \text{ et } y, \text{ on a } |g(x) - g(y)| < |x - y|.}$$

Remarque : En fait, on a démontré un résultat plus fin : pour tous réels distincts x et y, on a $|g(x) - g(y)| < |x - y|/2$.

3. *Soit* $\left(\mathscr{C}^0(\mathbb{R}),+,.\right)$ *l'espace vectoriel des fonctions continues sur* $\mathbb{R}$ *à valeurs réelles muni des lois usuelles. Nous allons maintenant nous intéresser à la fonction* Φ *qui, à toute fonction* f *appartenant à* $\mathscr{C}^0(\mathbb{R})$*, associe la fonction* g *définie à la question 1.*

   a) *Montrer que* Φ *est un endomorphisme de* $\mathscr{C}^0(\mathbb{R})$*.*

   Nous avons vu que la continuité de f impliquait celle de g (d'après 1. c)), donc Φ est une application de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ vers $\mathscr{C}^0(\mathbb{R})$.
   Soient $f_1, f_2 \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Alors, si l'on note g_1 et g_2 les fonctions associées respectivement à f_1 et f_2 à la question 1, on a

   $$\Phi(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(0) = (\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2)(0) = \lambda_1 g_1(0) + \lambda_2 g_2(0) = \lambda_1 \Phi(f_1)(0) + \lambda_2 \Phi(f_2)(0)$$

   et, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

   $$\begin{aligned} \Phi(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x) &= (\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2)(x) \\ &= \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \lambda_1 \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f_1(t)\,\mathrm{d}t + \lambda_2 \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f_2(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \lambda_1 g_1(x) + \lambda_2 g_2(x) \\ &= \lambda_1 \Phi(f_1)(x) + \lambda_2 \Phi(f_2)(x). \end{aligned}$$

   On a donc démontré que $\Phi(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 \Phi(f_1) + \lambda_2 \Phi(f_2)$.
   En conclusion,

   $$\boxed{\Phi \text{ est un endomorphisme de } \mathscr{C}^0(\mathbb{R}).}$$

   b) *Déterminer le noyau de* Φ *(on pourra utiliser la question 1. f))*

   Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ telle que $f \in \operatorname{Ker}\Phi$, c'est-à-dire telle que $\Phi(f) = 0$. Si l'on note g la fonction associée respectivement à f à la question 1, on a donc $g = 0$. En utilisant le résultat de la question 1. f), on constate alors que la fonction a est nulle sur $\mathbb{R}^*$, c'est-à-dire $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(-x) = -f(x)$. Cela signifie donc que f est une fonction impaire sur $\mathbb{R}$. Réciproquement, si f est une fonction impaire sur $\mathbb{R}$, nous avons vu, à la question 1. d), que g est la fonction nulle et donc $f \in \operatorname{Ker}\Phi$. Ainsi,

   $$\boxed{\text{le noyau de } \Phi \text{ est l'ensemble des fonctions impaires sur } \mathbb{R}.}$$

   c) *Nous savons que l'application* sin *est continue et impaire sur* $\mathbb{R}$*. Admet-elle un antécédent par* Φ *dans* $\mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ *? Que peut-on en déduire sur la fonction* Φ *?*

   Si f désigne un élément de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R})$, nous avons vu, à la question 1. d), que la fonction g associée est paire sur $\mathbb{R}$. Cela signifie que l'image de Φ est contenue dans l'ensemble des fonctions paires sur $\mathbb{R}$. Comme la fonction sin n'est pas paire sur $\mathbb{R}$ (le fait qu'elle soit impaire, comme l'indique l'énoncé, ne sert à rien car le contraire d'impaire n'est pas paire !), elle ne peut pas admettre d'antécédent par Φ. Donc

   $$\boxed{\text{la fonction sin n'admet pas d'antécédent par } \Phi.}$$

   En particulier,

   $$\boxed{\Phi \text{ n'est pas surjective sur } \mathscr{C}^0(\mathbb{R}).}$$

   d) *Montrer que l'application* $u : x \longmapsto |x-1| + |x+1|$*, continue sur* $\mathbb{R}$ *et paire, n'admet pas d'antécédent par* Φ *dans* $\mathscr{C}^0(\mathbb{R})$*.*

   Si f désigne un élément de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R})$, nous avons vu, à la question 1. f), que la fonction g associée est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Comme la fonction $u : x \longmapsto |x-1| + |x+1|$ n'est pas dérivable en -1 et 1, elle ne peut pas admettre d'antécédent par Φ. Donc

   $$\boxed{\text{la fonction } u \text{ n'admet pas d'antécédent par } \Phi.}$$