Banque « Agro-Véto »
A - 0206

MATHÉMATIQUES A

Durée : 3 heures 30 minutes

L'usage d'une calculatrice est interdit pour cette épreuve. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les deux problèmes sont indépendants.

PROBLÈME I.

On note $\mathcal{B}$ la base canonique du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^4$ et *id* l'endomorphisme identité de $\mathbb{C}^4$.
On note $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$, respectivement $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, l'algèbre des matrices carrées d'ordre 4 à coefficients dans $\mathbb{C}$, respectivement dans $\mathbb{R}$.

On note I la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et J la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On note g l'endomorphisme de $\mathbb{C}^4$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ vaut J.

Pour tout quadruplet $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4$, on note M_A la matrice $M_A = \sum_{k=1}^{4} a_k J^{k-1}$

et f_A l'endomorphisme de $\mathbb{C}^4$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ vaut M_A.
On utilisera, sans chercher à le justifier, le fait que $\forall M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$, $M^0 = I$.

I. PREMIÈRE PARTIE.

I.1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 = 1$.

I.2. On note $Spec(g)$ l'ensemble des valeurs propres de g.

I.2.1. Montrer que $Spec(g) = \{1, i, -1, -i\}$.

I.2.2. Déterminer une base de chaque sous-espace propre associé formée de vecteur(s) dont la première coordonnée vaut 1.

I.2.3. g est-il diagonalisable ?

I.3. On considère un quadruplet $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4$.

I.3.1. Calculer les coefficients de M_A.

I.3.2. Montrer que f_A est combinaison linéaire de *id*, g, gog et $gogog$.

T.S.V.P.

I.3.3. Calculer l'image par f_A des vecteurs propres de g déterminés au I.2.2.

I.3.4. En déduire que l'endomorphisme f_A est diagonalisable et donner une matrice diagonale à laquelle M_A est semblable.

I.4. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on note $M(z)$ la matrice $M(z) = \begin{pmatrix} z & 1 & 1 & 1 \\ 1 & z & 1 & 1 \\ 1 & 1 & z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & z \end{pmatrix}$.

I.4.1. Déterminer les valeurs propres de $M(z)$.

I.4.2. Déterminer l'ensemble des complexes z pour lesquels la matrice $M(z)$ est inversible.

I.4.3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$.
Calculer $[M(1)]^k$ et $(M(z) - M(1))^k$ puis, en remarquant que $M(z) = (M(z) - M(1)) + M(1)$, en déduire une expression de $[M(z)]^n$ à l'aide de z, n, $M(1)$ et I.

I.5. Application.
1.5.1. Ecrire un algorithme fournissant le produit de deux matrices appartenant à $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. Combien d'opérations (additions et multiplications) sont-elles réalisées ?

1.5.2. Ecrire un algorithme fournissant la puissance n-ième d'une matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ utilisant l'algorithme précédent. Combien d'opérations (additions et multiplications) sont-elles réalisées ?

1.5.3. Soit z un réel, écrire un algorithme fournissant la puissance n-ième de $M(z)$ en utilisant la formule obtenue au I.4.3. Combien d'opérations (additions et multiplications) sont-elles réalisées ? On comptera $n-1$ produits si l'on effectue z^n.

II. DEUXIÈME PARTIE.

On note $\mathbb{R}_3[x]$ l'ensemble des fonctions polynômiales de degré inférieur ou égal à 3.

On note $\mathcal{E}_0$, $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{E}_3$ les fonctions polynômiales suivantes :

$$\mathcal{E}_0 : x \longmapsto 1,\ \mathcal{E}_1 : x \longmapsto x,\ \mathcal{E}_2 : x \longmapsto x^2,\ \mathcal{E}_3 : x \longmapsto x^3.$$

On rappelle que $\mathcal{B}_1 = (\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3)$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}_3[x]$.

Pour toute fonction polynômiale P, on note $h(P)$ l'application

$$x \longmapsto (1-x^2)[P'(0) - \frac{P'''(0)}{6} + x(\frac{P''(0)}{2} - P(0))].$$

II.1. Montrer que h est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[x]$.

II.2. Déterminer la matrice de h dans la base $\mathcal{B}_1$.

II.3. Déterminer l'ensemble des valeurs propres réelles de h.

II.4. Déterminer une base de l'image et du noyau de h.

PROBLÈME II.

Dans ce problème, a est un réel strictement positif et f désigne une fonction de la variable réelle définie sur l'intervalle $[0, a]$, à valeurs réelles, continue et strictement croissante sur $[0, a]$, dérivable dans l'intervalle $]0, a[$ et s'annulant en zéro. La fonction f est alors bijective de $[0, a]$ dans $[0, f(a)]$ et admet une réciproque, notée g.

La fonction g est caractérisée par

$$\forall x \in [0, a], \forall y \in [0, f(a)], y = f(x) \iff x = g(y).$$

On remarquera que g est continue sur l'intervalle $[0, f(a)]$ et strictement croissante sur cet intervalle.

1.1. Dans les deux premières questions, on montre que pour tout réel α tel que $0 \leqslant \alpha \leqslant a$:

$$(1) \qquad \int_0^{\alpha} f(x)dx + \int_0^{f(\alpha)} g(y)dy = \alpha f(\alpha).$$

1.1.1. Justifier que l'on a $g(0) = 0$.

1.1.2. Exemple : on prend $f(x) = x^p$ avec p réel strictement positif ; vérifier la relation (1).

1.2. Pour tout α réel vérifiant $0 \leqslant \alpha \leqslant a$, on note $\varphi(\alpha)$ la quantité :

$$\varphi(\alpha) = \int_0^{\alpha} f(x)dx + \int_0^{f(\alpha)} g(y)dy - \alpha f(\alpha).$$

1.2.1. Exprimer la fonction φ à l'aide de f et de primitives de f et g.

1.2.2. Déduire du 1.2.1. que la fonction φ ainsi définie est continue sur $[0, a]$.

1.2.3. Montrer que φ est dérivable sur $]0, a[$, de dérivée nulle sur $]0, a[$ et en déduire que φ est constante sur $[0, a]$.

1.2.4. Vérifier que $\varphi(0) = 0$ et en déduire l'égalité (1).

2.1 Dans cette question, on applique la formule précédente au calcul de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan(x)}dx$.

2.1.1. Soit $P(x) = x^4 + 1$. Montrer que $P(x) = (x^2 + x\sqrt{2} + 1)(x^2 - x\sqrt{2} + 1)$.
Pour la suite du problème, on admettra l'identité :

$$\frac{x^2}{x^4+1} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{x}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} - \frac{x}{x^2 + x\sqrt{2} + 1}\right).$$

T.S.V.P.

2.1.2. Montrer que
$$\int_0^1 \frac{x^2}{x^4+1}dx = \frac{\sqrt{2}}{4}\int_{-1}^1 \frac{x}{x^2 - x\sqrt{2}+1}dx.$$
Indication : on utilisera un changement de variable.

2.1.3. En déduire que
$$\int_0^1 \frac{x^2}{x^4+1}dx = \frac{\sqrt{2}}{8}\ln(3-2\sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}\,\pi}{8}.$$
Indication : on pourra utiliser le changement de variable $u = x\sqrt{2}-1$ ainsi que la formule valable pour tout réel x, strictement positif :
$$\mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}.$$

2.2. Dans cette question, f_0 désigne la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ par $f_0(x) = \sqrt{\tan(x)}$.

2.2.1. Montrer que f_0 est strictement croissante sur $[0, \frac{\pi}{4}]$, continue sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ et dérivable sur $]0, \frac{\pi}{4}[$. Justifier l'existence de la fonction f_0^{-1} et donner l'expression de cette fonction réciproque.

2.2.2. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{Arctan}(y^2)dy$ par intégration par parties.

2.2.3. En utilisant (1) et **2.2.2.** , donner la valeur de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan(x)}dx$.

3. Dans cette question, on revient au cas général.

α désigne un réel vérifiant $0 \leqslant \alpha \leqslant a$, et β un réel vérifiant $0 \leqslant \beta \leqslant f(a)$.

3.1. Montrer, en distinguant deux cas selon la position relative de β et de $f(\alpha)$ que
$$\int_{f(\alpha)}^{\beta} g(y)dy \geqslant \alpha(\beta - f(\alpha))$$
puis que
$$(2) \qquad \alpha\beta \leqslant \int_0^{\alpha} f(x)dx + \int_0^{\beta} g(y)dy.$$

3.2. Etudier dans l'intervalle $[0, f(a)]$ les variations de la fonction définie par
$$\forall t \in [0, f(a)],\ h(t) = \alpha t - \int_0^t g(y)dy.$$
Calculer la valeur de son maximum et retrouver ainsi la formule (2).

FIN.