Mathématiques A

(durée : 3 h 30)

L'usage d'une calculatrice est autorisé pour cette épreuve.
Les deux problèmes sont indépendants.

Problème 1

Dans ce problème, on note $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique $\big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\big)$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$. On note Id l'application identité de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même et O l'application nulle. Pour tout couple de nombres réels (a, b), on note $J(a, b)$ la matrice

$$J(a,b) = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Enfin, on note Φ l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même dont la matrice dans la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, on a

$$[J(a,b)]^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} & 0 \\ 0 & a^n & 0 \\ 0 & 0 & b^n \end{pmatrix}.$$

2. a) Montrer que $\Phi^3 + \Phi^2 - 5\Phi + 3\,\mathrm{Id} = O$.
   b) On note $\Pi(X)$ le polynôme $\Pi(X) = X^3 + X^2 - 5X + 3$. Montrer que $\Pi(X)$ possède une racine double que l'on explicitera.
   c) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathbb{R}^3$ un vecteur non nul tels que $\Phi(u) = \lambda u$. Montrer que $\Pi(\lambda) = 0$.
3. a) Donner une base du sous-espace vectoriel $\mathrm{Ker}(\Phi + 3\,\mathrm{Id})$ formée de vecteur(s) de dernière coordonnée sur la base $\mathcal{E}$ égale à 1.
   b) Donner une base du sous-espace vectoriel $\mathrm{Ker}(\Phi - \mathrm{Id})$ formée de vecteur(s) de dernière coordonnée sur la base $\mathcal{E}$ égale à 1.
   c) Φ est-elle diagonalisable ?
4. a) Déterminer $x \in \mathbb{R}^3$, de dernière coordonnée sur la base $\mathcal{E}$ égale à 1, vérifiant

$$\Phi(x) = x + \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_i.$$

   b) Donner une base du sous-espace vectoriel $E = \mathrm{Ker}([\Phi - \mathrm{Id}]^2)$ formée de vecteurs de dernière coordonnée sur la base $\mathcal{E}$ égale à 1.
   c) Montrer que $\Phi(E) \subset E$ et que $\mathbb{R}^3 = E \oplus \mathrm{Ker}(\Phi + 3\,\mathrm{Id})$.
5. a) Donner une base de $\mathbb{R}^3$, formée de vecteurs de dernière coordonnée sur la base $\mathcal{E}$ égale à 1, dans laquelle la matrice de Φ vaut $M' = J(1, -3)$.
   b) Exprimer, pour tout n entier naturel, la matrice M^n à l'aide de n, P, P^{-1} et M' puis calculer la première colonne de M^n. [1]

[1] Au début de l'épreuve, on a indiqué aux candidats que la question comporte un oubli : la question complète est : « Exprimer, pour tout n entier naturel, la matrice M^n à l'aide de n, M', P et P^{-1} où P est une matrice bien choisie. Calculer la première colonne de M^n. »

6. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite à valeurs réels définie par

$$u_0 = 0, \qquad u_1 = 0, \qquad u_2 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = -u_{n+1} + 5u_n - 3u_{n-1}.$$

   a) Élaborer un programme dans le langage de votre choix afin de calculer u_{15} (indiquer le langage choisi).
   b) Déduire du 6. a) une valeur exacte de u_{15}.
   c) Dans les trois dernières questions, on note $(U_n)_{n\geqslant 0}$ la suite de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées (u_{n+2}, u_{n+1}, u_n) dans la base $\mathcal{E}$. Montrer que, pour tout n entier naturel, $U_{n+1} = \Phi(U_n)$.
   d) En déduire que, pour tout n entier naturel, $U_n = \Phi^n(U_0)$ puis, à l'aide de 5. b), une expression de u_n.
   e) Vérifier pour $n = 15$ le résultat obtenu au 6. b) grâce à la méthode du 6. d).

Problème 2

Soit φ une application dérivable sur $\mathbb{R}_+$. On considère l'équation différentielle

$$(\mathcal{E}) \qquad (1 - \mathrm{e}^{-x})y'(x) + y(x) = \varphi(x).$$

Partie I. On note G et F les applications de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad G(x) = \int_0^x \mathrm{e}^t\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad F(x) = \frac{G(x)}{\mathrm{e}^x - 1}.$$

1. Montrer que G et F sont des applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. a) Déterminer le développement limité de G au voisinage de 0 à l'ordre 2. En déduire le développement de F au voisinage de 0 à l'ordre 1 : $F(x) = \varphi(0) + \dfrac{x}{2}\varphi'(0) + o(x)$.
   b) En déduire que F est prolongeable par continuité en 0. On notera encore F la fonction prolongée. Préciser $F(0)$. Montrer que F est dérivable en 0 et préciser $F'(0)$.
3. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle

$$(\mathcal{E}_0) \qquad (1 - \mathrm{e}^{-x})y'(x) + y(x) = 0.$$

   Indication : On pourra remarquer que $(\mathcal{E}_0)$ *est équivalente à* $y'(x) + \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1}y(x) = 0$.
4. Montrer que F vérifie $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
5. a) Exprimer la solution générale de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   b) Vérifier que F est l'unique solution de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}_+^*$ possédant une limite finie quand x tend vers 0.
6. La fonction F est-elle une solution de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}_+$?
7. On suppose, dans cette question, que l'application φ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
   a) Montrer que, pour tout x nombre réel strictement positif, on a $\varphi(x) \leqslant F(x)$. Ce résultat demeure-t-il pour $x = 0$?
   b) Déduire du I. 7. a) que F est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

Partie II. On suppose dans la suite du problème que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad \varphi(x) = \mathrm{e}^{-x}.$$

1. a) Déterminer explicitement $F(x)$.
   b) Donner un développement limité de F à l'ordre 2 au voisinage de 0.
   c) Dresser le tableau de variations de F sur $\mathbb{R}_+$.
2. On note Φ la primitive de F définie sur $\mathbb{R}_+$ et s'annulant en 0.
   a) Montrer que $\forall x \geqslant 4,\ x \leqslant \mathrm{e}^{x/2} - 1$ puis que $\forall x \geqslant 4,\ F(x) \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}^{x/2} - 1} \leqslant \mathrm{e}^{-x/2}$. En déduire que la fonction Φ est bornée sur $\mathbb{R}_+$.
   b) Étudier les variations de Φ sur $\mathbb{R}_+$. En déduire que $\Phi(x)$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$.

Partie III. Dans cette partie, A désigne la limite de $\Phi(x)$ quand x tend vers $+\infty$. On admettra le résultat suivant :

$$A = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\cdot$$

1. Montrer que, pour tout t nombre réel et pour tout n entier naturel non nul, on a

$$2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\big(\cos(t)+\cdots+\cos(nt)\big) = \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) - \sin\left(\frac{t}{2}\right)\cdot$$

2. Montrer qu'il existe deux nombres réels a et b tels que, pour tout entier naturel k,

$$\int_0^{\pi} (at+bt^2)\cos(kt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{k^2}\cdot$$

3. On considère la fonction $g : [0;\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall t \in [0;\pi]\,,\quad g(t) = \frac{at+bt^2}{\sin(t/2)} \qquad \text{et} \qquad g(0) = 2a.$$

   a) Montrer que la fonction g est continue sur $[0;\pi]$.
   b) Montrer que la fonction g est dérivable sur $]0;\pi]$ et donner $g'(t)$ pour $t \in\,]0;\pi]$.
   c) Vérifier que $g'(t)$ admet une limite finie quand t tend vers 0. En déduire que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;\pi]$.

4. Montrer que, pour toute fonction h de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;\pi]$, la suite

$$\int_0^{\pi} h(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\mathrm{d}t$$

   tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

5. Déduire de II et III que $A = \dfrac{\pi^2}{6}\cdot$

FIN

Remarques sur le problème 1 :
- À la question 1, il faut préciser que $a^0 = 1$ même lorsque a est nul.
- À la question 6, il faut lire $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+2} = -u_{n+1} + 5u_n - 3u_{n-1}$.

Remarques sur le problème 2 :
- À la question III. 2., la relation doit être vérifiée pour tout entier naturel **non nul**.
- À la question III. 5., il faut lire « Déduire des questions précédentes que $A = \pi^2/6$ » plutôt que « Déduire de II et III que $A = \pi^2/6$ » car le II ne sert à rien pour traiter la question.