Banque <<Agro>>
**A - 0204**

**MATHÉMATIQUES A**
**Durée : 3 heures 30 minutes**

**L'usage d'une calculatrice est autorisé pour cette épreuve.**

**Les deux problèmes sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.**

## I] Premier problème.

Dans ce problème, $E$ désigne l'ensemble des polynômes (ou fonctions polynômiales) à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2.
On rappelle qu'il s'agit d'un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ sa base canonique et $I_3$ la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Pour tout polynôme $P$ de $E$ on note P' son polynôme dérivé. Enfin, $f$ désigne l'application qui à tout polynôme $P$ de $E$ associe le polynôme : $Q = f(P)$ défini par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ Q(x) = (2x+1)P(x) - (x^2-1)P'(x).$$

I.1.a. Calculer $f(1)$, $f(X)$ et $f(X^2)$.

I.1.b. Montrer que f est une application linéaire de $E$ dans $E$.

I.2. Déterminer la matrice $A$ représentant $f$ dans la base $\mathcal{B}$.

I.3.a. Déterminer le noyau et l'image de $f$.

I.3.b. Déterminer les valeurs propres de la matrice $A$.
Indication : on pourra déterminer les noyaux de $(A - I_3)$, $(A + I_3)$ et $(A - 3I_3)$.

I.4.a. Montrer que la matrice $A$ est diagonalisable.

I.4.b. Déterminer une matrice $P$, inversible, telle que la matrice $P^{-1}AP$ soit diagonale.

**TSVP**

Notation : dans la suite du problème, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on note $(E_\lambda)$ l'équation différentielle

$$(2x+1-\lambda)y(x) - (x^2-1)y'(x) = 0.$$

I.5.a. Déterminer deux réels $\mu, \nu$ tels que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, on ait $\dfrac{2x+1-\lambda}{x^2-1} = \dfrac{\mu}{x-1} + \dfrac{\nu}{x+1}$.

I.5.b. Déterminer, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $(E_\lambda)$ sur chacun des intervalles : $]-\infty, -1[$, $]-1, 1[$ et $]1, +\infty[$.

I.5.c. Pour quelles valeurs de $\lambda$ toutes les solutions de $E_\lambda$ sont-elles polynômiales sur chacun des intervalles ci-dessus ? Peut-on retrouver ainsi les résultats de la question I.3.b. ?

## II] Deuxième problème.

Dans ce problème, pour tout $\lambda$ réel positif, on note

$$A(\lambda) = \int_0^{\pi/2} (\cos(x))^\lambda dx$$

et $[\lambda]$ la partie entière de $\lambda$, c'est à dire l'unique entier naturel défini par $[\lambda] \leqslant \lambda < [\lambda] + 1$.

II.1.a. Déterminer $A(0)$ et $A(1)$.

II.1.b. Montrer que la fonction $A$ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

II.1.c. Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel ; montrer que $A(n+2) = \dfrac{n+1}{n+2}A(n)$.

II.1.d. Déduire de ce qui précède que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a :

$$A(2p) = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2}$$

et donner une formule similaire pour $A(2p+1)$.

II.2.a. Montrer que pour tout $n$ entier naturel, vérifiant $n \geqslant 2$, on a :

$$1 \leqslant \frac{A(n-1)}{A(n)} \leqslant \frac{A(n-2)}{A(n)} \leqslant \frac{n}{n-1}.$$

En déduire la limite de $\dfrac{A(n-1)}{A(n)}$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

II.2.b. Montrer que la suite de terme général $nA(n)A(n-1)$ est constante pour $n \geqslant 1$ et déduire des questions précédentes que la suite de terme général $nA(n)^2$ converge vers $\frac{\pi}{2}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

II.3.a. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^+$, on note $n = [\lambda]$ sa partie entière. Montrer que $\dfrac{A(n+1)}{A(n)} \leqslant \dfrac{A(\lambda)}{A(n)} \leqslant 1$.

II.3.b. Déduire de la question précédente et de II.2.a. que les fonctions $\lambda \longmapsto A(\lambda)$ et $\lambda \longmapsto A([\lambda])$ sont équivalentes quand $\lambda$ tend vers $+\infty$.

II.3.c. Déduire du II.2.b. et du II.3.b. un équivalent simple de $A(\lambda)$ quand $\lambda$ tend vers $+\infty$.

II.4. Dans cette question on étudie la convergence de $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2}$.

II.4.a. Montrer que, pour tout entier naturel non nul p, on a :

$$\frac{1}{(p+1)^2} \leqslant \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \leqslant \frac{1}{p^2}.$$

II.4.b. Déduire des inégalités précédentes la convergence de la série de terme général $\dfrac{1}{p^2}$ et un majorant simple de sa somme.

II.4.c. A l'aide d'une intégration par parties montrer que, pour toute fonction $g$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, il existe un réel b tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \left| \int_0^1 g(x) \sin(2n\pi x) dx \right| \leqslant \frac{b}{n}.$$

II.4.d. Vérifier que pour tout $x \in ]0,1[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$2 \sum_{k=1}^{k=n} \cos(2k\pi x) = \operatorname{cotan}(\pi x) \sin(2n\pi x) + \cos(2n\pi x) - 1.$$

II.4.e. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $I_k = \displaystyle\int_0^1 \frac{x(x-1)}{2} \cos(2k\pi x) dx$.

On considère la fonction $f$ définie pour tout $x \in ]0,1[$ par $f(x) = \dfrac{x(x-1)}{2} \operatorname{cotan}(\pi x)$ et on admet que $f$ se prolonge par continuité en une fonction, toujours notée $f$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.
Calculer $I_k$ et montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \sum_{k=1}^{k=n} I_k = \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) \sin(2n\pi x) dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x(x-1)}{2} \cos(2n\pi x) dx - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x(x-1)}{2} dx.$$

**TSVP**

II.4.f. Déduire de l'égalité précédente la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

II.5.a. Dans la suite du problème on note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{n!e^n}$ et $\delta_n = \ln(\frac{v_{n+1}}{v_n})$.

Montrer, à l'aide d'un développement limité, l'existence d'une suite $\varepsilon_n$ de limite nulle, telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \delta_n = \frac{1}{12n^2} + \frac{\varepsilon_n}{n^2}.$$

II.5.b. Déduire de ce qui précède l'existence d'une constante $K$, strictement positive, et d'un entier $n_0$ tels que pour tout entier $n$, vérifiant $n > n_0$, on a : $0 < \delta_n < \frac{K}{n^2}$.

II.5.c. Déduire du II.5.b. que la série de terme général $\delta_n$ converge.

II.5.d. Déduire de ce qui précède que la suite de terme général $v_n$ converge vers une limite strictement positive.

II.5.e. Montrer qu'il existe un réel $k$, strictement positif, et une suite $\varepsilon_n$ de limite nulle tels que :

$$n! = kn^n e^{-n}\sqrt{n}(1+\varepsilon_n) \qquad \text{(formule de Stirling)}.$$

II.6. Montrer en utilisant II.1.d. et II.2.b. que $k = \sqrt{2\pi}$.

II.7. Application numérique :
II.7.a. Ecrire un programme simple (en français ou dans le langage de votre choix) permettant de calculer le coefficient binomial $C_{2n}^n$.

II.7.b. Donner un ordre de grandeur et les quatre premiers chiffres de l'écriture décimale du coefficient binomial $C_{2n}^n$ pour $n \in \{10, 50, 100\}$.

II.7.c. Déterminer la valeur approchée de $C_{2n}^n$ obtenue à l'aide de la formule de Stirling et comparer les valeurs précédentes aux valeurs approchées ainsi obtenues.

**FIN.**