Banque «Agro»
A et AE - 2003

MATHÉMATIQUES A

Durée : 3 heures 30 minutes

L'usage de la calculatrice ,d'abaques et de tables est interdit pour cette épreuve.
Les deux problèmes sont indépendants.
Dans le premier problème le graphe demandé à la question IV.1.4 sera tracé avec soin sur une feuille de papier millimetré.Les différentes parties de ce premier probléme traitent de façons indépendantes le même objet T,défini dans le préambule .

Premier Problème .

Dans ce probléme E désigne l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ .On appelle polynôme toute fonction polynômiale de $\mathbb{R}$ dans lui même :on note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes et, pour tout entier naturel d , on note par $\mathbb{R}_d[X]$ l'ensemble des polynômes de dergé inferieur ou égal à d.On rappelle que,par convention, le degré du polynôme nul est $-\infty$.

Pour tout élément f de E on note $T(f)$ l'application de $\mathbb{R}$ dans lui même définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, T(f)(x) = \int_{x-1}^{x+1} f(t)dt.$$

Premiére Partie : exemples. Soit ω un réel; on note f_ω l'application définie par :$\forall x \in \mathbb{R}, f_\omega(x) = e^{\omega w}$ et on note g l'application définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = x.\forall x \in [0,1]; \quad g(x) = 2 - x.\forall x \in [0,1]; \quad g(x) = 0\text{sinon}$$

I.1.Déterminer pour tout réel ω les fonctions $T(f_\omega), T(g)$. I.2. Soit $C = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère orthogonal du plan , $\mathcal{G}$ la courbe representative de g dans le repère C et Δ la droite d'équation $x = 1$ dans le repère C.
I.2.1. Montrer que Δ est un axe de symetrie de $\mathcal{G}$.
I.2.2. Tracer sommairement $\mathcal{G}'$ la courbe representative de $T(g)$ dans C.
I.2.3. Déterminer un axe de symétrie de $\mathcal{G}'$.
I.2.4. La fonction $T(g)$ est-elle de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$?
Deuxiéme partie : étude de T.
II.1. Montrer que, pour tout élément f de E ,l'application $T(f)$ appartient à E et est dérivable sur $\mathbb{R}$.Déterminer la dérivée de $T(f)$ et montrer que $T(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
II.2. On note T l'application de E dans lui même définie par $f \mapsto T(f)$.
II.2.1 Rappeler porquoi T est un endomorphisme de E .
II.2.2 T est-elle une application surjective .

II.3 On suppose que f est une application de E, bornée sur $\mathbb{R}$.
II.3.1 Montrer que $T(f)$ est egalement une application bornée sur R .
II.3.2 Montrer qu'il existe un réel K tel que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad |T(f)(x) - T(f)(y)| \leqslant K|x-y|.$$

II.4 Montrer que si f est une fonction périodique de E alors $T(f)$ est aussi une fonction périodique sur $\mathbb{R}$.
II.5 Déterminer la parité de $T(f)$ en fonction de celle de f .

Troisiéme partie : étude de restrictions.

III.1.soit ω un réel non nul ; on note $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ les fonctions de E définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi_1(x) = \cos(\omega x), \varphi_2(x) = \sin(\omega x), \varphi_3(x) = x\cos(\omega x), \varphi_4(x) = x\sin(\omega x)$$

On note F_ω le sous-espace vectoriel de E engendré par $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$.
III.1.1. On note $\mathcal{B} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base F_ω .
III.1.2. Calculer $T(\varphi_1), \ldots, T(\varphi_4)$ et en déduire que $T(F_\omega) \subset F_\omega$.
Dans la suite on note M_ω la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de la restriction T_ω de T à F_ω définie par :

$$T_\omega : \begin{array}{ccc} F_\omega & \longrightarrow & F_\omega \\ f & \longrightarrow & T(f) \end{array}$$

III.1.3. Déterminer le rang de M_ω selon la valeur de ω .
III.1.3. Déterminer le noyau de M_ω selon la valeur de ω .
III.1.3. L'endomorphisme T_ω est-il injectif ?

III.2. Soit (d,n) un couple d'entiers naturels non nuls ; on note ε_n le polynôme défini par
$\forall x \in \mathbb{R}, \varepsilon_n(x) = x^n$ et ε_0 la fonction constante égale à 1. On rappelle que $\mathcal{C} = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_d)$ est une base de $\mathbb{R}_d[X]$.
III.2.1. Montrer que $T(\mathbb{R}_d[X]) \subset \mathbb{R}_d[X]$.
Dans la suite on note par A_d la matrice dans la base $\mathcal{C}$ de la restriction, Θ_d, de T à $\mathbb{R}_d[X]$ définie par :

$$\Theta_d : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_d[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_d[X] \\ f & \longrightarrow & T(f) \end{array}$$

III.2.2. Déterminer A_3. Quelles sont ses valeurs propres ? Est-elle diagonalisable ?
III.2.3. Déterminer l'ensemble des valeurs propres de Θ_d .
III.2.4. Dans le cas où $d \geqslant 2$, l'endomorphisme Θ_d est-il diagonalisable ?
III.2.4. l'endomorphisme Θ_d est-il bijectif ?

III.3. Soit Θ la restriction de T à $\mathbb{R}[X]$ définie par :

$$\Theta : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ f & \longrightarrow & T(f) \end{array}$$

III.3.1. Montrer que Θ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
III.3.2. L'endomorphisme Θ est-il bijectif ?
III.3.3. On note h le polynôme $2\varepsilon_3 + 6\varepsilon_2 + 8\varepsilon_1 + 4\varepsilon_0$. Résoudre dans $\mathbb{R}[X]$ l'équation $\Theta(f) = h$.
Quatriéme partie : étude d'une transformée . On note g l'application définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \sqrt[3]{x(x^2-1)}$$

On rappelle que pour tout réel x on note $\sqrt[3]{x}$ l'unique réel dont le cube vaut x .
IV.1. Etude de la fonction g .
IV.1.1. Etudiér la continuité et la dérivabilité de la fonction g .
IV.1.2. Déterminer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition et donner son tableau de variation.
IV.1.3. Montrer que $\mathcal{G}_1$, courbe représentative de g admet une asymptote oblique dont on étudiera la position par rapport à la courbe $\mathcal{G}_1$ aux voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.
IV.1.4. Tracer avec soin la courbe représentative de g ainsi que son asymptote oblique .
IV.2. Etude de la fonction $T(g)$.
IV.2.1. Etudier la parité de $T(g)$.
IV.2.2. Déterminer les variations de $T(g)$.
IV.2.3. Calculer les valeurs $T(g)(0)$.

Deuxième problème : matrices de Toeplitz.

Dans ce probléme, on note de nouveau, $\mathbb{R}_d[X]$ l'ensemble des polynômes de dergé inferieur ou égal à d. On note ε_n le polynôme défini par $\forall x \in \mathbb{R}, \varepsilon_n(x) = x^n$ et ε_0 la fonction constante égale à 1. On note $S : \mathbb{R}_d[X] \longrightarrow \mathbb{R}_d[X]$ l'application définie par

$$\forall (a_0, a_1, \ldots, a_d) \in \mathbb{R}^{d+1}, S\left(\sum_{i=0}^{d} a_i\varepsilon_i\right) = \sum_{i=0}^{d-1} a_{i+1}\varepsilon_i$$

On note I_d l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}_d[X]$, et $\mathcal{L}(\mathbb{R}_d[X])$ l'espace vectoriel des endomorphisme de $\mathbb{R}_d[X]$. Enfin, on note $\mathcal{U}$ le sous-espace de $\mathcal{L}(\mathbb{R}_d[X])$ engendré par $(I_d, S, S^2, \ldots, S^d)$.

Première partie .

I.1. Montrer que S est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_d[X]$ et donner les images par S des vecteurs de la base $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_d)$.
I.2. Ecrire la matrice de S dans la base $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_d)$.
I.3. Ecrire la matrice de S^k dans la base $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_d)$ pour tout entier k compris entre 1 et d puis vérifier que $S^{d+1} = 0$.
I.4. Montrer que $(I_d, S, S^2, \ldots, S^d)$ est une famille libre de $\mathcal{L}(\mathbb{R}_d[X])$.

I.5. Vérifier qu'un élément $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_d[X])$ appartient à $\mathcal{U}$ si et seulement si sa matrice $B = (b_{i,j})$, dans la base $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_d)$, est triangulaire supérieure et vérifie $b_{i,j} = b_{0,j-i}$ pour tout couple d'entiers (i, j) tels que $0 \leqslant i \leqslant j \leqslant d$.

I.6. Dans cette question on suppose que $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_d[X])$ commute avec S ; montrer que

$$\forall k \in \{0, \ldots, d\}, u(\varepsilon_k) = S^{d-k}(u(\varepsilon_d)).$$

En déduire que $\mathcal{U}$ est l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{R}_d[X]$ qui commutent avec S .

Deuxième partie .

Dans cette partie $(\lambda_1, \ldots, \lambda_d)$ est un d-uplet de réels. On suppose que λ_1 est non nul et on note $u = \sum_{k=1}^{d} \lambda_k S^k$.

II.1. Déterminer u^{d+1} et montrer que $(I_d, u, u^2, \ldots, u^d)$ est une base de $\mathcal{U}$.

II.2. On note $e_d = \varepsilon_d$ et pour tout $k \in \{0, \ldots, d-1$, on note $e_k = u^{d-k}(e_d)$. Montrer que $(e_0, \ldots, e_d)$ constitue une base de $\mathbb{R}_d[X]$. Ecrire la matrice de u dans cette base .
