Banque <<Agro>>
A et AE - 0201

MATHÉMATIQUES
Épreuve A
Durée : 3 heures 30 minutes

L'usage de la calculatrice est interdit pour cette épreuve

Les deux problèmes sont totalement indépendants.

PROBLEME 1.

On note E l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On note D l'application définie sur E, et à valeurs dans E, qui à toute fonction f de E associe $D(f) = f'$, sa dérivée, ainsi que Id l'identité de E, vérifiant $Id(f) = f$ pour toute application f de E.
Dans la suite du problème α désigne un réel non nul et on note F_α l'ensemble des fonctions de E de la forme

$$x \to P(x)e^{\alpha x} + Q(x)e^{-\alpha x}$$

où P et Q sont des polynômes de degrés inférieurs ou égaux à 1.
On note id_α l'application identique sur F_α.

1.a. Montrer que F_α est un sous-espace vectoriel de E.

1.b. On considère les fonctions suivantes :

$$f_1 : x \to e^{\alpha x}, \qquad f_2 : x \to xe^{\alpha x}, \qquad f_3 : x \to e^{-\alpha x}, \qquad f_4 : x \to xe^{-\alpha x}.$$

Montrer que la famille $\mathcal{B}= (f_1, f_2, f_3, f_4)$ est une base de F_α.

2. On note D_α la restriction de D à F_α, c'est à dire l'application définie sur F_α, qui à toute fonction f de F_α associe $D_\alpha(f) = f'$, sa dérivée.

2.a. Montrer que D est un endomorphisme de E. Déterminer son noyau et son image.

2.b. Montrer que D_α est un endomorphisme de F_α.

2.c. Déterminer M_α, la matrice de D_α dans la base $\mathcal{B}$.

2.d. Montrer que la matrice M_α est inversible.

3. Soit λ un réel. Déterminer en fonction de λ le rang de l'endomorphisme $D_\alpha^2 - \lambda id_\alpha$.

4.a. Déterminer une base du noyau de $D_\alpha^2 - \alpha^2 id_\alpha$ et une base de l'image de $D_\alpha^2 - \alpha^2 id_\alpha$.

T.S.V.P.

4.b. Déduire de **4.a.** que :

pour tout f de F_α, on a l'égalité : $(D_\alpha^2 - \alpha^2 id_\alpha)^2(f) = 0$.

4.c. Montrer que $D_\alpha^4 - 2\alpha^2 D_\alpha^2 + \alpha^4 id_\alpha = 0$ et en déduire D_α^{-1}.

5.a. On se place désormais dans E. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :

$$y''(x) - \alpha^2 y(x) = 0.$$

5.b. Déterminer le noyau de $D^2 - \alpha^2 Id$.

5.c. Montrer que pour toute application f, appartenant au noyau de $(D^2 - \alpha^2 Id)^2$, il existe un couple de réels, (λ_1, λ_3), tel que $(D^2 - \alpha^2 Id)(f) = \lambda_1 f_1 + \lambda_3 f_3$, puis que l'application

$$g = f - \frac{\lambda_1}{2\alpha} f_2 + \frac{\lambda_3}{2\alpha} f_4$$

appartient au noyau de $D^2 - \alpha^2 Id$. En déduire le noyau de $(D^2 - \alpha^2 Id)^2$.

6. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :

$$y^{(4)}(x) - 2\alpha^2 y''(x) + \alpha^4 y(x) = 0.$$

où l'on note $y^{(4)}$ la dérivée quatrième de la fonction $x \to y(x)$.

7. Soit $\mathcal{E}$ l'équation différentielle définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$y^{(4)}(x) - 2y''(x) + y(x) = x^3 - 12x + 2.$$

7.a. Montrer que $\mathcal{E}$ possède une solution polynômiale et la déterminer. On notera par la suite f_0, cette solution polynômiale.

7.b. Soit f une solution de $\mathcal{E}$; montrer que $f - f_0$ est un élément du noyau de $(D^2 - Id)^2$ et en déduire l'ensemble des solutions de $\mathcal{E}$ sur $\mathbb{R}$.

PROBLEME 2.

Dans ce problème, n désigne un entier naturel, a un réel positif.

On note $u_n(a)$ l'intégrale

$$\frac{1}{n!}\int_0^a e^{-x} x^n dx$$

PARTIE 1.

1.1.a. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\forall a \in \mathbb{R}^+,\ u_n(a) = u_{n-1}(a) - \frac{e^{-a} a^n}{n!}$$

1.1.b. Calculer $u_0(a)$ et déterminer, si elle existe, $\lim\limits_{a \to +\infty} u_0(a)$.

1.1.c. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, la fonction $u_n(a)$ admet pour limite 1 quand a tend vers $+\infty$.
On posera pour tout n entier naturel, et pour tout a réel positif, $v_n(a) = 1 - u_n(a)$.
1.2. Montrer que pour tout a réel positif et pour tout n entier naturel :

$$v_{n+1}(a) - v_n(a) = \frac{e^{-a}a^{n+1}}{(n+1)!}; \qquad v_n(a) = e^{-a}\sum_{k=0}^{k=n}\frac{a^k}{k!}; \qquad v_n(a) - v_n(a+1) = \int_a^{a+1}\frac{e^{-x}x^n}{n!}dx$$

PARTIE 2.

Dans la suite du problème, on note pour tout n entier naturel, $w_n = v_n(n)$ et $t_n = u_n(n)$.

2.1. Justifier : $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n + t_n = 1$.

2.2.a. Etudier sur $\mathbb{R}^+$ les variations de la fonction $x \to x^n e^{-x}$.
2.2.b. Montrer que

$$\frac{1}{n!}\int_n^{n+1} e^{-x}x^n dx \geq \frac{(n+1)^n e^{-n-1}}{n!}.$$

2.3.a. Montrer que

$$w_n - w_{n+1} = -(v_{n+1}(n+1) - v_n(n+1)) + \int_n^{n+1}\frac{e^{-x}x^n}{n!}dx$$

2.3.b. Déduire de ce qui précède que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

2.3.c. Justifier l'existence de $L = \lim_{n\to+\infty} w_n$ et montrer que $L \in [0,1[$.

2.4. Montrer que la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel l vérifiant $l + L = 1$.

PARTIE 3.

Dans cette partie, on se propose de montrer que $L \geq \frac{1}{2}$. On considère la fonction f définie pour $x \in [0,1[$ par $f(x) = \ln\frac{1+x}{1-x} - 2x$.
Pour tout n entier naturel, et pour tout réel x, on note enfin $f_n(x) = x^n e^{-x}$

3.1.a. Montrer que pour tout $x \in]0,1[$, on a : $f(x) > 0$.

3.1.b. Montrer que pour tout n entier naturel non nul et pour tout x positif,

$$f_n(n+x) - f_n(n-x) \text{ a le même signe que } e^{-2x} - \left(\frac{1-\frac{x}{n}}{1+\frac{x}{n}}\right)^n.$$

3.1.c. Déduire de 3.1.a. et de 3.1.b. que pour tout $x \in [0,n]$, on a : $f_n(n+x) \geq f_n(n-x)$.
3.2.a. A l'aide de deux changements de variables, montrer que

$$\int_n^{2n} f_n(t)dt - \int_0^n f_n(t)dt = \int_0^n (f_n(u+n) - f_n(n-u))du.$$

3.2.b. Déduire des questions précédentes que

$$\int_n^{2n} f_n(t)dt \geq \int_0^n f_n(t)dt$$

puis que $w_n \geq t_n$ et enfin que $L \geq \frac{1}{2}$.

FIN