ÉPREUVE A

Durée : 3 h 30

L'usage d'une calculatrice est autorisé pour cette épreuve.

Les deux problèmes sont totalement indépendants.

PROBLEME 1

Les parties A et B sont largement indépendantes. Seule la question B.3.c. utilise les résultats de la partie A.

Rappel : on note $o(x^n)$ toute expression qui peut s'écrire sous la forme : $x^n \times \varepsilon(x)$, où ε une fonction qui tend vers 0 lorsque x tend vers 0.

Partie A. *Développement limité d'une fonction réciproque.*

Dans cette partie, n est un entier strictement supérieur à 1, f est une application bijective de I sur J, où I et J sont des intervalles contenant un intervalle ouvert centré en 0, qui vérifie : $f(0) = 0$. De plus, f admet en 0 un développement limité à l'ordre n, de la forme :

$$f(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + x^n \times \varepsilon(x)$$

où a_1 est un réel non nul et ε une fonction qui tend vers 0 lorsque x tend vers 0.

1. On pose : $\begin{cases} P(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \\ Q(x) = b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n \end{cases}$

où les $b_1, .., b_n$ sont des réels quelconques.

1.a. Calculer les coefficients des termes de degré 1 et 2 de $QoP(x)$.

1.b. On appelle c_i $(2 \leq i \leq n)$, le coefficient du terme de degré i de $QoP(x)$. Vérifier qu'il est de la forme :

$$c_i = \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{i,j} b_j + b_i a_1^i$$

où les $\alpha_{i,j}$ sont des réels dépendant des coefficients de P et qu'on ne cherchera pas à déterminer.

2.a. Montrer que l'on a pour tout i vérifiant $1 \leq i \leq n$:

$$[f(x)]^i = (a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n)^i + x^n \times \varepsilon_i(x)$$

où ε_i une fonction qui tend vers 0 lorsque x tend vers 0.

2.b. En déduire : $Q(f(x)) = Q(P(x)) + o(x^n)$

Puis : $Q(f(x)) = \sum_{i=1}^{n} c_i x^i + o(x^n)$

3. Pour x élément de I, on pose : $y = f(x)$.
3.a. Montrer que y^n est équivalent à $a_1^n x^n$ au voisinage de 0.

3.b. En déduire que $f^{-1}(y) - Q(y)$ est de la forme $o(x^n)$ si les $b_1, .., b_n$ sont solutions d'un système linéaire triangulaire dont les coefficients des termes de la diagonale sont non nuls.
3.c. Conclure que f^{-1} admet un développement limité à l'ordre n et donner une méthode de calcul de sa partie régulière.

Partie B.
Dans toute cette partie on note f l'application définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\exp(x^2) - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 & \end{cases}$$

1. Montrer que f est impaire et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f' garde un signe constant sur $\mathbb{R}$. On pourra pour cela étudier la fonction u qui, à tout t réel positif, associe :

$$u(t) = (2t - 1)\exp(t) + 1$$

En déduire l'existence d'une application réciproque de f, impaire.
3.a. Justifier l'existence d'un développement limité de f en 0 à tout ordre n.
3.b. Ecrire un développement limité de f en 0 à l'ordre 5.
3.c. En utilisant la partie A, donner un développement limité à l'ordre 5 de f^{-1} en 0.

PROBLEME II

Dans tout ce problème, A désigne la matrice :

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -6 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On lui associera l'endomorphisme f, relativement à la base canonique $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$.

Partie A. *Réduction de la matrice*

1. Montrer que A admet deux valeurs propres distinctes λ_1 et λ_2, avec : $\lambda_1 \geq \lambda_2$. Déterminer les vecteurs propres associés ε_1 et ε_2, dont la première composante est égale à 1. La matrice est-elle diagonalisable ?

2. F désigne ici le plan d'équation : ax + by + cz = 0 et on considère la matrice ligne (supposée **non nulle**) : $N = (a\ \ b\ \ c)$

2.a. Montrer que les vecteurs (x, y, z) dont l'image par f est élément de F vérifient la relation : $a'x + b'y + c'z = 0$
où on a posé : $(a'\ \ b'\ \ c') = N \times A$
En déduire qu'ils constituent un plan ou l'espace tout entier.

2.b. On dira que F est stable par f, si on a : $f(F) \subset F$. Montrer que, si F est stable par f, il existe un scalaire k tel que : $N \times A = k.\ N$

2.c. Déduire de ce qui précède que F est stable par f si et seulement si (a, b, c) est un vecteur propre de ${}^tA$.

2.d. Montrer qu'il existe deux plans vectoriels stables par f et les déterminer. En déduire l'existence d'un vecteur ε_3, dont la deuxième composante est égale à 1, tel que la matrice de f dans la base $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ soit :

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Déterminer la matrice de passage P correspondante et sa matrice inverse.

Partie B. *Résolution de l'équation* : (E) $M^2 = A$.

1. On dit d'une matrice réelle X carrée d'ordre 3 qu'elle commute avec A' si on a :
$$A' \times X = X \times A'$$
Montrer que X commute avec A' si et seulement si il existe un triplet de réels (α, β, γ) tels que :

$$X = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

2. A toute matrice carrée réelle M d'ordre 3, on associe :
$$M' = P^{-1} \times M \times P$$

2.a. Montrer que M est solution de (E) si et seulement si : (E') $M'^2 = A'$.

2.b. Vérifier que si M' est solution de (E'), alors M' commute avec A'.

2.c. En déduire que (E') admet 4 solutions que l'on explicitera, puis les solutions de (E) que l'on exprimera en fonction de P, de P^{-1} et des solutions de (E').