ecricome

CONCOURS D'ADMISSION 2011

1

Mathématiques

Option Scientifique

Mercredi 20 avril 2011 de 8h00 à 12h00

Durée : 4 heures

Candidats bénéficiant de la mesure "Tiers-temps" :
8h00 – 13h20

Aucun document n'est autorisé.
Aucun instrument de calcul n'est autorisé.

L'énoncé comporte 8 pages.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes – mais brèves – de leurs affirmations.

Tournez la page s.v.p.

Ecricome Option Scientifique sujet principal

EXERCICE 1.

Soit n un entier naturel non nul, on considère $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Pour tout entier naturel j, on note $P^{(j)}$ la dérivée j-ième de P.

On définit la famille de polynômes $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ par :

$$P_0(X) = 1 \text{ et } \forall k \in \{1,..,n\}, \quad P_k(X) = \frac{X(X-k)^{k-1}}{k!}.$$

1. (a) Prouver que la famille $(P_0, P_1, ..., P_n)$ est une base de E.

   (b) Montrer que pour tout entier k appartenant à $\{1,..,n\}$, on a :

   $$P_k'(X+1) = P_{k-1}(X)$$

   puis, pour tous les entiers k, j vérifiant $1 \leqslant j \leqslant k \leqslant n$, donner une relation entre $P_k^{(j)}(X)$ et $P_{k-j}(X-j)$.

   (c) Soit $P \in E$, justifier l'existence d'un $(n+1)$-uplet $(a_0, a_1, .., a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que :

   $$P = a_0P_0 + a_1P_1 + \cdots + a_nP_n = \sum_{k=0}^{n} a_kP_k$$

   puis établir que :

   $$\forall j \in \{0,1,..,n\}, \quad P^{(j)}(j) = a_j.$$

   Ainsi on a établi la relation :

   $$\forall P \in E, \quad P = \sum_{l=0}^{n} P^{(k)}(k)P_k.$$

2. On considère l'application u définie sur E par :

   $$\forall P \in E, \quad u(P)(X) = P'(X+1).$$

   (a) Etablir que u est un endomorphisme de E.

   (b) Ecrire la matrice A de l'endomorphisme u dans la base $(P_0, P_1, .., P_n)$ de E.

(c) Déterminer le rang de A ainsi que ses valeurs propres.

(d) La matrice A est-elle diagonalisable ? (*Une réponse argumentée est attendue*)

3. On définit sur $E \times E$ l'application $\langle .,. \rangle$ par :

$$\forall (P,Q) \in E \times E, \quad \langle P,Q \rangle = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(k) Q^{(k)}(k).$$

(a) Démontrer que $\langle .,. \rangle$ définit un produit scalaire sur E.

(b) Justifier que la famille $(P_0, P_1, ..., P_n)$ est une base orthonormale de E.

EXERCICE 2.

On considère :

- la fonction φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi(t) = \frac{\exp(t) - 1}{t} - t\left(\exp\left(\frac{1}{t}\right) - 1\right).$$

- la fonction ψ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad \psi(t) = t - \frac{1}{t} - \ln(t).$$

- U l'ouvert de $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$U =]0, +\infty[^2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad / \quad x > 0 \text{ et } y > 0\right\}.$$

- $f : U \to \mathbb{R}$ la fonction définie sur l'ouvert U et à valeurs réelles par :

$$\forall (x,y) \in U, \quad f(x,y) = x^y - y^x = \exp(y \ln(x)) - \exp(x \ln(y)).$$

où $\exp(s)$ désigne l'exponentielle du réel s c'est-à-dire que $\exp(s) = e^s$. On admet que f est de classe C^2 sur U.

L'objectif de cet exercice est de prouver que la fonction f n'admet aucun extremum sur U.

1. Etudier les variations de ψ sur $\mathbb{R}_+^*$, calculer $\psi(1)$ et préciser le signe de ψ.

Tournez la page s.v.p.

2. Prouver la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n-1}{n!}$ et calculer sa somme.

3. Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. Exprimer la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\psi(t^{n-1})}{n!}$ en fonction de $\varphi(t)$ et $\ln(t)$. *On admettra la convergence de cette série.*

4. Justifier que :
$$\forall t \in]0,1[, \quad \varphi(t) < \ln(t), \quad \forall t \in]1,+\infty[, \quad \varphi(t) > \ln(t).$$

5. Soit $(x,y) \in U$. Montrer que (x,y) est un point critique de f si et seulement si :
$$\begin{cases} x > 1, \quad y > 1; \\ \ln(x)\ln(y) = 1; \\ y^{x-1} = x^{y-1}\ln(x). \end{cases}.$$

6. Soit $(x,y) \in U$ un point critique de f. Justifier l'existence d'un réel $t \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :
$$\begin{cases} x = \exp(t), \quad y = \exp\left(\frac{1}{t}\right); \\ \varphi(t) = \ln(t). \end{cases}$$

7. Prouver que (e,e) est l'unique point critique de f.

8. En comparant les signes des fonctions $t \mapsto f(e, e+t)$ et $t \mapsto f(e+t, e)$, justifier que f n'admet aucun extremum sur U.

PROBLEME

La partie **I** consiste à justifier que les variables $Y_n = \max(X_1, .., X_n)$ et $Z_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{i}$ possèdent la même loi lorsque $(X_1, .., X_n)$ est une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant la même loi exponentielle de paramètre 1.

La partie **II** a pour objectif d'établir que, pour chaque variable aléatoire X possédant une densité f avec f continue sur $\mathbb{R}_+$ et f nulle sur $\mathbb{R}_-^*$, il n'existe aucune variable aléatoire Y à densité dérivable g sur $\mathbb{R}^*$, nulle sur $\mathbb{R}_-^*$ et vérifiant $g - g' = f$.

La partie **III** consistera à étudier les valeurs propres et vecteurs propres de l'application linéaire introduite à la partie **II.**.

Les parties **I, II** et **III** sont largement indépendantes.

PARTIE I. Etude des variables Y_n et Z_n.

Toutes les variables aléatoires considérées ici sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Soit X une variable aléatoire, rappelons que :

- F_X désigne sa fonction de répartition définie par : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_X(t) = P(X \leqslant t)$.
- X suit la loi exponentielle de paramètre $a \in]0, +\infty[$ si et seulement si sa fonction de répartition est définie par :

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0; \\ 1 - \exp(-at) & \text{si } t \geqslant 0. \end{cases}$$

où $\exp(y)$ désigne l'exponentielle du réel y c'est-à-dire que : $\exp(y) = e^y$.

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant la même loi exponentielle de paramètre 1. Pour tout entier naturel n non nul, on note Y_n et Z_n les deux variables aléatoires définies respectivement par :

$$\begin{aligned} Y_n &= \max(X_1, X_2, .., X_n) = \max_{1\leqslant i\leqslant n} X_i, \\ Z_n &= \frac{X_1}{1} + \frac{X_2}{2} + \cdots + \frac{X_n}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{i}. \end{aligned}$$

où $\max(X_1, .., X_n)$ désigne le maximum des valeurs de $X_1, .., X_n$.

Pour finir, on désigne par f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f_n(t) = 0 \text{ si } t < 0; \\ f_n(t) = n.\exp(-t)\left(1 - \exp(-t)\right)^{n-1} \text{ si } t \geqslant 0. \end{cases}$$

1. On considère un tableau X de nombres réels de taille 2011 (*c'est-à-dire «X = array[1...2011] of real»*) préalablement rempli.

   (a) Ecrire un programme en Pascal calculant et affichant les réels :

   $$\max(X[1], X[2]) \quad \text{et} \quad \max(X[1], X[2], X[3]).$$

Tournez la page s.v.p.

(b) Ecrire un programme en Pascal calculant et affichant le réel :

$$\max\left(X[1], X[2], .., X[2011]\right) = \max_{1\leqslant i\leqslant 2011}\left(X[i]\right).$$

2. (a) Pour tout réel t, exprimer le réel $F_{Y_n}(t)$ à l'aide des réels $F_{X_1}(t)$, ... , $F_{X_n}(t)$.

   (b) Pour tout réel t, donner alors l'expression de $F_{Y_n}(t)$ en fonction de n et t en distinguant le cas $t < 0$ et le cas $t \geqslant 0$.

   (c) Vérifier alors que la fonction f_n est une densité de probabilité de la variable aléatoire Y_n.

3. (a) Préciser la fonction de répartition de la variable aléatoire $\dfrac{X_{n+1}}{n+1}$.

   (b) Démontrer que $\dfrac{X_{n+1}}{n+1}$ est une variable aléatoire à densité et proposer une densité d_{n+1}.

4. Pour tout réel x, vérifier que : $\displaystyle\int_0^x n.\exp(nt)\left(1-\exp(-t)\right)^{n-1} dt = \left(\exp(x)-1\right)^n$.

5. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, Z_n est une variable aléatoire à densité dont f_n est une densité. **Indication** : *Pour l'hérédité, on remarquera que* $Z_{n+1} = Z_n + \dfrac{X_{n+1}}{n+1}$.

PARTIE II. Existence et unicité de la solution d'une équation différentielle.

On désigne par E l'ensemble des fonctions f continues de $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ telles que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f(t)|\, dt$ converge. On admet que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Pour toute fonction f appartenant à E, on considère l'équation différentielle

$$(\mathcal{D}_f) : y - y' = f$$

dont l'inconnue est la fonction $y : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}_+$. On fixe dans cette partie une fonction f appartenant à E. Pour tout réel positif x, on note :

$$k_f(x) = \exp(x)\int_x^{+\infty} \exp(-t)\, f(t)dt.$$

1. Soient φ, ψ deux fonctions appartenant à E, dérivables sur $\mathbb{R}_+$ et vérifiant l'équation $(\mathcal{D}_f)$. On introduit la fonction h définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad h(x) = (\varphi(x) - \psi(x)) \exp(-x)$$

   (a) Prouver que la fonction h est constante sur $\mathbb{R}_+$.

   (b) En utilisant le fait que la fonction $\varphi - \psi$ appartient à E, montrer que $\varphi = \psi$.

   Nous avons ainsi établi qu'il existe au plus une solution dans E à l'équation $(\mathcal{D}_f)$ lorsque $f \in E$.

2. Pour tout réel positif x, justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \exp(-t) f(t) dt$.

3. Etablir que la fonction $k_f : x \mapsto \exp(x) \displaystyle\int_x^{+\infty} \exp(-t)\, f(t) dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad k_f(x) - k_f'(x) = f(x).$$

4. On suppose uniquement dans cette question que f est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ c'est-à-dire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) \geqslant 0.$$

   (a) Vérifier les relations suivantes :

$$(\alpha) \ : \ \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad 0 \leqslant k_f(x) \leqslant \int_x^{+\infty} f(t) dt,$$

$$(\beta) \ : \ \forall A \in \mathbb{R}_+, \quad \int_0^A k_f(x) dx = k_f(A) - k_f(0) + \int_0^A f(x) dx$$

   (b) Prouver que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} k_f(x) dx$ converge et que :

$$\int_0^{+\infty} k_f(x) dx = \int_0^{+\infty} (1 - \exp(-x))\, f(x) dx.$$

Tournez la page s.v.p.

5. On revient au cas général où $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ prend des valeurs non nécessairement positives.

   Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} |k_f(x)|\, dx$ converge.

6. Soit X une variable aléatoire possédant une densité f avec f continue sur $\mathbb{R}_+$ et f nulle sur $\mathbb{R}_-^*$.

   Justifier qu'il n'existe aucune densité g dérivable sur $\mathbb{R}^*$, nulle sur $\mathbb{R}_-^*$ et vérifiant $g - g' = f$ sur $\mathbb{R}_+$.

PARTIE III. Etude de l'application $f \mapsto k_f$.

A la partie **II**, on a établi que si f appartient à E, il existe une unique fonction

$$k_f : x \mapsto \exp(x) \int_x^{+\infty} \exp(-t)\, f(t) dt$$

appartenant à E telle que :

$$k_f - k_f' = f.$$

On considère alors l'application φ définie sur E par :

$$\forall f \in E, \quad \varphi(f) = k_f.$$

1. Etablir que φ est un endomorphisme de E.

   Définition : *On dit que le réel λ est valeur propre de φ s'il existe une fonction f de E non identiquement nulle telle que $\varphi(f) = \lambda f$. On dit que f est un vecteur propre de φ associé à la valeur propre λ et on appelle sous-espace propre de φ associé à λ l'espace vectoriel*

   $$E_\lambda(\varphi) = \{f \in E \quad \textit{telle que} \quad \varphi(f) = \lambda f\}$$

   La suite de cette partie est consacrée à la détermination des valeurs propres et des vecteurs propres de φ.

2. Pour tout réel $a > 0$, on considère la fonction f_a définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

   $$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_a(x) = \exp(-ax).$$

   Vérifier que f_a appartient à E, que f_a est un vecteur propre de φ et préciser la valeur propre associée.

3. Soit λ une valeur propre de φ et $f \in E$ un vecteur propre associé à la valeur propre λ.

   (a) Montrer que λ est nécessairement non nul.

   (b) Etablir que f est dérivable et vérifie l'équation différentielle : $f' = \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) f$.

   (c) Pour tout réel positif x, donner l'expression de $f(x)$ en fonction de λ, x et d'une certaine constante.

   (d) Montrer que $\lambda \in]0, 1[$.

4. Préciser l'ensemble $\mathrm{Sp}(\varphi)$ des valeurs propres de φ et, pour chaque valeur propre λ de φ, proposer une base de l'espace propre $E_\lambda(\varphi)$.

■