ESPRIT GENERAL

Vérifier chez les candidats l'existence des bases nécessaires pour des études supérieures de management.
Apprécier l'aptitude à lire et comprendre un énoncé, choisir un outil adapté et l'appliquer (théorème...).
Apprécier le bon sens des candidats et la rigueur du raisonnement.

SUJETS

Deux exercices d'application des connaissances de base ;
Un problème faisant largement appel aux probabilités.

EVALUATION

Deux exercices de valeur sensiblement égale ;
12 à 14 points pour le problème.

EPREUVE 2008

Durée : 4 heures

Aucun document et instrument de calcul n'est autorisé.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

SUJET

1. Exercice

Soit $\vec{u}$ un vecteur **unitaire** de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées (a,b,c) dans la base canonique $\mathcal{B}=(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de $\mathbb{R}^3$. On a donc $a^2+b^2+c^2=1$.
On note p le projecteur orthogonal sur la droite $\mathcal{D}$ de vecteur directeur $\vec{u}$ et q le projecteur orthogonal sur $\mathcal{D}^\perp$.
Id désigne l'application identité de $\mathbb{R}^3$ et $\langle .\,,.\rangle$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Que vaut $p+q$?
2. Exprimer, pour $\vec{v}\in\mathbb{R}^3$, $p(\vec{v})$ à l'aide de $\langle\vec{v}\,,\,\vec{u}\rangle$ et de $\vec{u}$.
   Calculer alors $p(\vec{i})$, $p(\vec{j})$ et $p(\vec{k})$.
   En déduire les matrices P et Q de p et q dans la base $\mathcal{B}$.
3. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $M=\begin{pmatrix}0 & -c & b\\ c & 0 & -a\\ -b & a & 0\end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$.
   a. Montrer que :
   $$M^2=-Q.$$
   b. Calculer $f(\vec{u})$.
   En déduire que $rg(f)\leqslant 2$.
   Déterminer l'image et le noyau de f et les exprimer en fonction de $\mathcal{D}$.
   c. Déduire de la question précédente la valeur de $f\circ p$.
   Montrer alors que $X+X^3$ est un polynôme annulateur de f.
   d. Quelles sont les valeurs propres de f ?
   f est-il diagonalisable ?
4. Pour tout réel θ, on définit l'endomorphisme g_θ par :
   $$g_\theta=Id+(\sin\theta)f+(1-\cos\theta)f^2$$
   où $f^2=f\circ f$.
   a. Pour θ et θ' réels, calculer $g_\theta\circ g_{\theta'}$ et montrer qu'il se met sous la forme $g_{\theta''}$ avec θ'' réel.
   b. En déduire que, pour tout réel θ, g_θ est inversible et déterminer son inverse.

2. Exercice

On considère, pour $n\in\mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\text{pour tout } x\in\mathbb{R}^+,\quad f_n(x)=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+x}.$$

1. a. Montrer que, pour tout réel positif x, la série de terme général $f_n(x)$ est convergente. On note $F(x)$ sa somme.
   b. Calculer $F(0)$ et $F(1)$.

2. Montrer que, pour tout réel positif x, la série de terme général $f_n'(x)$ est convergente. On note $G(x)$ sa somme.

3. *Etude de la dérivabilité de F.*

   a. Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :
   $$\text{pour } t \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \varphi(t) = \frac{1}{t}.$$
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. A l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que :
   $$\text{pour tout } (x, x_0) \in [n, +\infty[^2, \quad |\varphi(x) - \varphi(x_0) - (x - x_0)\varphi'(x_0)| \leqslant \frac{(x - x_0)^2}{n^3}.$$

   b. En déduire, pour $x \in \mathbb{R}^+$ et $h \neq 0$ vérifiant $x + h \in \mathbb{R}^+$, la nature de la série de terme général $|f_n(x + h) - f_n(x) - hf_n'(x)|$.

   c. Montrer qu'il existe un réel K tel que, pour $x \in \mathbb{R}^+$ et $h \neq 0$ vérifiant $x + h \in \mathbb{R}^+$,
   $$\left| \frac{F(x + h) - F(x)}{h} - G(x) \right| \leqslant K\,|h|.$$

   d. En déduire que F est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et que $F' = G$.

4. *Recherche d'un équivalent en $+\infty$.*
   Soit $x \in \mathbb{R}^+$.

   a. Justifier que, pour $k \in \mathbb{N}^*$,
   $$f_{k+1}(x) \leqslant \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t + x}\right) dt \leqslant f_k(x).$$

   b. En déduire que, pour $n \geqslant 2$,
   $$\int_1^{n+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t + x}\right) dt \leqslant \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \leqslant \frac{x}{x + 1} + \int_1^{n} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t + x}\right) dt.$$

   c. En déduire que :
   $$\ln(1 + x) \leqslant F(x) \leqslant \frac{x}{x + 1} + \ln(1 + x).$$

   d. Déterminer un équivalent de $F(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

3. Problème

L'objet du problème est la présentation d'une méthode probabiliste de calcul d'une intégrale (méthode de Monte-Carlo) et de deux façons de l'améliorer.
Dans tout le problème, U désigne une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$, g une fonction continue sur $[0, 1]$ et on pose $J = \displaystyle\int_0^1 g(t)\,dt$.

L'espérance d'une variable aléatoire X sera notée $E(X)$ et sa variance $V(X)$ (si elles existent).
On admet que, pour tout entier naturel non nul n, si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires à densités, mutuellement indépendantes, alors des variables aléatoires de la forme $f_1(X_1), f_2(X_2), \ldots, f_n(X_n)$ où les f_i sont des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, distinctes ou non, sont également mutuellement indépendantes.

3.1. Méthode de Monte-Carlo.

1. a. Rappeler une densité de U.

   b. Justifier que la variable aléatoire $g(U)$ admet une espérance égale à J.

2. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que U.
   On suppose que $\sigma^2 = V(g(U)) \neq 0$ et on note pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} g(U_i)$.

   a. Justifier que la suite de variables aléatoires $\left(\dfrac{S_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers J.

   b. *Recherche d'un intervalle de confiance pour J.*

      i. Justifier que la suite de variables aléatoires $\left(\dfrac{\frac{S_n}{n} - J}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.

      ii. On considère pour " n suffisamment grand " que $\dfrac{\frac{S_n}{n} - J}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ suit une loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. On donne $\Phi(1,96) = 0,975$ où Φ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. Déterminer un intervalle de confiance pour J, au niveau de confiance 95%, faisant intervenir S_n.

3. *Application :*

   a. A l'aide du changement de variable $t = \sin u$, montrer que $\displaystyle\int_0^1 4\sqrt{1 - t^2}\,dt = \pi$.

   b. i. Ecrire, en langage Pascal, une fonction **G**, de paramètre **t**, qui pour une valeur t du paramètre renvoie la valeur $4\sqrt{1 - t^2}$.

      ii. On rappelle qu'en langage Pascal, la fonction **random** permet de simuler une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$.
      En utilisant le résultat de la question **3.1.2.** et la fonction **G**, les variables informatiques **J** de type **real** et **i,n** de type **integer** étant supposées définies, compléter le corps du programme principal suivant, de manière à ce qu'il calcule une valeur approchée de π.

```
begin
 randomize ;
 readln(n) ;
 J := 0 ;
 for i := 1 to n do ....
 ...........
 writeln (' une valeur approchée de pi est ', J ) ;
end.
```

3.2. Réduction de la variance par variables antithétiques.

1. Reconnaître la loi de $1-U$.
   On définit la variable aléatoire Y par $Y = \dfrac{1}{2}[g(U)+g(1-U)]$. Que vaut $E(Y)$?
2. On suppose g strictement croissante et on admet l'existence des espérances intervenant dans cette question.
   a. Justifier que, pour tout $(u,w) \in [0,1]^2$,
   $$(g(u)-g(w))\,(g(1-u)-g(1-w)) \leqslant 0.$$
   b. Soit W une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$, indépendante de U.
   Quel est le signe de $E\left[(g(U)-g(W))\,(g(1-U)-g(1-W))\right]$?
   En remarquant que $g(U)g(1-U)$ et $g(W)g(1-W)$ ont même espérance, en déduire que :
   $$E\left[g(U)g(1-U)\right] \leqslant \left(E\left[g(U)\right]\right)^2.$$
   On admet que l'on obtiendrait le même résultat pour g strictement décroissante.
   c. Montrer alors que, lorsque g est strictement monotone, $V(Y) \leqslant \dfrac{1}{2}V\left(g(U)\right)$.
3. Donner un nouvel intervalle de confiance pour J au niveau de confiance 95%, basé sur cette méthode.
   On note ℓ_n la longueur de l'intervalle de confiance obtenu dans la partie 3.1 pour une valeur fixée de n.
   Avec cette nouvelle méthode, combien de tirages N de la variable aléatoire uniforme suffit-il de faire pour obtenir la même longueur ℓ_n d'intervalle de confiance ?

3.3. Réduction de la variance par stratification.

3.3.1. Etude d'une fonction de plusieurs variables.

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[^3$ par :

$$\text{pour tout } (x_1,x_2,x_3) \in]0,+\infty[^3, \quad f(x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{4x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{9x_3}.$$

1. Justifier que f est de classe C^2 sur $]0,+\infty[^3$. Calculer ses dérivées partielles d'ordre 1 et 2.
2. On note :
   $$\nabla^2 f(A) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(A)\right]_{1\leqslant i,j\leqslant 3}$$
   la matrice hessienne de f en $A=(a_1,a_2,a_3)$.
   Justifier que, pour tout $A \in]0,+\infty[^3$, pour toute matrice colonne H à trois lignes, non nulle, on a :
   $${}^tH\,\nabla^2 f(A) H > 0.$$
3. f admet-elle des extremums sur $]0,+\infty[^3$?
4. On cherche désormais les extremums de f sous la contrainte $x_1+x_2+x_3=110$.
   Montrer que f admet un unique point critique sous cette contrainte, que l'on déterminera.

3.3.2. Méthode de stratification.

Soit a et b deux réels tels que $0<a<b<1$. On définit les trois intervalles I_1, I_2 et I_3 par

$$I_1=[0,a[, \quad I_2=[a,b[, \quad I_3=[b,1],$$

et on considère quatre variables aléatoires indépendantes U_1,U_2,U_3 et T, de lois uniformes respectivement sur I_1,I_2,I_3 et $[0,1]$.
On définit la variable aléatoire $\widetilde{U}$ par $\widetilde{U} = U_1 1_{[T\in I_1]} + U_2 1_{[T\in I_2]} + U_3 1_{[T\in I_3]}$ où 1_A désigne la fonction indicatrice d'un événement A. $\widetilde{U}$ est donc la variable aléatoire définie, pour tout élément ω de l'univers Ω par :

$$\widetilde{U}(\omega) = \begin{cases} U_1(\omega) \text{ si } T(\omega)\in I_1 \\ U_2(\omega) \text{ si } T(\omega)\in I_2 \\ U_3(\omega) \text{ si } T(\omega)\in I_3 \end{cases}$$

1. A l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que pour tout réel x,
   $$P(g(\widetilde{U})\leqslant x) = aP(g(U_1)\leqslant x)+(b-a)P(g(U_2)\leqslant x)+(1-b)P(g(U_3)\leqslant x).$$
   En admettant que $g(U_1),g(U_2),g(U_3)$ sont des variables aléatoires à densité, montrer que $g(\widetilde{U})$ est elle-même une variable aléatoire à densité et en déterminer une densité $f_{g(\widetilde{U})}$ en fonction de densités de $g(U_1),g(U_2),g(U_3)$, que l'on pourra noter $f_{g(U_1)}, f_{g(U_2)}$ et $f_{g(U_3)}$.
   Vérifier, en prenant la fonction identité pour g, que $\widetilde{U}$ suit une loi uniforme sur $[0,1]$.
2. Déduire de ce qui précède que :
   $$E\left(g(\widetilde{U})\right) = aE\left(g(U_1)\right)+(b-a)E\left(g(U_2)\right)+(1-b)E\left(g(U_3)\right).$$
3. On tire de façon indépendante, uniforme sur chacun des intervalles, n_1 points dans I_1, n_2 points dans I_2, n_3 points dans I_3. On considère donc la famille de variables aléatoires indépendantes $(U_{1,1},\ldots,U_{1,n_1},U_{2,1},\ldots,U_{2,n_2},U_{3,1},\ldots,U_{3,n_3})$ telles que :
   - $U_{1,1},\ldots,U_{1,n_1}$ ont même loi que U_1,
   - $U_{2,1},\ldots,U_{2,n_2}$ ont même loi que U_2,
   - $U_{3,1},\ldots,U_{3,n_3}$ ont même loi que U_3,

   et on note Z la variable aléatoire définie par :
   $$Z = a\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} g(U_{1,i}) + (b-a)\frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2} g(U_{2,j}) + (1-b)\frac{1}{n_3}\sum_{k=1}^{n_3} g(U_{3,k}).$$
   Montrer que :
   $$V(Z) = a^2\frac{1}{n_1}V\left(g(U_1)\right)+(b-a)^2\frac{1}{n_2}V\left(g(U_2)\right)+(1-b)^2\frac{1}{n_3}V\left(g(U_3)\right).$$
4. *Application numérique :*
   On suppose que, pour un certain choix de la fonction g et des réels a et b, on a
   $$a^2V\left(g(U_1)\right)=\frac{1}{4}, \quad (b-a)^2V\left(g(U_2)\right)=1, \quad (1-b)^2V\left(g(U_3)\right)=\frac{1}{9}.$$

On suppose que l'on tire 110 points, de façon indépendante, uniforme sur chacun des intervalles (n_1 points dans I_1, n_2 points dans I_2, n_3 points dans I_3). Quelles valeurs faut-il donner à n_1, n_2, n_3 pour que $E(Z)$ fournisse une estimation de J avec le plus petit risque d'erreur possible suivant cette méthode ?

CORRIGE

Exercice 1

1. $\boxed{p+q=Id}$ car $\mathcal{D} \oplus \mathcal{D}^{\perp} = \mathbb{R}^3$.
2. $\boxed{p(\vec{v}) = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle \vec{u}}$ car $\vec{u}$ est un vecteur directeur unitaire de $\mathcal{D}$. On en déduit que :
   $p(\vec{i}) = \langle (1,0,0), (a,b,c) \rangle \vec{u} = a\vec{u} = \underline{a^2\vec{i} + ab\vec{j} + ac\vec{k} = p(\vec{i})}$,
   $p(\vec{j}) = \langle (0,1,0), (a,b,c) \rangle \vec{u} = b\vec{u} = \underline{ab\vec{i} + b^2\vec{j} + bc\vec{k} = p(\vec{j})}$,
   $p(\vec{k}) = \langle (0,0,1), (a,b,c) \rangle \vec{u} = c\vec{u} = \underline{ac\vec{i} + bc\vec{j} + c^2\vec{k} = p(\vec{k})}$, et finalement,
   $$\boxed{P = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix} \text{ et } Q = \begin{pmatrix} 1-a^2 & -ab & -ac \\ -ab & 1-b^2 & -bc \\ -ac & -bc & 1-c^2 \end{pmatrix}}.$$
3. (a) $M^2 = \begin{pmatrix} -c^2-b^2 & ab & ac \\ ab & -c^2-a^2 & bc \\ ac & bc & -b^2-a^2 \end{pmatrix} = -Q$ car $a^2+b^2+c^2 = 1$, soit $\underline{M^2 + Q = O_3}$.

   (b) $M \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ soit $\boxed{f(\vec{u}) = \vec{0}}$.
   On a donc $\vec{u} \in Ker(f)$ avec $\vec{u} \neq \vec{0}$, donc $dim\, Ker(f) \geqslant 1$. Par le théorème du rang, $rg(f) = 3 - dim\, Ker(f)$, d'où $\boxed{rg(f) \leqslant 2}$.
   Les deux premières colonnes de M forment une famille libre car elles ne sont pas colinéaires, d'où $rg(f) = 2$ et $Im(f) = Vect(\begin{pmatrix} 0 \\ c \\ -b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -c \\ 0 \\ a \end{pmatrix})$.
   Or $\langle \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ -b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \rangle = 0$ et $\langle \begin{pmatrix} -c \\ 0 \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \rangle = 0$, donc $Im(f) \subset \mathcal{D}^{\perp}$, et par égalité des dimensions, $\boxed{Im(f) = \mathcal{D}^{\perp}}$.
   On a alors $dim\, Ker(f) = 1$ et comme $\vec{u} \in Ker(f)$, on obtient $\boxed{Ker(f) = \mathcal{D}}$.

   (c) $Im(p) = \mathcal{D} = Ker(f)$ d'où $\underline{f \circ p \text{ est l'application nulle}}$.
   On a donc $MP = O_3$. Or $MP = M(I_3 - Q) = M(I_3 + M^2) = M + M^3$, on en déduit donc que $\underline{X + X^3 \text{ est un polynôme annulateur de } M \text{ donc de } f}$.

   (d) Les valeurs propres possibles de f sont les réels qui sont racines du polynôme annulateur $X + X^3 = X(1+X^2)$. Il n'y a donc que 0 comme valeur propre possible.
   Or 0 est valeur propre de f car $Ker(f) \neq \{\vec{0}\}$ et donc $\underline{f \text{ admet 0 pour unique valeur propre}}$.
   $\underline{f \text{ n'est pas diagonalisable}}$ car $dimKer(f) = 1 \neq dim\mathbb{R}^3$.
4. (a)
   $$g_\theta \circ g_{\theta'} = (Id + (\sin\theta)f + (1-\cos\theta)f^2) \circ (Id + (\sin\theta')f + (1-\cos\theta')f^2)$$
   En développant et en utilisant les égalités $f^3 = -f$ et $f^4 = -f^2$, on obtient
   $$g_\theta \circ g_{\theta'} = Id + (\sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta')f + (1 + \sin\theta\sin\theta' - \cos\theta\cos\theta')f^2.$$

Or $\sin(\theta+\theta') = \sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta'$ et $\cos(\theta+\theta') = \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta'$, d'où $\boxed{g_\theta \circ g_{\theta'} = g_{\theta+\theta'}}$, (soit $\theta'' = \theta + \theta'$).

(b) $\sin 0 = 0$ et $\cos 0 = 1$ d'où $g_0 = Id$ soit $g_\theta \circ g_{-\theta} = Id$.
On en déduit que $\underline{g_\theta \text{ est inversible (ou bijectif)}}$ et que $\underline{g_\theta^{-1} = g_{-\theta}}$.

Exercice 2

1. (a) $f_n(x) = \dfrac{x}{n(n+x)}$
   si $\underline{x=0}$, $f_n(0) = 0$ et $\underline{\sum f_n(0) \text{ converge}}$,
   si $\underline{x>0}$, $f_n(x) \sim \dfrac{x}{n^2}$ quand n tend vers $+\infty$, or $\dfrac{x}{n^2} \geqslant 0$ et $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann), donc, par théorème de comparaison (équivalent) pour les séries à terme général positif, on en déduit que $\underline{\sum f_n(x) \text{ converge}}$.

   (b) $\boxed{F(0) = 0}$.
   $F(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$, or $\sum_{n=1}^{p} (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{p+1}$ admet 1 pour limite quand p tend vers $+\infty$. D'où $\boxed{F(1) = 1}$.
2. $f'_n(x) = \dfrac{1}{(n+x)^2} \sim \dfrac{1}{n^2} \geqslant 0$ quand n tend vers $+\infty$, donc, comme en 1.a. on en déduit que $\underline{\sum f'_n(x) \text{ converge}}$.
3. (a) En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange sur l'intervalle $[x,x_0]$ (ou $[x_0,x]$ suivant les positions relatives de x et x_0), on en déduit que
   $$|\varphi(x) - \varphi(x_0) - (x-x_0)\varphi'(x_0)| \leqslant \sup_{t \in [x,x_0] (\text{ou } [x_0,x])} |\varphi''(t)| \times \frac{(x-x_0)^2}{2}.$$
   Or $\varphi'(t) = \dfrac{-1}{t^2}$, $\varphi''(t) = \dfrac{2}{t^3}$ et pour $t \geqslant n$ on a $t^3 \geqslant n^3$ et donc $|\varphi''(t)| \leqslant \dfrac{2}{n^3}$; comme $(x,x_0) \in [n, +\infty[^2$ on obtient
   $$\underline{|\varphi(x) - \varphi(x_0) - (x-x_0)\varphi'(x_0)| \leqslant \frac{(x-x_0)^2}{n^3}}.$$

   (b)
   $$\begin{aligned} \underline{|f_n(x+h) - f_n(x) - hf'_n(x)|} &= \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x+h} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+x} - h\frac{1}{(n+x)^2}\right| \\ &= \left|\frac{1}{n+x+h} - \frac{1}{n+x} - h\frac{-1}{(n+x)^2}\right| \\ &= |\varphi(n+x+h) - \varphi(n+x) - h\varphi'(n+x)| \\ &\underline{\leqslant \frac{h^2}{n^3}}. \end{aligned}$$

(On applique le résultat précédent avec $n+x+h \geqslant n$ et $n+x \geqslant n$, car $x+h \geqslant 0$ et $x \geqslant 0$.)
La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^3}$ converge, donc par théorème de comparaison (inégalité) pour les séries à terme général positif , on en déduit que
la série de terme général $|f_n(x+h) - f_n(x) - hf_n'(x)|$ est convergente.

(c) Pour $x \in \mathbb{R}_+$ et $h \neq 0$ vérifiant $x+h \in \mathbb{R}_+$, on a

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - G(x)\right| = \left|\frac{1}{h}\sum_{n=1}^{+\infty}(f_n(x+h) - f_n(x) - hf_n'(x))\right|$$
$$\leqslant \frac{1}{|h|}\sum_{n=1}^{+\infty}|f_n(x+h) - f_n(x) - hf_n'(x)|$$

(car la série est absolument convergente d'après b.)

$$\leqslant |h|\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}.$$

On pose $K = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}$, on a alors $\boxed{\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - G(x)\right| \leqslant K\,|h|}$.

(d) On a donc, par encadrement, $\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = G(x)$, d'où F est dérivable en $x \in \mathbb{R}^+$ et $F'(x) = G(x)$, soit $\underline{F \text{ dérivable sur } \mathbb{R}^+ \text{ et } F' = G}$.

4. (a) Sur $\mathbb{R}_-^*$, $t \mapsto \frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} = \frac{x}{t(t+x)}$ est une fonction décroissante, d'où pour $t \in [k,k+1]$
$f_{k+1}(x) = \frac{x}{(k+1)(k+1+x)} \leqslant \frac{x}{t(t+k)} \leqslant \frac{x}{k(k+x)} = f_k(x)$.
En intégrant pour t variant de k à $k+1$,

$$f_{k+1}(x) = \int_k^{k+1} f_{k+1}(x)\,dt \leqslant \int_k^{k+1}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right)dt \leqslant \int_k^{k+1} f_k(x)\,dt = f_k(x).$$

(b) D'une part

$$\int_1^{n+1}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right)dt = \sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right)dt \leqslant \sum_{k=1}^{n} f_k(x),$$

d'autre part

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(x) = f_1(x) + \sum_{k=2}^{n} f_k(x) = f_1(x) + \sum_{k=1}^{n-1} f_{k+1}(x) \leqslant \frac{x}{x+1} + \int_1^n\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right)dt,$$

d'où

$$\int_1^{n+1}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right)dt \leqslant \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \leqslant \frac{x}{x+1} + \int_1^n\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right)dt.$$

(c) Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\int_1^N\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+x}\right)dt = \Big[\ln t - \ln(t+x)\Big]_1^N = \left[\ln\frac{t}{t+x}\right]_1^N = \ln\frac{N}{N+x} - \ln\frac{1}{1+x} = \ln\frac{N}{N+x} + \mathrm{l}$$

Or $\lim_{N\to+\infty}\frac{N}{N+x} = 1$, d'où, en passant à la limite dans l'inégalité précédente on obtient

$$\underline{\ln(1+x) \leqslant F(x) \leqslant \frac{x}{x+1} + \ln(1+x).}$$

3. Problème

3.1 Méthode de Monte-Carlo

1. (a) Une densité de U est :

$$f_U(t) = 1_{[0,1]}(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t \in [0,1] \\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$$

(b) D'après le théorème de transfert, comme $U(\Omega) = [0,1]$, si $\int_0^1 g(t)f_U(t)\,dt$ converge absolument alors $g(U)$ admet une espérance égale à la valeur de cette intégrale.
Or $\int_0^1 g(t)f_U(t)\,dt = \int_0^1 g(t)\,dt = J$ donc $\underline{g(U) \text{ admet une espérance égale à } J}$.

2. (a) D'après la loi faible des grands nombres, si (Y_n) est une suite de variables aléatoires indépendantes, admettant une même espérance m et une même variance, alors la suite $\left(\frac{S_n}{n}\right)$ (où $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$) converge en probabilité vers m.
Ici, en prenant $Y_n = g(U_n)$, on a bien $(g(U_n))$ suite de variables aléatoires indépendantes (comme les U_n sont indépendantes, on applique le résultat admis avec $f_i = g$) de même loi que $g(U)$ qui admet J pour espérance et admet également une variance.
Donc $\left(\frac{S_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers J.

(b) i. D'après le théorème de la limite centrée, si (Y_n) est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi, admettant une espérance et une variance, alors la suite (S_n^*) (où $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$) converge en loi vers une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.
En prenant à nouveau $Y_n = g(U_n)$, on a

$$S_n^* = \frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}} = \frac{S_n - nJ}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\frac{S_n}{n} - J}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}.$$

En effet, U_i ayant même loi que U, $g(U_i)$ a même loi que $g(U)$ d'espérance J et de variance σ^2, d'où, par linéarité de l'espérance,

$$E(S_n) = \sum_{i=1}^{n} E(g(U_i)) = nJ,$$

et comme les $g(U_i)$ sont indépendantes,

$$V(S_n) = \sum_{i=1}^{n} V(g(U_i)) = n\sigma^2.$$

D'où $\left(\frac{\frac{S_n}{n} - J}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

ii. On a alors, pour t réel,

$$P\left(-t \leqslant \frac{\frac{S_n}{n} - J}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leqslant t\right) = \Phi(t) - \Phi(-t) = 2\Phi(t) - 1 \text{ car } \Phi(-t) = 1 - \Phi(t).$$

Or $2\Phi(t) - 1 = 0{,}95 \Leftrightarrow \Phi(t) = 0{,}975 \Leftrightarrow t = 1{,}96$ et

$$P\left(-t \leqslant \frac{\frac{S_n}{n} - J}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leqslant t\right) = P\left(-t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{S_n}{n} - J \leqslant t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = P\left(\frac{S_n}{n} - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqslant J \leqslant \frac{S_n}{n} + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$

D'où
$$P\Big(\frac{S_n}{n}-1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\leqslant J\leqslant\frac{S_n}{n}+1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Big)=0{,}95,$$
c'est-à-dire que $\boxed{\Big[\frac{S_n}{n}-1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\frac{S_n}{n}+1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Big]}$ est un intervalle de confiance pour J au niveau de confiance 95%.

3. (a) $t=\sin u$ d'où $dt=\cos u\,du$
$$\int_0^1 4\sqrt{1-t^2}\,dt=\int_0^{\pi/2}4\sqrt{1-\sin^2 u}\,\cos u\,du=\int_0^{\pi/2}4\sqrt{\cos^2 u}\,\cos u\,du,$$
or, pour $u\in[0,\frac{\pi}{2}]$, on a $\cos u\geqslant 0$ d'où $\sqrt{\cos^2 u}=\cos u$ donc
$$\int_0^1 4\sqrt{1-t^2}\,dt=\int_0^{\pi/2}4\cos^2 u\,du=\int_0^{\pi/2}4\,\frac{1+\cos 2u}{2}\,du=2\Big[u+\frac{\sin 2u}{2}\Big]_0^{\pi/2}=2\frac{\pi}{2}$$
soit $\boxed{\int_0^1 4\sqrt{1-t^2}\,dt=\pi}$.

(b) i.
```
function G(t:real):real;
begin
  G:=4*sqrt(1-t*t);
end;
```
ii.
```
begin
  randomize;
  readln(n);
  J:=0;
  for i:=1 to n do J:=J+G(random);
  J:=J/n;
  writeln ('une valeur approchée de pi est',J);
end.
```

3.2 Réduction de la variance par variables antithétiques

1. $1-U$ suit également la loi uniforme sur $[0,1]$.
On a donc $E(g(1-U))=E(g(U))=J$ et par linéarité de l'espérance $\boxed{E(Y)=J}$.

2. (a) Pour $(u,w)\in[0,1]^2$ on a $(1-u,1-w)\in[0,1]^2$ et comme g est supposée strictement croissante sur $[0,1]$:
$$u\leqslant w\Rightarrow 1-u\geqslant 1-w\Rightarrow\begin{cases}g(u)\leqslant g(w)\\ g(1-u)\geqslant g(1-w)\end{cases}$$
et de même
$$u\geqslant w\Rightarrow 1-u\leqslant 1-w\Rightarrow\begin{cases}g(u)\geqslant g(w)\\ g(1-u)\leqslant g(1-w)\end{cases}$$
Dans les deux cas on obtient
$$(g(u)-g(w))(g(1-u)-g(1-w))\leqslant 0.$$

(b) Par positivité de l'espérance, comme U et W sont à valeurs dans $[0,1]$, on obtient d'après la question précédente
$\boxed{E[(g(U)-g(W))(g(1-U)-g(1-W))]\leqslant 0}$.
En développant le produit et en utilisant la linéarité de l'espérance, on obtient
$$E[(g(U)-g(W))(g(1-U)-g(1-W))]=$$
$$E[g(U)g(1-U)]-E[g(U)g(1-W)]-E[g(W)g(1-U)]+E[g(W)g(1-W)],$$
or U et W ont même loi donc $g(U)g(1-U)$ et $g(W)g(1-W)$ aussi et
$$E[g(W)g(1-W)]=E[g(U)g(1-U)],$$
U et W sont indépendantes donc $g(U)$ et $g(1-W)$ sont indépendantes et donc
$$E[g(U)g(1-W)]=E[g(U)]\times E[g(1-W)],$$
de plus $E[g(1-W)]=E[g(U)]$ car $1-W$ a même loi que U, donc
$$E[g(U)g(1-W)]=\Big(E[g(U)]\Big)^2,$$
de même $E[g(W)g(1-U)]=\Big(E[g(U)]\Big)^2$, d'où
$$E[(g(U)-g(W))(g(1-U)-g(1-W))]=2E[g(U)g(1-U)]-2\Big(E[g(U)]\Big)^2$$
et finalement
$$2E[g(U)g(1-U)]-2\Big(E[g(U)]\Big)^2\leqslant 0$$
soit $\boxed{E[g(U)g(1-U)]\leqslant\Big(E[g(U)]\Big)^2}$

(c)
$$\begin{aligned}\underline{V(Y)}&=\frac14 V[g(U)+g(1-U)]\\&=\frac14\Big(E[(g(U)+g(1-U))^2]-[E(g(U)+g(1-U))]^2\Big)\\&=\frac14\Big(E[g(U)^2+2g(U)g(1-U)+g(1-U)^2]\\&\qquad-(E[g(U)])^2-(E[g(1-U)])^2-2E[g(U)]E[g(1-U)]\Big)\\&=\frac14\Big(V[g(U)]+V[g(1-U)]+2E[g(U)g(1-U)]-2(E[g(U)])^2\\&\leqslant\frac14\Big(2V[g(U)]\Big)\text{ en utilisant l'inégalité précédente et }V[g(1-U)]=V[g(U)]\\&\underline{\leqslant\frac12 V[g(U)]}\end{aligned}$$

3. Soit (U_i) une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que U.
On pose $Y_i'=\frac12(g(U_i)+g(1-U_i))$ et $S_n'=\sum_{i=1}^n Y_i$. On sait que les Y_i' ont pour espérance J, et on note σ' leur écart-type commun. Le théorème de la limite centrée permet d'obtenir comme précédemment que $\Big[\frac{S_n'}{n}-1{,}96\frac{\sigma'}{\sqrt{n}},\frac{S_n'}{n}+1{,}96\frac{\sigma'}{\sqrt{n}}\Big]$ est un intervalle de confiance pour J au niveau de confiance 95%.
On avait $l_n=2\times 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ et la longueur de ce dernier intervalle est
$$l_n'=2\times 1{,}96\frac{\sigma'}{\sqrt{n}}\leqslant 2\times 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{2}\sqrt{n}}$$

car d'après la question précédente $\sigma'^2 \leqslant \frac{1}{2}\sigma^2$. Pour avoir $l'_N \leqslant l_n$ il suffit donc d'avoir $2 \times 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{2}\sqrt{N}} \leqslant 2\times 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ soit $2N \geqslant n$ ou encore $\boxed{N \geqslant \frac{n}{2}}$. Cela signifie qu'avec deux fois moins de tirages de la variable aléatoire uniforme (par `random`), on obtient la même longueur d'intervalle de confiance pour J au niveau de confiance 95%.

3.3 Réduction de la variance par stratification

3.3.1 Etude d'une fonction de plusieurs variables

1. f est une somme de fonctions rationnelles dont les dénominateurs sont non nuls sur $]0,+\infty[^3$, elle est donc de classe C^2 sur $]0,+\infty[^3$. Avec $X=(x_1,x_2,x_3)$ on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(X) = \frac{-1}{4x_1^2},\quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(X) = \frac{-1}{x_2^2},\quad \frac{\partial f}{\partial x_3}(X) = \frac{-1}{9x_3^2},$$

$$\text{pour } H \neq \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\quad {}^tH\,\nabla^2 f(A)H = {}^tH \begin{pmatrix} \frac{1}{2a_1^3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{a_2^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{9a_3^3}\end{pmatrix} H = \frac{h_1^2}{2a_1^3} + \frac{2h_2^2}{a_2^3} + \frac{2h_3^2}{9a_3^3} > 0.$$

3. $]0,+\infty[^3$ est un ouvert de $\mathbb{R}^3$ et f est C^1 sur cet ouvert.
Or f n'admet pas de point critique sur cet ouvert (les dérivées partielles d'ordre 1 ne s'annulent jamais) donc f n'admet pas d'extremums sur $]0,+\infty[^3$.
4. On pose $g(x_1,x_2,x_3) = x_1+x_2+x_3$.
$X_0 = (x_1,x_2,x_3) \in]0,+\infty[^3$ est un point critique pour f sous la contrainte $g(X) = 110$ si $g(X_0) = 110$ et $\nabla f(X_0) \in Vect(\nabla g)$ soit si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$(S)\quad \begin{cases} x_1+x_2+x_3 = 110 \\ \forall i \in \{1,2,3\},\ \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_i}(X_0) \end{cases}$$

or

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2+x_3 = 110 \\ \frac{-1}{4x_1^2} = \frac{-1}{x_2^2} = \frac{-1}{9x_3^2} = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2+x_3 = 110 \\ 4x_1^2 = x_2^2 = 9x_3^2 = -1/\lambda \end{cases}$$

Comme $X_0 \in]0,+\infty[^3$, cela signifie $2x_1 = x_2 = 3x_3$ et $x_1+x_2+x_3 = 110$ dont l'unique solution est $\boxed{X_0 = (30,60,20)}$.
D'après l'égalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1, pour $H \in \mathbb{R}^3$ tel que $[X_0,X_0+H] \subset]0,+\infty[^3$ (soit ici tel que $X_0+H \in]0,+\infty[^3$), il existe $\theta \in]0,1[$ tel que,

$$f(X_0+H) = f(X_0) + \langle \nabla f(X_0), H\rangle + \frac{1}{2}\,{}^tH\,\nabla^2 f(X_0+\theta H)H.$$

Or si X_0+H vérifie $g(X_0+H) = 110$, on a $g(H) = 0$ ce qui s'écrit aussi $\langle \nabla g, H\rangle = 0$ et donc, comme $\nabla f(X_0) \in Vect(\nabla g)$, on a $\langle \nabla f(X_0), H\rangle = 0$. De plus d'après la question précédente avec $A = X_0+\theta H$, pour H non nul, ${}^tH\,\nabla^2 f(X_0+\theta H)H > 0$ et donc $f(X_0+H) > f(X_0)$. f admet donc un minimum global sous contrainte $x_1+x_2+x_3 = 110$ en $X_0 = (30,60,20)$.

3.3.2 Méthode de stratification

1. Les intervalles I_1, I_2 et I_3 sont deux à deux disjoints, de réunion égale à $[0,1]$ et T est de loi uniforme sur $[0,1]$ donc les événements $[T \in I_1], [T \in I_2]$ et $[T \in I_3]$ forment un système complet d'événements.

En appliquant la formule des probabilités totales avec ce système complet, on obtient :

$$\begin{aligned} \underline{P(g(\tilde U) \leqslant x)} &= \sum_{i=1}^{3} P_{[T\in I_i]}(g(\tilde U) \leqslant x)P(T \in I_i) \\ &= \sum_{i=1}^{3} P_{[T\in I_i]}(g(U_i) \leqslant x)P(T \in I_i) \\ &= \sum_{i=1}^{3} P(g(U_i) \leqslant x)P(T \in I_i) \text{ car } g(U_i),T \text{ sont indépendantes} \\ &\underline{= aP(g(U_1) \leqslant x) + (b-a)P(g(U_2) \leqslant x) + (1-b)P(g(U_3) \leqslant x)}. \end{aligned}$$

car T suivant une loi uniforme sur $[0,1]$, on a $P(T \in I_1) = a$, $P(T \in I_2) = b-a$, $P(T\in I_3) = 1-b$.
$g(U_i)$ étant une variable aléatoire à densité, on sait que $x \mapsto P(g(U_i) \leqslant x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 sauf éventuellement en un nombre fini de points, par somme on en déduit que $F_{g(\tilde U)} : x \mapsto P(g(\tilde U) \leqslant x)$ (fonction de répartition de $g(\tilde U)$) est continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 sauf éventuellement en un nombre fini de points, $g(\tilde U)$ est donc une variable aléatoire à densité.
En dérivant on obtient comme densité de $g(\tilde U)$ la fonction $f_{g(\tilde U)}$ donnée par

$$\underline{f_{g(\tilde U)}(x) = af_{g(U_1)}(x) + (b-a)f_{g(U_2)}(x) + (1-b)f_{g(U_3)}(x).}$$

En prenant $g = Id$ on a $f_{\tilde U}(x) = af_{U_1}(x) + (b-a)f_{U_2}(x) + (1-b)f_{U_3}(x)$, soit

$$f_{\tilde U}(x) = \begin{cases} a \times \frac{1}{a} + 0 + 0 = 1 \text{ si } x \in [0,a[, \\ 0 + (b-a) \times \frac{1}{b-a} + 0 = 1 \text{ si } x \in [a,b[, \\ 0 + 0 + (1-b) \times \frac{1}{1-b} = 1 \text{ si } x \in [b,1], \\ 0+0+0 = 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

En conclusion $f_{\tilde U}(x) = 1$ si $x \in [0,1]$ et $f_{\tilde U}(x) = 0$ sinon, c'est-à-dire que $\tilde U$ suit la loi uniforme sur $[0,1$

2.

$$\begin{aligned} \underline{E(g(\tilde U))} &= \int_{\infty}^{+\infty} t f_{g(\tilde U)}(t)\,dt \\ &= a\int_{-\infty}^{+\infty} t f_{g(U_1)}(t)\,dt + (b-a)\int_{-\infty}^{+\infty} t f_{g(U_2)}(t)\,dt + (1-b)\int_{-\infty}^{-\infty} t f_{g(U_3)}(t)\,dt \\ &\underline{= aE(g(U_1)) + (b-a)E(g(U_2)) + (1-b)E(g(U_3))}. \end{aligned}$$

(Toutes les intégrales sont bien convergentes car les fonctions intégrées sont nulles en dehors d'un intervalle fermé sur lequel elles sont continues.)

3. Les variables aléatoires $U_{1,1},\ldots,U_{1,n_1},U_{2,1},\ldots,U_{2,n_2},U_{3,1},\ldots,U_{3,n_3}$ étant indépendantes, les variables aléatoires $g(U_{1,1}),\ldots,g(U_{1,n_1}),g(U_{2,1}),\ldots,g(U_{2,n_2}),g(U_{3,1}),\ldots,g(U_{3,n_3})$ sont également indépendantes et on a donc

$$\begin{aligned} \underline{V(Z)} &= a^2\frac{1}{n_1^2}\sum_{i=1}^{n_1} V(g(U_{1,i})) + (b-a)^2\frac{1}{n_2^2}\sum_{j=1}^{n_2} V(g(U_{2,j})) + (1-b)^2\frac{1}{n_3^2}\sum_{k=1}^{n_3} V(g(U_{3,k})) \\ &\underline{= a^2\frac{1}{n_1}V(g(U_1)) + (b-a)^2\frac{1}{n_2}V(g(U_2)) + (1-b)^2\frac{1}{n_3}V(g(U_3))} \end{aligned}$$

car les $g(U_{1,i})$ (respectivement $g(U_{2,j})$, respectivement $g(U_{3,k})$) ont même loi que $g(U_1)$ (respectivement $g(U_2)$, respectivement $g(U_3)$).

4. On a alors $V(Z) = \dfrac{1}{4n_1} + \dfrac{1}{n_2} + \dfrac{1}{9n_3}$ et $n_1 + n_2 + n_3 = 110$.

   De plus $E(Z) = aE(g(U_1)) + (b-a)E(g(U_2)) + (1-b)E(g(U_3)) = E(g(\tilde{U})) = J$ car $\tilde{U}$ a même loi que U (loi uniforme sur $[0,1]$).

   $E(Z)$ fournit donc une estimation de J avec le plus petit risque d'erreur possible si $V(Z)$ est minimale, c'est-à-dire d'après l'étude de la question **3.3.1** si $\underline{n_1 = 30, n_2 = 60, n_3 = 20}$.

RAPPORT

Exercice 1

Après une question de cours sur les projecteurs orthogonaux p sur D et q sur $D^\perp$ (de matrices P et Q), on étudie l'endomorphisme f dont la matrice M est antisymétrique et vérifie M^2 = -Q (image, noyau, valeurs propres, diagonalisation), puis les rotations g_θ d'axe D, d'angle θ (composition, inverse).

Les copies sont particulièrement faibles au niveau de cet exercice. Les notions de base d'algèbre linéaire et bilinéaire ne sont pas assimilées. Les confusions sont très nombreuses. En particulier on confond un vecteur et la matrice de ses coordonnées dans une base, un endomorphisme et sa matrice.
1. Les réponses à la question sont parfois farfelues : exemples p+q=0 ou p+q= R^3, p+q = 1, p+q = p^2, < p, q >= 0, p+q = R^3, p+q = 2u, p+q = u+v = 1, (p+q)(u) = Ker u+Im v,...
2. Oubli fréquent de u unitaire. Sinon c'est souvent bien traité jusqu'au 3.b. On trouve souvent des "dim f" !
La fin du b (Image et noyau de f) est ratée par (presque) tout le monde.
Le polynôme annulateur est souvent trouvé de manière convaincante, sous de nombreuses formes différentes.
Question d), on trouve dans le spectre de f, i, -i comme valeur propre, voire même 1 et -1 (comme racine de X^3+X). On dit fréquemment que les valeurs propres de f sont les zéros de X+X^3. Le calcul du 4.a n'est (presque) jamais mené à son terme.

Exercice 2

Pour x > 0 fixé, on établit la convergence de la série de terme général $f_n(x)$ = (1/n)-1/(n+x), et celle de sa série dérivée, de terme général $f_n'(x)$.
A l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange, on montre la dérivabilité de sa somme F(x).
A l'aide d'un encadrement de la somme partielle, on en déduit un équivalent de F(x) en $+\infty$.
Malgré un manque de soin général cet exercice a été dans l'ensemble compris. Par contre, certains se fourvoient en montrant la convergence des séries par la limite nulle du terme général. D'autres ne savent pas dériver f_n. Taylor Lagrange est diversement cité : les hypothèses sont incertaines voire inexistantes. Certains ne comprennent pas la formule. 3. b est une catastrophe. Ceux qui réussissent le mieux sont ceux qui utilisent la formule de Taylor à fn en ignorant le a. La plupart ne comprennent pas l'intérêt de l'hypothèse x>n. Très peu traitent correctement le 3.c. Certains se contentent de K=1/n^3. La plupart trouvent le bon K, mais au mépris des vérifications élémentaires de convergence et en toute ignorance de l'inégalité triangulaire.
4a est souvent obtenu par soustraction d'inégalités ! Sinon, c'est à peu près correct, sauf certaines maladresses dans le calcul de l'équivalent (personne ne propose ln x).

Problème

Dans la partie 1, on établit que l'intégrale J d'une fonction continue g sur [0,1] est l'espérance de g(U) où U suit une loi uniforme sur [0,1]. A l'aide d'un n-échantillon i.i.d. on construit classiquement un estimateur ponctuel de J puis, via le théorème central limite, un intervalle de confiance pour J.

La correction du problème est très décevante. Les candidats ont sans doute manqué de temps mais ont surtout été gênés par de grosses lacunes sur des parties importantes du programme de seconde année : variables aléatoires à densité, convergence, estimation, optimisation sous contrainte. En moyenne ils se sont contentés de grappiller des points. Au 3.1.3, le calcul de l'intégrale par la formule du changement de variable n'est pas bien réussi, très peu connaissent les formules élémentaires de trigonométrie.
La partie informatique est peu abordée. La fonction G à la rigueur. Le programme, quant à lui, est traité par une très petite minorité, tant la méthode mathématique requière une analyse fine du contexte. Pour comprendre ce qu'on demande, on ne peut se contenter de répondre aux questions précédentes sans une réflexion sur la démarche de l'auteur du sujet. Or, il est fréquent de pouvoir traiter les questions informatiques sans avoir fait les questions qui précèdent, la méthode mathématique étant facilement extirpable de l'énoncé.
Pour beaucoup, le problème rebondit avec la question 3.3.2. Toutefois l'explication pour f de classe C^2 est rarement "efficace", il suffit de dire que f est rationnelle et non pas un polynôme ! Que d'erreurs de dérivées premières ou secondes. Au 2, l'inégalité stricte pour H non nul n'est pratiquement jamais évoquée. Au 3, la moitié des candidats trouve que f admet des extremums (heureusement la réponse n'était pas donnée). Le 3.3.2 demande une lecture attentive. Certains ne comprennent rien et lancent des affirmations qui n'ont aucun sens : ainsi le système complet d'événements pour appliquer la formule des probabilités totales au 1 est très rarement explicité, et à la place on trouve de tout, beaucoup de choses qui ne sont même pas des événements. Toutefois, certains candidats engrangent ici de nombreux points, certains même ne réussissent que cette partie du problème.

Bilan de la correction des copies

Le niveau moyen des copies est faible. On constate peu de progrès par rapport à l'an dernier au niveau de la présentation et de la rédaction des copies. Inutile pour un candidat de recopier les questions (en partie ou en totalité).

Le manque de soin est général. Les solutions sont négligées, mal construites, bâclées, insuffisantes, bourrées d'erreurs grossières.

Des résultats très importants du cours ne sont pas sus. Les candidats semblent consacrer de moins en moins de temps dans cette matière.

Plus encore que l'an passé les résultats reflètent une trop grande hétérogénéité du niveau des candidats et de leur investissement dans la matière.

Avec un écart-type de **5,34** et une moyenne générale de **10,6** cette épreuve a permis de classer les candidats.