SUJET

1. Exercice

1. A l'aide de développements limités usuels que l'on rappellera clairement, montrer que lorsque x est au voisinage de 0 on a
$$\ln(2-e^x) = -x - x^2 + o(x^2).$$

2. a. Montrer que pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on a :
$$2 - e^{1/k} \in]0,1[.$$
   b. En déduire le signe de $\ln(2-e^{1/k})$, pour tout entier k supérieur ou égal à 2.
   c. Quelle est la nature de la série de terme général $\ln(2-e^{1/k})$?
   d. Pour n entier supérieur ou égal à 2, on pose
$$V_n = \sum_{k=2}^{n} \ln(2-e^{1/k}) \text{ et } u_n = \exp V_n.$$
   Déterminer
$$\lim_{n\to+\infty} V_n \text{ et } \lim_{n\to+\infty} u_n.$$

3. a. Montrer que
$$\ln(nu_n) = \sum_{k=2}^{n} \left[\ln(2-e^{1/k}) - \ln(1-\frac{1}{k})\right].$$
   b. Déterminer un équivalent, quand k tend vers $+\infty$, de $\ln(2-e^{1/k}) - \ln(1-\frac{1}{k})$.
   c. En déduire que u_n est équivalent, quand n tend vers $+\infty$, à $\frac{K}{n}$ avec $K > 0$. Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?

4. On pose
$$S_n = \sum_{k=2}^{n} (-1)^k u_k.$$
   a. Etudier le sens de variations de la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$.
   b. Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\geqslant 1}$ et $(S_{2n+1})_{n\geqslant 1}$ sont deux suites adjacentes.
   c. En déduire la nature de la série de terme général $(-1)^n u_n$.

2. Exercice

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre $n \geqslant 2$, à coefficients réels.
Pour tout élément $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle "trace de A", et on note $Tr(A)$, la somme des éléments diagonaux, c'est-à-dire :

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

On admet que Tr est une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad Tr(AB) = Tr(BA).$$

On note ${}^tA$ la transposée de la matrice A.

1. Soit φ l'application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \varphi(A,B) = Tr({}^tAB) \quad (\text{ où } {}^tAB = \ {}^tA \times B).$$

Exprimer $\varphi(A,B)$ en fonction des coefficients de A et B et montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On note N la norme associée à ce produit scalaire.

2. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Le but de cette question est de prouver que

$$N(AB) \leqslant N(A)N(B).$$

a. Justifier l'existence de $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$${}^tP({}^tAA)P = D$$

où P est une matrice orthogonale et D une matrice diagonale.
On notera par la suite λ_i le coefficient d_{ii} de la matrice $D = (d_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

b. Soit λ une valeur propre de ${}^tAA$ et X un vecteur propre associé.
En calculant ${}^tX{}^tAAX$ de deux manières différentes, montrer que $\lambda \geqslant 0$.

c. On pose $S = \ {}^tP(B{}^tB)P = (s_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Montrer que

$$[N(A)]^2 = Tr(D), \quad [N(B)]^2 = Tr(S), \quad [N(AB)]^2 = Tr(SD).$$

d. Montrer que

$$Tr(SD) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_{ii}.$$

e. On note E_i le $i^{ème}$ vecteur de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, espace des matrices à n lignes et une colonne, à coefficients réels. Montrer que

$${}^tE_iSE_i = ||{}^tBPE_i||^2,$$

où $||.||$ désigne la norme euclidienne canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, puis calculer ${}^tE_iSE_i$ en fonction des coefficients de S.
Qu'en déduit-on, pour i entier compris entre 1 et n, sur le signe de s_{ii} ?

f. Montrer que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_{ii} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} s_{ii}\right)$$

puis conclure que

$$N(AB) \leqslant N(A)N(B).$$

3. Problème

Le préliminaire, les parties I et II sont indépendants.

3.1. Préliminaire

On considère deux variables aléatoires à densité X et Y définies sur un même espace probabilisé, admettant des espérances $E(X), E(Y)$ et des variances $V(X), V(Y)$. On suppose $V(X) > 0$. On définit la covariance de X et Y par

$$Cov(X,Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E(XY) - E(X)E(Y).$$

1. Montrer que pour tout nombre réel λ,

$$V(\lambda X + Y) = \lambda^2 V(X) + 2\lambda Cov(X,Y) + V(Y).$$

2. a. En étudiant le signe du trinôme précédent, montrer que

$$(Cov(X,Y))^2 \leqslant V(X)V(Y).$$

   b. A quelle condition nécessaire et suffisante a-t-on l'égalité

$$(Cov(X,Y))^2 = V(X)V(Y) \ ?$$

3.2. Partie I : Etude d'une fonction de deux variables

n désigne un entier non nul, A et S deux réels positifs ou nuls vérifiant $S > nA$.
On définit sur $[0, +\infty[\times]0, +\infty[$ la fonction L_n par :

$$\begin{cases} L_n(a,b) = \dfrac{1}{b^n} e^{-\dfrac{1}{b}(-na+S)} & \text{si } 0 \leqslant a \leqslant A \\ L_n(a,b) = 0 & \text{si } a > A \end{cases}$$

1. Justifier que L_n est de classe C^1 sur l'ouvert $]0, A[\times]0, +\infty[$.
   Montrer que L_n n'admet pas d'extremum sur cet ouvert.

2. Montrer que

$$\forall a \in [0, A[, \ \forall b \in]0, +\infty[, \ L_n(a,b) < L_n(A,b).$$

   Montrer que ce résultat est encore vrai pour tout a de $]A, +\infty[$.

3. Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(b) = L_n(A, b)$.
   Montrer que g admet un maximum absolu sur $]0, +\infty[$, atteint en un point b_0 que l'on exprimera en fonction de A, S, n.

4. Déduire de ce qui précède que L_n admet sur $[0, +\infty[\times]0, +\infty[$ un maximum absolu atteint en un unique point (a_0, b_0) que l'on précisera.

3.3. Partie II : Etude d'une loi

Soit $a \geqslant 0$ et $b > 0$. On considère la fonction $f_{a,b}$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f_{a,b}(x) = \dfrac{1}{b} e^{-\dfrac{(x-a)}{b}} & \text{si } x \geqslant a \\ f_{a,b}(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Vérifier que $f_{a,b}$ est bien une densité de variable aléatoire. On note $\mathcal{E}(a,b)$ la loi associée.

   On considère désormais une variable aléatoire X de loi $\mathcal{E}(a,b)$.

2. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. On pose $Y = X - a$. Déterminer la loi de Y et la reconnaître.
   En déduire $E(X)$ et $V(X)$.
4. Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que X admet un moment d'ordre p, $E(X^p)$, et pour $p > 0$ déterminer une relation liant $E(X^p)$ et $E(X^{p-1})$.
5. *Simulation de la loi* $\mathcal{E}(a,b)$.
   a. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1[$.
   Montrer que la variable aléatoire $-b\ln(1-U)+a$ suit une loi $\mathcal{E}(a,b)$.
   b. On rappelle qu'en langage Pascal, la fonction `random` permet de simuler une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1[$.
   Ecrire, en langage Pascal, une fonction `tirage`, de paramètres `a` et `b` simulant une variable aléatoire de loi $\mathcal{E}(a,b)$.

3.4. Partie III : Estimation des paramètres a et b

a et b désignent toujours deux réels tels que $a \geqslant 0$ et $b > 0$. On considère désormais une suite de variables aléatoires $(X_i)_{i\geqslant 1}$ indépendantes identiquement distribuées de loi $\mathcal{E}(a,b)$.
Pour n entier supérieur ou égal à 2, on considère les variables aléatoires S_n et Y_n définies par $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ et $Y_n = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Le but de cette partie est de déterminer des estimateurs de a et b.

1. La fonction `tirage`, ainsi que les variables informatiques `a,b,X,S,Y` de type `real` et `i,n` de type `integer` étant supposées définies, compléter le corps du programme principal suivant, de manière à ce qu'il simule S_n et Y_n (les valeurs étant stockées respectivement dans `S` et `Y`).

```
begin
  randomize ;
  readln(a,b,n) ;
  X:=tirage(a,b) ;
  S:=... ;
  Y:=...;
  for i:= 2 to n do...
                ......
                ......
                ......
  ...
end.
```

2. Déterminer l'espérance et la variance de S_n.

3. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire $(X_1 - a) + (X_2 - a) + \cdots + (X_n - a)$?
En déduire une densité de S_n.

4. Déterminer la fonction de répartition de Y_n.
En déduire que Y_n suit une loi $\mathcal{E}(a_n, b_n)$ (on précisera a_n et b_n).
Donner les valeurs de $E(Y_n)$ et $V(Y_n)$.

5. a. Calculer le biais ainsi que le risque quadratique de Y_n en tant qu'estimateur de a.

   b. Rappeler l'inégalité de Markov pour une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2.
   A l'aide de ce qui précède, prouver que (Y_n) est une suite d'estimateurs de a asymptotiquement sans biais, convergente.

6. On pose $Z_n = \dfrac{S_n}{n} - Y_n$.

   a. Calculer le biais de Z_n en tant qu'estimateur de b.

   b. On note $r_{Z_n}(b)$ le risque quadratique de Z_n. Montrer que

$$r_{Z_n}(b) = \frac{2b^2}{n^2} + \frac{b^2}{n} - \frac{2}{n} Cov(S_n, Y_n).$$

   c. A l'aide du préliminaire montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} r_{Z_n}(b) = 0$$

   et en déduire que (Z_n) est une suite d'estimateurs de b asymptotiquement sans biais, convergente.

7. Pour un échantillon donné $(x_1, \ldots, x_n)$, avec $\min\{x_1, \ldots, x_n\} \neq \max\{x_1, \ldots, x_n\}$, correspondant à une réalisation des n variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$, on définit la fonction L sur $[0, +\infty[\times]0, +\infty[$ par

$$L(a, b) = \prod_{i=1}^{n} f_{a,b}(x_i).$$

   a. Montrer que L est la fonction L_n définie dans la partie I, pour des valeurs de A et S que l'on précisera en fonction des x_i.

   b. Comparer les estimations de a et b obtenues sur l'échantillon $(x_1, \ldots, x_n)$ à partir de Y_n et Z_n avec les valeurs a_0 et b_0 obtenues dans la partie I.

CORRIGÉ

Exercice 1

1. Au voisinage de 0 on sait que $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ et que $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$.
D'où $\ln(2-e^x) = \ln(1 - x - \frac{x^2}{2} + o(x^2))$, on peut alors poser $u(x) = -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, avec $\lim\limits_{x\to 0} u(x) = 0$ et donc
$$\ln(2-e^x) = \ln(1+u(x)) = u(x) - \frac{1}{2}u(x)^2 + o((u(x))^2) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}(x^2 + o(x^2)) + o(x^2)$$
soit $\boxed{\ln(2-e^x) = -x - x^2 + o(x^2).}$

2. (a)
$$\begin{aligned} k \geqslant 2 \Rightarrow 0 < \frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{2} &\Rightarrow 1 < e^{1/k} \leqslant e^{1/2} \\ &\Rightarrow -1 > -e^{1/k} \geqslant -\sqrt{e} \\ &\Rightarrow 1 > 2 - e^{1/k} \geqslant 2 - \sqrt{e} > 0 \text{ car } e < 4 \text{ donc } \sqrt{e} < 2. \end{aligned}$$
On en déduit que pour tout entier k supérieur ou égal à 2, $\boxed{2 - e^{1/k} \in]0,1[.}$

(b) On en déduit alors que $\boxed{\ln(2-e^{1/k}) < 0.}$

(c) On sait que les séries $\sum \ln(2-e^{1/k})$ et $\sum -\ln(2-e^{1/k})$ sont de même nature, or :
- $-\ln(2-e^{1/k}) > 0$,
- $-\ln(2-e^{1/k}) \sim \frac{1}{k}$ quand k tend vers $+\infty$, d'après le DL trouvé en 1 avec $x = \frac{1}{k}$;
- $\sum \frac{1}{k}$ est une série de Riemann divergente,

donc, d'après les critères de comparaison pour les séries à terme général positif, la série $\sum -\ln(2-e^{1/k})$ est divergente et donc : la série de terme général $\ln(2-e^{1/k})$ est divergente.

(d) $-V_n = -\sum\limits_{k=2}^{n} \ln(2-e^{1/k})$ est une somme partielle de la série divergente, à terme général positif, $\sum -\ln(2-e^{1/k})$, elle tend donc vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, et donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = -\infty \text{ et } \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0.}$

3. (a)
$$\begin{aligned} \underline{\sum_{k=2}^{n}\left(\ln(2-e^{1/k}) - \ln(1-\frac{1}{k})\right)} &= V_n - \sum_{k=2}^{n} \ln\frac{k-1}{k} \\ &= V_n - \ln\left(\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k}\right) \\ &= V_n - \ln\frac{1}{n} \\ &= \ln u_n + \ln n \\ &= \underline{\ln(nu_n)} \end{aligned}$$

(b)
$$\ln(1-\frac{1}{k}) = -\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} + o(\frac{1}{k^2})$$
d'où
$$\ln(2-e^{1/k}) - \ln(1-\frac{1}{k}) = -\frac{1}{k} - \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k} + \frac{1}{2k^2} + o(\frac{1}{k^2}) = -\frac{1}{2k^2} + o(\frac{1}{k^2})$$

et, quand k tend vers $+\infty$, $\boxed{\ln(2 - e^{1/k}) - \ln(1 - \frac{1}{k}) \sim -\frac{1}{2k^2}}$.

(c) La série de Riemann $\sum \frac{1}{k^2}$ est convergente et $-[\ln(2 - e^{1/k}) - \ln(1 - \frac{1}{k})] \sim \frac{1}{2k^2} > 0$, donc d'après les critères de comparaisons pour les série de terme général positif, $\sum -[\ln(2 - e^{1/k}) - \ln(1 - \frac{1}{k})]$ est convergente, de somme $S > 0$.
On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \ln(nu_n) = -S$$

et par continuité de l'exponentielle,

$$\lim_{n\to+\infty} nu_n = e^{-S} = K \text{ avec } K \in]0,1[\text{ car } S > 0.$$

D'où $nu_n \sim K$ et finalement u_n est équivalent, quand n tend vers $+\infty$, à $\frac{K}{n}$.

Par critère de comparaison avec la série de Riemann $\sum \frac{1}{n}$ on en déduit que la série de terme général u_n est divergente.

4. (a)

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \exp V_{n+1} - \exp V_n \\ &= \exp[V_n + \ln(2 - e^{1/(n+1)})] - \exp V_n \\ &= (\exp V_n)(1 - e^{1/(n+1)}) \end{aligned}$$

Or $\exp V_n > 0$ et $1 - e^{1/(n+1)} < 0$ donc $u_{n+1} - u_n < 0$: la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est décroissante.

(b)

$$\begin{aligned} &S_{2(n-1)} - S_{2n} = u_{2n+2} - u_{2n+1} < 0, \\ &S_{2(n-1)+1} - S_{2n+1} = -u_{2n+3} + u_{2n+2} > 0 \\ &S_{2n+1} - S_{2n} = -u_{2n+1} \text{ tend vers 0 quand } n \text{ tend vers } +\infty \text{ (d'après 2.) :} \end{aligned}$$

les suites $(S_{2n})_{n\geqslant 1}$ et $(S_{2n+1})_{n\geqslant 1}$ sont deux suites adjacentes.

(c) Les suites $(S_{2n})_{n\geqslant 1}$ et $(S_{2n-1})_{n\geqslant 1}$ sont donc convergentes de même limite, la suite $(S_n)_{n\geqslant 2}$ est donc convergente : la série de terme général $(-1)^n u_n$ est convergente.

Exercice 2

1. Le coefficient d'indices i,j de ${}^tAB$ est $\sum_{k=1}^{n} a_{ki}b_{kj}$ d'où $\boxed{\varphi(A,B) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ki}b_{ki}.}$ On a donc :

- φ est une application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$,

et $\forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2, \forall(A,B,C) \in \left(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\right)^3$,

-

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha A + \beta B, C) &= Tr({}^t(\alpha A + \beta B)C) \\ &= Tr(\alpha\, {}^tAC + \beta\, {}^tBC) \\ &= \alpha Tr({}^tAC) + \beta Tr({}^tBC) \text{ par linéarité de la trace} \\ &= \alpha\varphi(A,C) + \beta\varphi(B,C) \end{aligned}$$

- D'après l'expression trouvée de $\varphi(A,B)$ on a clairement $\varphi(A,B) = \varphi(B,A)$
- $\varphi(A,A) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ki}^2 \geqslant 0$
-

$$\begin{aligned}\varphi(A,A) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ki}^2 = 0 &\Leftrightarrow \forall (i,k) \in \{1,\ldots,n\}^2, a_{ki}^2 = 0 \text{ car il s'agit d'une somme de termes positifs}\\ &\Leftrightarrow \forall (i,k) \in \{1,\ldots,n\}^2, a_{ki} = 0\\ &\Leftrightarrow A = 0\end{aligned}$$

φ est donc un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. (a) ${}^t({}^tAA) = {}^tA^t({}^tA) = {}^t AA$ donc A est une matrice symétrique à coefficients réels et il existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que P soit une matrice orthogonale, D une matrice diagonale et ${}^tP({}^tAA)P = D$.

   (b) ${}^tX^tAAX = {}^t(AX)AX = ||AX||^2$ et ${}^tX^tAAX = {}^tX\lambda X = \lambda||X||^2$ où $||.||$ désigne la norme euclidienne canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (soit $||Y||^2 = {}^tYY$ pour $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$).
   Comme X est un vecteur propre donc non nul, on a $||X|| \neq 0$ et

$$\lambda = \frac{||AX||^2}{||X||^2} \geqslant 0.$$

   (c) En utilisant la propriété

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad Tr(AB) = Tr(BA)$$

   on obtient :
   $[N(A)]^2 = Tr({}^tAA) = Tr({}^tP(DP)) = Tr((DP){}^tP) = Tr(D)$,
   $[N(B)]^2 = Tr({}^tBB) = Tr(B{}^tB) = Tr({}^tP(SP)) = Tr((SP){}^tP) = Tr(S)$,
   $[N(AB)]^2 = Tr({}^t(AB)AB) = Tr(({}^tB{}^tAA)B) = Tr(B({}^tB{}^tAA)) = Tr(PS{}^tPPD{}^tP) = Tr(PSD{}^tP) = Tr(SD{}^tPP) = Tr(SD)$

   (d) Le coefficient d'indices i,i de SD est $\sum_{k=1}^{n} s_{ik}d_{ki} = s_{ii}d_{ii} = s_{ii}\lambda_i$ car D est diagonale, d'où

$$\boxed{Tr(SD) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_{ii}.}$$

   (e) $||{}^tBPE_i||^2 = {}^t({}^tBPE_i){}^tBPE_i = {}^tE_i^tPB{}^tBPE_i = {}^tE_iSE_i$ et

$$SE_i = \begin{pmatrix} s_{11} & \ldots & s_{1i} & \ldots & s_{1n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ s_{i1} & \ldots & s_{ii} & \ldots & s_{in}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ s_{n1} & \ldots & s_{ni} & \ldots & s_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}s_{1i}\\ \vdots\\ s_{ii}\\ \vdots\\ s_{ni}\end{pmatrix}$$

   d'où ${}^tE_iSE_i = s_{ii}$.
   On a donc $s_{ii} = ||{}^tBPE_i||^2 \geqslant 0$.

   (f)

$$\Big(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n}s_{ii}\Big) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_i s_{jj} \geqslant \sum_{i=1}^{n}\lambda_i s_{ii} \text{ car, d'après ce qui précède } \forall i, \forall j, \lambda_i s_{jj} \geqslant 0.$$

   A l'aide de (c) et (d) on en déduit que $[N(A)N(B)]^2 \geqslant [N(AB)]^2$, puis, les termes étant positifs, $N(A)N(B) \geqslant N(AB)$,ce qui est l'inégalité voulue.

Problème

Préliminaire

1.

$$\begin{aligned}\underline{V(\lambda X+Y)} &= E((\lambda X+Y)^2)-(E(\lambda X+Y)^2)\\ &= E(\lambda^2X^2+Y^2+2\lambda XY)-(\lambda E(X)+E(Y))^2 \text{ (linéarité de l'espérance)}\\ &= \lambda^2E(X^2)+E(Y^2)+2\lambda E(XY)-(\lambda^2E(X)^2+E(Y)^2+2\lambda E(X)E(Y))\\ &= \underline{\lambda^2V(X)+2\lambda Cov(X,Y)+V(Y)}\end{aligned}$$

2. (a) Pour tout λ réel, $V(\lambda X+Y)\geqslant 0$ et le coefficient de λ^2 ($V(X)$) est non nul, donc le trinôme précédent (en λ) ne peut admettre deux racines réelles distictes, d'où

$$\Delta = 4(Cov(X,Y))^2-4V(X)V(Y)\leqslant 0$$

soit $\underline{(Cov(X,Y))^2\leqslant V(X)V(Y)}$.

(b) On a égalité si et seulement si $\Delta=0$, soit si le trinôme admet une racine (qui est nécessairement double), c'est-à-dire s'il existe λ_0 tel que $V(\lambda_0X+Y)=0$ soit
s'il existe λ_0 tel que λ_0X+Y soit constante presque sûrement.

Partie I: Etude d'une fonction de deux variables

1. Sur $]0,A[\times]0,+\infty[$, $L_n(a,b)=\dfrac{1}{b^n}e^{-\frac{1}{b}(-na+S)}$.
$(a,b)\mapsto -\dfrac{1}{b}(-na+S)$ et $(a,b)\mapsto\dfrac{1}{b^n}$ sont de classe C^1 sur $]0,A[\times]0,+\infty[$ en tant que fractions rationnelles dont le dénominateur est non nul.
exp est C^1 sur $\mathbb{R}$ donc par composition puis par produit, $\underline{L_n \text{ est de classe } C^1 \text{ sur l'ouvert }]0,A[\times]0,+\infty}$
Sur un ouvert, pour une fonction de classe C^1, un extremum (local ou global) ne peut être atteint qu'en un point critique, or pour $(a,b)\in]0,A[\times]0,+\infty[$,

$$\frac{\partial L_n}{\partial a}(a,b)=\frac{1}{b^n}\frac{n}{b}e^{-\frac{1}{b}(-na-S)}>0.$$

$\underline{L_n \text{ n'admet donc pas de point critique, et donc pas d'extremum, sur cet ouvert.}}$

2. Soit $a\in[0,A[$, $b\in]0,+\infty[$,

$$\begin{aligned}0\leqslant a<A &\Rightarrow S\geqslant -na+S>-nA+S\\ &\Rightarrow \frac{-1}{b}(-na+S)<\frac{-1}{b}(-nA+S) \text{ car } \frac{-1}{b}<0\\ &\Rightarrow \exp\frac{-1}{b}(-na+S)<\exp\frac{-1}{b}(-nA+S) \text{ car exp est croissante}\\ &\Rightarrow \underline{L_n(a,b)<L_n(A,b)} \text{ car } \frac{1}{b^n}>0\end{aligned}$$

$\underline{\text{Pour } a\in]A,+\infty[,\ L_n(a,b)=0<L_n(A,b).}$

3.

$$g(b)=L_n(A,b)=\frac{1}{b^n}e^{-\frac{1}{b}(-nA+S)} \text{ donc}$$

$$g'(b)=-nb^{-n-1}e^{-\frac{1}{b}(-nA+S)}+\frac{1}{b^n}\frac{1}{b^2}(-nA+S)e^{-\frac{1}{b}(-nA+S)}=\frac{1}{b^{n+1}}(-n+\frac{-nA+S}{b})e^{-\frac{1}{b}(-nA+S)}.$$

$$\begin{aligned}g'(b)\geqslant 0 &\Leftrightarrow -nb-nA+S\geqslant 0 \text{ car } b>0\\ &\Leftrightarrow nb\leqslant -nA+S\\ &\Leftrightarrow b\leqslant -A+\frac{S}{n}\end{aligned}$$

Or $S > nA$ donc $\dfrac{S}{n} - A > 0$ et on obtient le tableau de variation de g :

b	0		$-A+\frac{S}{n}$		$+\infty$
$g'(b)$		$+$	$\vert$	$-$	
g		$\nearrow$	$\vert$	$\searrow$	

g admet un maximum absolu en $b_0 = -A + \frac{S}{n}$.

4. On a donc, d'après 3., $\forall b \in]0,+\infty[, L_n(A,b) \leqslant L_n(A,b_0)$ avec égalité seulement si $b = b_0$, d'où, d'après 2., $\forall a \in [0,+\infty[, a \neq A, \forall b \in]0,+\infty[, L_n(a,b) < L_n(A,b) \leqslant L_n(A,b_0)$.
L_n admet donc un maximum absolu qui vaut $L_n(A,b_0)$ et qui est atteint en l'unique point $\boxed{(a_0,b_0) = \left(A, -A + \dfrac{S}{n}\right)}$.

Partie II : Etude d'une loi

1. • $f_{a,b} \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$.
   • $f_{a,b}$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$
   • $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{a,b}(t)\,dt = \int_a^{-\infty} \frac{1}{b} e^{-\frac{(t-a)}{b}}\,dt$.
   Or, pour $x > a$, $\displaystyle\int_a^x \frac{1}{b} e^{-\frac{(t-a)}{b}}\,dt = \left[-e^{-\frac{(t-a)}{b}}\right]_a^x = 1 - e^{-\frac{(x-a)}{b}} \to 1$ quand x tend vers $+\infty$ car $b > 0$.

   $f_{a,b}$ est bien une densité de variable aléatoire.
2. $F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^x f_{a,b}(t)\,dt$ d'où $\boxed{F_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < a \\ 1 - e^{-\frac{(x-a)}{b}} \text{ si } x \geqslant a \end{cases}}$
3. $Y = X - a$ d'où
$$F_Y(x) = P(X - a \leqslant x) = P(X \leqslant a + x) = F_X(a+x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 1 - e^{-\frac{x}{b}} \text{ si } x \geqslant 0 \end{cases}$$
   On reconnaît la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre $1/b$ et donc Y suit une loi exponentielle de paramètre $1/b$.
   On a donc $E(X) = E(Y) + a = b + a$ et $V(X) = V(Y) = b^2$.
4. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^p f_{a,b}(t)\,dt = \int_a^{+\infty} t^p \frac{1}{b} e^{-\frac{(t-a)}{b}}\,dt$.
   La fonction $t \mapsto t^p \dfrac{1}{b} e^{-\frac{(t-a)}{b}}$ est continue et positive sur $[a,+\infty[$,
   $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^{p+2} \frac{1}{b} e^{-\frac{(t-a)}{b}} = 0$ donc, en $+\infty$, $t^p \frac{1}{b} e^{-\frac{(t-a)}{b}} = o(\frac{1}{t^2})$.
   Comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ est convergente, par comparaison pour les fonctions positives, on obtient que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^p f_{a,b}(t)\,dt$ est convergente:
   pour $p \in \mathbb{N}$, X admet donc un moment d'ordre p.
   Pour $p \geqslant 1$, on effectue une intégration par parties en posant :
$$u(t) = t^p \text{ donc } u'(t) = pt^{p-1}$$
$$v'(t) = \tfrac{1}{b} e^{-\frac{(t-a)}{b}} \text{ soit } v(t) = -e^{-\frac{(t-a)}{b}}.$$
   Les fonctions u et v sont bien de classe C^1 sur $[a,+\infty[$ et donc, pour tout $x \geqslant a$, on a
$$\int_a^x t^p f_{a,b}(t)\,dt = \int_a^x t^p \frac{1}{b} e^{-\frac{(t-a)}{b}}\,dt = \left[-t^p e^{-\frac{(t-a)}{b}}\right]_a^x + p\int_a^x t^{p-1} e^{-\frac{(t-a)}{b}}\,dt$$

En faisant tendre x vers $+\infty$, on obtient $\boxed{E(X^p) = a^p + pbE(X^{p-1})}$.

5. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. U étant à valeurs dans $[0,1[$, $1-U$ est à valeurs dans $]0,1]$ et $\ln(1-U)$ a bien un sens.

$$\begin{aligned}P(-b\ln(1-U)+a \leqslant x) &= P(-b\ln(1-U) \leqslant x-a)\\ &= P(\ln(1-U) \geqslant -\frac{x-a}{b})\\ &= P(1-U \geqslant e^{-\frac{x-a}{b}})\\ &= P(U \leqslant 1-e^{-\frac{x-a}{b}}).\end{aligned}$$

Pour $x \leqslant a$ on a $-\frac{x-a}{b} \geqslant 0$ et $1-e^{-\frac{x-a}{b}} \leqslant 0$.
Pour $x > a$ on a $-\frac{x-a}{b} < 0$ et $1-e^{-\frac{x-a}{b}} \in]0,1[$ donc, comme U suit la loi uniforme sur $[0,1[$, on a

$$P(-b\ln(1-U)+a \leqslant x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leqslant a \\ 1-e^{-\frac{x-a}{b}} \text{ si } x > a \end{cases}$$

On en déduit, grâce à sa fonction de répartition, que la variable aléatoire $\underline{-b\ln(1-U)+a}$ suit une loi $\underline{\mathcal{E}(a,b)}$.

(b)
```
function tirage(a,b:real):real;
begin
  tirage:=-b*ln(1-random)+a;
end;
```

Partie III : Estimation des paramètres a et b

1.
```
begin
  randomize;
  readln(a,b,n);
  X:=tirage(a,b);
  S:=X;
  Y:=X;
  for i:=2 to n do begin
                   X:=tirage(a,b);
                   S:=S+X;
                   if X<Y then Y:=X;
                   end;
end.
```

2. $E(S_n) = E(X_1) + \cdots + E(X_n)$ car l'espérance est linéaire et, les X_i étant indépendantes, on a également $V(S_n) = V(X_1) + \cdots + V(X_n)$. Les X_i suivent toutes la loi $\mathcal{E}(a,b)$ on obtient $\boxed{E(S_n) = n(b+a), \quad V(S_n) = nb^2.}$

3. $X_i - a$ suit la loi exponentielle de paramètre $1/b$, soit la loi Gamma de paramètres b et 1.
Les variables aléatoires X_i sont indépendantes donc les variables aléatoires $X_i - a$ également, d'où par stabilité pour la somme de certaines lois Gamma indépendantes, on obtient que

$$S_n - na = (X_1-a) + \cdots + (X_n - a) \underline{\text{ suit la loi Gamma de paramètres } b \text{ et } n.}$$

Une densité de $S_n - na$ est donc

$$f_{S_n-na}(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\frac{x}{b}}x^{n-1}}{(n-1)!b^n} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0. \end{cases}$$

Pour $x \in \mathbb{R}$, $P(S_n \leqslant x) = P(S_n - na \leqslant x - na)$ d'où, par dérivation, une densité de S_n est

$$f_{S_n}(x) = f_{S_n - na}(x - na) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\frac{x-na}{b}}(x-na)^{n-1}}{(n-1)!b^n} & \text{si} \quad x - na > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leqslant na. \end{cases}$$

4. Pour $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} P(Y_n \leqslant x) &= 1 - P(Y_n > x) \\ &= 1 - P(\bigcap_{i=1}^{n}[X_i > x]) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{n} P(X_i > x) \text{ car les } X_i \text{ sont indépendantes} \\ &= 1 - (1 - F_{X_1}(x))^n \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ 1 - e^{-\frac{n(x-a)}{b}} & \text{si } x \geqslant a \end{cases} \end{aligned}$$

D'où $\underline{Y_n \text{ suit la loi } \mathcal{E}(a, \frac{b}{n})}$ et $\boxed{E(Y_n) = a + \dfrac{b}{n}, \quad V(Y_n) = \dfrac{b^2}{n^2}.}$

5. (a) $\boxed{b_{Y_n}(a) = E(Y_n) - a = \dfrac{b}{n}; \quad r_{Y_n}(a) = b_{Y_n}(a)^2 + V(Y_n) = 2\dfrac{b^2}{n^2}.}$

(b) Pour une variable aléatoire Y admettant un moment d'ordre 2 on a

$$\forall \varepsilon > 0, P(|Y| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{E(Y^2)}{\varepsilon^2}.$$

On déduit de ce qui précède que

$$\forall \varepsilon > 0, 0 \leqslant P(|Y_n - a| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{E((Y_n - a)^2)}{\varepsilon^2} = \frac{r_{Y_n}(a)}{\varepsilon^2} = \frac{2b^2}{\varepsilon^2 n^2},$$

d'où, par encadrement, $\lim\limits_{n \to +\infty} P(|Y_n - a| \geqslant \varepsilon) = 0$, c'est-à-dire que (Y_n) converge en probabilité vers a : $\underline{(Y_n) \text{ est une suite d'estimateurs de } a \text{ convergente}}$, de plus $\lim\limits_{n \to +\infty} b_{Y_n}(a) = 0$, elle est donc $\underline{\text{asymptotiquement sans biais}}$.

6. (a)

$$\begin{aligned} b_{Z_n}(b) &= E(Z_n) - b \\ &= \frac{1}{n}E(S_n) - E(Y_n) - b \\ &= a - (a + \frac{b}{n}) \\ &= \underline{\frac{-b}{n}}. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} r_{Z_n}(b) &= V(Z_n) + b_{Z_n}(b)^2 \\ &= \frac{b^2}{n^2} + \frac{1}{n^2}V(S_n) + V(Y_n) - \frac{2}{n}Cov(S_n, Y_n) \\ &= \frac{b^2}{n^2} + \frac{b^2}{n} + \frac{b^2}{n^2} - \frac{2}{n}Cov(S_n, Y_n) \\ &= \underline{\frac{2b^2}{n^2} + \frac{b^2}{n} - \frac{2}{n}Cov(S_n, Y_n)}. \end{aligned}$$

(c) D'après le préliminaire :

$$0 \leqslant (Cov(S_n,Y_n))^2 \leqslant V(S_n)V(Y_n) = \frac{b^4}{n}.$$

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} Cov(S_n,Y_n) = 0$ et par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} r_{Z_n}(b) = 0$.

De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} b_{Z_n}(b) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-b}{n} = 0$ et, comme à la question précédente, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$P(|Z_n - b| > \varepsilon) \leqslant \frac{r_{Z_n}(b)}{\varepsilon^2}.$$

On en conclut que (Z_n) est une suite d'estimateurs de b asymptotiquement sans biais, convergente.

7. (a)

$$L(a,b) = \prod_{i=1}^{n} f_{a,b}(x_i) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{b} e^{-\frac{x_i-a}{b}} & \text{si} \quad \forall i \in \{1,\ldots,n\}, x_i \geqslant a \\ 0 & \text{si l'un des } x_i \text{ au moins est } < a \end{cases}$$

Or

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{b} e^{-\frac{x_i-a}{b}} = \frac{1}{b^n} e^{-\frac{1}{b}\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)} = \frac{1}{b^n} e^{-\frac{1}{b}(\sum_{i=1}^{n} x_i - na)}.$$

En posant $\boxed{A = \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n} x_i \text{ et } S = \sum_{i=1}^{n} x_i}$, comme les x_i ne sont pas tous égaux, on a $S > nA$

et on obtient

$$L(a,b) = \begin{cases} \frac{1}{b^n} e^{-\frac{1}{b}(S-na)} & \text{si} \quad A \geqslant a \\ 0 & \text{si } A < a \end{cases}$$

On reconnaît la fonction L_n de la partie **I**.

(b) Sur l'échantillon $(x_1,\ldots,x_n)$ on a comme estimation de a, à l'aide de Y_n, $y_n = \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n} x_i = A = a_0$

et, comme estimation de b, à l'aide de Z_n, $z_n = \dfrac{1}{n}(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i) - y_n = \dfrac{S}{n} - A = b_0$.

Remarque : La fonction L s'appelle la vraisemblance ("likelihood" en anglais). La recherche d'un maximum de L est une méthode de recherche de "bons" estimateurs.

RAPPORT

Je remercie les correcteurs qui, par leur rapport détaillé de correction, m'ont permis d'établir les remarques suivantes.

Bilan de la correction des copies
On est parfois frappé par le manque de soin dont font preuve certains candidats. Les copies sont trop souvent mal présentées, illisibles, raturées, surchargées. De même les solutions sont négligées, mal construites, bâclées, insuffisantes, bourrées d'erreurs grossières.
Négliger la quantité au détriment de la qualité de la copie n'est pas une bonne solution.
Un bon candidat se doit de :
- être rigoureux dans l'élaboration de la solution.
- connaître son cours et vérifier les hypothèses d'utilisation d'un théorème (le théorème de composition des dl, théorème de stabilité des lois gamma, condition nécessaire d'extremum local, le risque quadratique, la convergence au niveau des estimateurs, le lien entre fonction de répartition et densité d'une variable aléatoire à densité).
- ne pas bouder l'informatique.

Les correcteurs souhaitent pour les années futures, de la part des candidats, une nette amélioration dans la présentation des copies, la clarté de l'expression, la précision des justifications, l'encadrement des résultats et l'orthographe.

Plus encore que l'an passé les résultats reflètent une trop grande hétérogénéité du niveau des candidats et de leur investissement dans la matière. On peut constater au fil des ans, une dégradation dans la manière de calculer de nos étudiants.

Malgré toutes ces remarques négatives, il faut souligner que les correcteurs ont pu lire aussi un nombre non négligeable de très bonnes, voire d'excellentes copies.

Le sujet a permis, plus que les années passées, de classer les candidats.

Avec un écart-type de **5.77** et une moyenne générale de **10.65** cette épreuve semble avoir joué son rôle discriminant.

Exercice 1
Un certain nombre de candidats ne connaissent pas le développement de ln(1+x), composent des développements d'ordres différents (ordre 1 pour 1-exp(x) et ordre 2 pour ln), pensent que la série harmonique converge car son terme général tend vers 0 (!?), oublient l'hypothèse de signe dans l'utilisation des équivalents du terme général d'une série, ne savent pas étudier le sens de variation d'une suite et en particulier oublient l'hypothèse de signe pour l'utilisation du rapport un+1/un.

Exercice 2

Dans l'ensemble, cet exercice est le plus mal traité. Les notions d'algèbre ne sont pas maîtrisées et les réponses sont superficielles. Souvent la formule du produit scalaire est fausse, parce qu'on ne se donne pas la peine d'écrire correctement le terme générique d'un produit de matrice et celui de la transposée. Démontrer que la forme bilinéaire est positive et définie à partir d'une formule fausse est voué à l'échec. Beaucoup oublient l'hypothèse A réelle ou même symétrique pour justifier qu'elle est réellement diagonalisable avec P orthogonale. Beaucoup de confusions entre la norme euclidienne et la norme N définie dans l'exercice. Certains font des produits de matrices dans n'importe quel ordre parce que Tr (AB) = Tr (BA). Certains veulent utiliser le théorème de Cauchy Schwarz pour la norme euclidienne pour démontrer l'inégalité 2f).

Problème

Préliminaire :

Le préliminaire n'est pas bien compris par les candidats, notamment la justification de l'inégalité. Il est à remarquer que certains ne savent pas calculer correctement le discriminant d'un polynome du second degré. La formule de V(X+Y) est souvent rappelée sans tenir compte de la définition donnée dans le sujet. L'hypothèse V(X)>0 est la plupart du temps éludée, et $V(X+\lambda Y)=0$ suggère à pas mal d'étudiants que Y et X sont proportionnelles sans préciser presque sûrement, voire à certains que X et Y sont indépendantes !

Partie I :

Peu de copies montrent que L est C1, et la plupart du temps la question est réglée avec un lapidaire “produit et somme de fonctions C1” sans plus de précision. Dans la question 3), la dérivée de g n est pas correctement calculée et l'étape b0>0 le plus souvent ignorée. L'argumentation de la question 4) est la plupart du temps confuse et mal organisée.

Partie II :

La justification d'une densité de probabilité est souvent vague, voire incomplète. Il faudrait tout de même que les candidats connaissent ces propriétés, ainsi que la définition d'une fonction de répartition. La loi de Y est souvent devinée, mais non correctement justifiée. Le cas x<a est souvent oublié dans le calcul des fonctions de répartitions ou densités. Il est étonnant de constater qu'un nombre non négligeable d'étudiants ne connaissent pas l'espérance ou la variance d'une loi exponentielle. L'étude d'une intégrale généralisée n'est pas maîtrisée par les étudiants, qui ont souvent recours à une démarche par récurrence, beaucoup plus lourde, et quitte à mettre en œuvre stoïquement une deuxième démarche par récurrence pour le calcul des moments. Un certain nombre de procédures “tirage” donnent un nom différent à la variable du résultat ne permettant pas la restitution de celui-ci.

Partie III :
Dans de très nombreux programmes la boucle "for...to" ne contient pas d'appel à la procédure tirage, ou alors de manière anarchique, et le programme n'a plus rien à voir avec ce qui est demandé. L'initialisation mériterait également plus de soin. La stabilité des lois Γ et l'indépendance des variables sont souvent mentionnées, mais trop peu d'étudiants connaissent la forme de leur densité et peuvent en déduire la loi de Sn (certains croient même reconnaître des lois normales...). La détermination de la loi du minimum d'un n-uplet de variables n'est pas suffisamment connue des étudiants, pas plus que l'inégalité de Markov où l'on voit souvent Var(X) à la place de $E(X^2)$. Enfin dans les dernières questions, la convergence en probabilité utilisant cette inégalité n'est que rarement abordée.