Annales concours ecricome 2006

Mathématiques - OPTION ÉCONOMIQUE

ESPRIT GÉNÉRAL

Objectifs de l'épreuve

- Vérifier chez les candidats l'existence des bases nécessaires pour des études supérieures de management.
- Apprécier l'aptitude à lire et comprendre un énoncé, choisir un outil adapté et l'appliquer (théorème...).
- Apprécier le bon sens des candidats et la rigueur du raisonnement.

Sujets

- Trois exercices indépendants portant sur les trois domaines du programme

Instruments de calcul interdits, tables de lois fournies

Evaluation

Exercices de valeur sensiblement égale.

ÉPREUVE 2006

Durée : 4 heures

Aucun document et instrument de calcul n'est autorisé.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

SUJET

1. EXERCICE.

On considère la fonction f définie pour tout réel x par :

$$f(x) = x + 1 + 2e^x$$

ainsi que la fonction g des deux variables réelles x et y définie par :

$$g(x, y) = e^x(x + y^2 + e^x)$$

1.1. Recherche d'extremum local de g.

1. Etudier les variations de f et donner les limites de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ et $-\infty$.

2. Justifier l'existence d'une asymptote oblique au voisinage de $-\infty$ et donner la position de la courbe représentative de f par rapport à cette asymptote.

3. Déduire des variations de f l'existence d' un unique réel α, élément de l'intervalle $[-2,-1]$ tel que $f(\alpha)=0$. (on rappelle que $e \simeq 2,7$).

4. Déterminer le seul point critique de g, c'est-à-dire le seul couple de $\mathbb{R}^2$, en lequel g est susceptible de présenter un extremum.

5. Vérifier que g présente un extremum relatif β en ce point. Est-ce un maximum ou un minimum ?

6. Montrer que l'on a :

$$4\beta+\alpha^2-1=0$$

1.2. Etude d'une suite réelle.

On s'intéresse à la suite $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ définie par son premier terme $u_0=-1$ et par la relation

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1}=u_n-\frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$$

1. Prouver que f est convexe sur $\mathbb{R}$. En déduire que pour tous réels x et t :

$$f(x)+(t-x)f'(x) \leqslant f(t)$$

2. En déduire l'inégalité suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \alpha \leqslant u_{n+1}$$

Puis que pour tout entier naturel n :

$$\alpha \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant -1$$

En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers un réel à préciser.

3. On admet que pour tout x de l'intervalle $[-2,-1]$:

$$0 \leqslant (x-\alpha)f'(x)-f(x) \leqslant \frac{(x-\alpha)^2}{e}$$

a. Prouver alors que pour tout entier naturel n :

$$0 \leqslant u_{n+1}-\alpha \leqslant \frac{(u_n-\alpha)^2}{e}$$

b. Puis démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$0 \leqslant u_n-\alpha \leqslant \frac{1}{e^{2^n-1}}$$

4. Ecrire un programme en langage Pascal permettant, lorsque l'entier naturel p est donné par l'utilisateur, de calculer une valeur approchée de α, de telle sorte que l'on ait :

$$0 \leqslant u_n - \alpha \leqslant 10^{-p}$$

2. EXERCICE.

Pour tout entier naturel n, on définit la fonction f_n de la variable réelle x par :

$$f_n(x) = x^n \exp(-\frac{x^2}{2})$$

1. Justifier que $f_n(x)$ est négligeable devant $\frac{1}{x^2}$ au voisinage de $+\infty$.

2. Prouver la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_n(x)dx$.

3. On pose $I_n = \int_0^{+\infty} f_n(x)dx$.

   a. A l'aide d'une intégration par parties portant sur des intégrales définies sur le segment $[0, A]$, avec $A \geqslant 0$, prouver que pour tout entier naturel n :

$$I_{n+2} = (n+1)I_n$$

   b. En utilisant la loi normale centrée réduite, justifier que :

$$I_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

   c. Donner la valeur de I_1.

   d. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$I_{2n} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{(2n)!}{2^n n!}$$

$$I_{2n+1} = 2^n n!$$

4. Soit f la fonction définie pour tout réel x par :

$$\begin{cases} f(x) = f_1(x) & \text{si } x \geqslant 0 \\ f(x) = 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

   a. Démontrer que f est une densité de probabilité.

b. Soit X une variable aléatoire réelle qui admet f pour densité de probabilité.

i. Justifier que X admet une espérance $E(X)$, et préciser sa valeur.

ii. Justifier que X admet une variance $V(X)$, et préciser sa valeur.

5. On désigne par F et G les fonctions de répartitions respectives de X et de $Y = X^2$.

a. Exprimer $G(x)$ en fonction de $F(x)$ en distinguant les deux cas : $x < 0$ et $x \geqslant 0$.

b. En déduire que Y est une variable à densité. Reconnaître la loi de Y et donner la valeur de $E(Y)$ et $V(Y)$.

3. EXERCICE.

E désigne l'espace des fonctions polynômes à coefficients réels, dont le degré est inférieur ou égal à l'entier naturel 2.

3.1. Etude d'un endomorphisme de E.

On considère l'application f qui, à tout élément P de E, associe la fonction polynôme Q telle que :

$$\text{pour tout } x \text{ réel :} \qquad Q(x) = (x-1)P'(x) + P(x)$$

et $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2)$ la base canonique de E définie par :

$$\text{pour tout } x \text{ réel :} \qquad P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = x^2$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.

2. Vérifier que la matrice A de f dans $\mathcal{B}$, s'écrit sous la forme :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Quelles sont les valeurs propres de f ? f est-il diagonalisable ? f est-il un automorphisme de E ?

4. Déterminer l'image par f des fonctions polynômes R_0, R_1, R_2 définies par :

$$\text{pour tout } x \text{ réel :} \qquad R_0(x) = 1, R_1(x) = x-1, R_2(x) = (x-1)^2$$

5. Montrer que $\mathcal{B}' = (R_0, R_1, R_2)$ est une base de vecteurs propres de f. Ecrire la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ ainsi que la matrice D de f dans la base $\mathcal{B}'$.

6. Vérifier que pour tout réel x :

$$\begin{cases} R_2(x) + 2R_1(x) + R_0(x) = P_2(x) \\ R_1(x) + R_0(x) = P_1(x) \end{cases}$$

En déduire la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$.

7. Ecrire A^{-1} en fonction de D^{-1}. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$\left[A^{-1}\right]^n = P\left[D^{-1}\right]^n P^{-1}$$

et expliciter la troisième colonne de la matrice $[A^{-1}]^n$.

3.2. Suite d'épreuves aléatoires.

On dispose d'une urne qui contient trois boules numérotées de 0 à 2.
On s'intéresse à une suite d'épreuves définies de la manière suivante :
- La première épreuve consiste à choisir au hasard une boule dans cette urne.
- Si j est le numéro de la boule tirée, on enlève de l'urne toutes les boules dont le numéro est strictement supérieur à j, le tirage suivant se faisant alors dans l'urne ne contenant plus que les boules numérotées de 0 à j.

On considère alors la variable aléatoire réelle X_k égale au numéro de la boule obtenue à la $k^{ème}$ épreuve ($k \geqslant 0$).
On note alors U_k la matrice unicolonne définie par :

$$U_k = \begin{pmatrix} p\left[X_k = 0\right] \\ p\left[X_k = 1\right] \\ p\left[X_k = 2\right] \end{pmatrix}$$

où $p\left[X_k = j\right]$ est la probabilité de tirer la boule numéro j à la $k^{ème}$ épreuve.

On convient de définir la matrice U_0 par :

$$U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la loi de X_2 (On pourra s'aider d'un arbre). Calculer l'espérance et la variance de X_2.

2. Par utilisation de la formule des probabilités totales, prouver que pour tout entier naturel k :

$$U_{k+1} = A^{-1}U_k$$

3. Ecrire U_k en fonction de A^{-1} et U_0.

4. Pour tout k de $\mathbb{N}$, donner la loi de X_k et vérifier que l'on a :

$$\lim_{k\to+\infty} p\left[X_k = 0\right] = 1, \quad \lim_{k\to+\infty} p\left[X_k = 1\right] = 0, \quad \lim_{k\to+\infty} p\left[X_k = 2\right] = 0.$$

CORRIGÉ

1. EXERCICE.

On considère la fonction f définie pour tout réel x par :

$$f(x) = x + 1 + 2e^x$$

ainsi que la fonction g des deux variables réelles x et y définie par :

$$g(x, y) = e^x(x + y^2 + e^x)$$

1.1. Recherche d'extremum local de la fonction g.

1. f est définie, dérivable sur $\mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) = 1 + 2e^x > 0$$

La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$ et :

$$\lim_{x \mapsto +\infty} f(x) = +\infty \text{ car } \lim_{x \mapsto +\infty} e^x = +\infty$$
$$\lim_{x \mapsto -\infty} f(x) = -\infty \text{ car } \lim_{x \mapsto -\infty} e^x = 0$$

2. Existence d'une asymptote oblique au voisinage de $-\infty$:

$$\lim_{x \mapsto -\infty} f(x) - (x + 1) = \lim_{x \mapsto -\infty} 2e^x = 0$$

Il en découle que la droite d'équation $y = x+1$ est asymptote à la représentation de f et puisque $f(x) - (x + 1) = 2e^x > 0$, la courbe représentative de f est au-dessus de cette asymptote.

3. La fonction f est continue strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. ($\lim_{x \mapsto +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \mapsto -\infty} f(x) = -\infty$). Le réel 0 possède un unique antécédent par f. Il existe un réel α et un seul tel que $f(\alpha) = 0$. De plus $f(-2) = -1 + \dfrac{2}{e^2} < 0$, $f(-1) = \dfrac{2}{e} > 0$ donc :

$$-2 < \alpha < -1$$

4. Déterminons le seul point critique de g en annulant les dérivées partielles premières de g.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x} = e^x(x + y^2 + e^x) + e^x(1 + e^x) = e^x(x + y^2 + 2e^x + 1) \\ \\ \dfrac{\partial g}{\partial y} = 2ye^x = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2e^x + 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = 0 \end{cases}$$

le seul couple de $\mathbb{R}^2$ en lequel g est susceptible de présenter un extremum est donc le couple $(\alpha, 0)$.

5. Calculons les dérivées partielles secondes de f :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} = e^x(x+y^2+2e^x+1)+e^x(2e^x+1) = e^x(x+y^2+4e^x+2) \\ \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 2e^x \\ \dfrac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} = 2ye^x \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(\alpha,0) = e^\alpha(\alpha+4e^\alpha+2) = e^\alpha(2\alpha+4e^\alpha+2-\alpha) = e^\alpha(2f(\alpha)-\alpha) = -\alpha \\ t = \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 2e^\alpha \\ s = \dfrac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} = 0 \end{cases}$$

$$rt - s^2 = -2\alpha e^{2\alpha} > 0 \text{ car } \alpha < 0$$

g présente donc un minimum relatif $\beta = g(\alpha,0)$ en ce point.

6. On a :

$$\beta = g(\alpha,0) = e^\alpha(\alpha+e^\alpha) = -\frac{\alpha+1}{2}(\alpha - \frac{\alpha+1}{2}) = -\frac{\alpha+1}{2}\frac{\alpha-1}{2} = -\frac{\alpha^2-1}{4}$$

Soit :

$$4\beta + \alpha^2 - 1 = 0$$

1.2. Etude d'une suite réelle.

On s'intéresse à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par son premier terme $u_0 = -1$ et par la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$$

1. f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f''(x) = 2e^x > 0$$

La dérivée seconde est positive donc f est convexe sur $\mathbb{R}$. La courbe représentative de f est au-dessus de toute tangente. Donc pour tous réels x et t :

$$f(x) + (t-x)f'(x) \leqslant f(t)$$

2. Pour $t = \alpha$ et $x = u_n$, on obtient :

$$\begin{aligned} & f(u_n) + (\alpha - u_n)f'(u_n) \leqslant f(\alpha) = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{f(u_n)}{f'(u_n)} + \alpha - u_n \leqslant 0 \text{ car la dérivée de } f \text{ est positive} \\ \Leftrightarrow & \alpha \leqslant u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)} = u_{n+1} \end{aligned}$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \alpha \leqslant u_{n+1}$$

On sait que pour tout entier $n \quad \alpha \leqslant u_{n+1}$. De plus $\alpha \leqslant u_0 = -1$. Donc pour tout entier $n \quad \alpha \leqslant u_n$. La fonction f étant croissante, $f(\alpha) = 0 \leqslant f(u_n)$. La dérivée de f étant positive, on peut en déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} - u_n = -\frac{f(u_n)}{f'(u_n)} \leqslant 0$$

La suite étant décroissante :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n \leqslant u_0$$

Conclusion : Pour tout entier naturel n :

$$\alpha \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant u_0 = -1$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante, minorée par α est convergente vers un réel l solution de l'équation :

$$l = l - \frac{f(l)}{f'(l)} \text{ (} f \text{ et } f' \text{ sont continues sur I)}$$

Soit :

$$\frac{f(l)}{f'(l)} = 0 \Leftrightarrow f(l) = 0 \Leftrightarrow l = \alpha$$

a. Pour $x = u_n$ on obtient :

$$\begin{aligned} & 0 \leqslant -f(u_n) + (u_n - \alpha)f'(u_n) \leqslant \frac{(u_n - \alpha)^2}{e} \\ \Leftrightarrow & 0 \leqslant -\frac{f(u_n)}{f'(u_n)} + (u_n - \alpha) \leqslant \frac{(u_n - \alpha)^2}{e} \\ \Leftrightarrow & 0 \leqslant u_{n+1} - \alpha \leqslant \frac{(u_n - \alpha)^2}{ef'(u_n)} \end{aligned}$$

puis que pour tout x réel $f'(x) = 1 + 2e^x > 1$, on peut écrire que :

$$0 \leqslant u_{n+1} - \alpha \leqslant \frac{(u_n - \alpha)^2}{e}$$

b. Par récurrence, montrons que :

$$0 \leqslant u_n - \alpha \leqslant \frac{1}{e^{2^n-1}} \quad \mathcal{H}_n$$

$\mathcal{H}_0$ est vraie car l'on sait que $-2 < \alpha < -1 = u_0$ donc que $0 \leqslant u_0 - \alpha = -1 - \alpha \leqslant 1 = \frac{1}{e^{2^0-1}}$.
Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie pour un certain n et montrons que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie

$$0 \leqslant u_{n+1} - \alpha \leqslant \frac{(u_n-\alpha)^2}{e} \leqslant \frac{1}{e}\left[\frac{1}{e^{2^n-1}}\right]^2$$
$$0 \leqslant u_{n+1} - \alpha \leqslant \frac{1}{e}\left[\frac{1}{e^{(2^n-1)2}}\right] = \frac{1}{e}\left[\frac{1}{e^{2^{n+1}-2}}\right] = \frac{1}{e^{2^{n+1}-1}}$$

$\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie et d'après l'axiome de récurrence, pour tout entier n, $\mathcal{H}_n$ est vraie.

3. Voici un programme en langage Pascal permettant d'obtenir une valeur approchée de α de telle sorte que l'on ait :

$$0 \leqslant u_n - \alpha \leqslant 10^{-p}$$

l'entier naturel p étant donné par l'utilisateur de ce programme.

```
Program ecricome ;
var a,b,c : real;
   n ,p : integer ;
begin
 readln(p);
 a :=-1;
 b :=1;
 c :=0;
 n :=0;
 while lnc>-p*ln10 do
    begin
       a :=a-1+a/(1+2*exp(a));
       b :=2*b;
       c :=exp(1-b);
       n :=n+1;
       end;
 writeln (a);
end.
```

2. EXERCICE.

Pour tout entier naturel n, on définit la fonction f_n de la variable réelle x par :

$$f_n(x) = x^n \exp(-\frac{x^2}{2})$$

1. Par prépondérance de la fonction exponentielle sur la fonction puissance, on peut écrire que :
$$\lim_{x\to+\infty} x^2 f_n(x) = \lim_{x\to+\infty} x^{n+2}\exp(-\frac{x^2}{2}) = 0$$
$f_n(x)$ est donc négligeable devant $\dfrac{1}{x^2}$ au voisinage de $+\infty$.

2. La fonction f_n est continue positive sur $\mathbb{R}$ .Au voisinage de l'infini $f_n(x) = o(\dfrac{1}{x^2})$, l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ est convergente donc par comparaison l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)dx$ est convergente.

3. On pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)dx$.

   a. Pour tout n les fonctions $x \mapsto x^n$ et $exp(-\dfrac{x^2}{2})$ sont de classe C^1sur $[0, x]$, avec $x \geqslant 0$. A l'aide d'une intégration par parties on obtient :
$$\int_0^x t^n \exp(-\frac{t^2}{2})dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\exp(-\frac{t^2}{2})\right]_0^x + \frac{1}{n+1}\int_0^x t^{n+2}\exp(-\frac{t^2}{2})dt$$
$$= \underbrace{\frac{x^{n+1}}{n+1}\exp(-\frac{x^2}{2})}_{\to 0} + \frac{1}{n+1}\int_0^x t^{n+2}\exp(-\frac{t^2}{2})dt$$
   Chacune des intégrales impropres étant convergente par passage à la limite quand x tend vers $+\infty$, on peut écrire :
$$I_{n+2} = (n+1)I_n$$

   b. Par parité de la fonction f_0
$$I_0 = \int_0^{+\infty} \exp(-\frac{x^2}{2})dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\frac{x^2}{2})dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\frac{x^2}{2})dx$$
$$I_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\frac{x^2}{2})dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$
   puisque l'on a reconnu la densité de probabilité de la loi normale centrée réduite.

   c. Puis
$$I_1 = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x t\exp(-\frac{t^2}{2})dx = \lim_{x\to+\infty}\left[-\exp(-\frac{t^2}{2})\right]_0^x$$
$$I_1 = \lim_{x\to+\infty} 1 - \exp(-\frac{x^2}{2}) = 1$$

d. Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$\left.\begin{aligned} I_{2n} &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{(2n)!}{2^n n!} \\ I_{2n+1} &= 2^n n! \end{aligned}\right. \quad \mathcal{H}_n$$

$\mathcal{H}_0$ est vraie car $I_0 = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ et $I_1 = 1$. Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie pour un certain n et montrons que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

$$I_{2n+2} = (2n+1)I_{2n} = (2n+1)\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{(2n)!}{2^n n!}$$

$$I_{2n+2} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{2n+2}\frac{(2n)!}{2^n n!}\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{(2n+2)!}{2^{n+1}(n+1)!}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$I_{2n+3} = (2n+2)I_{2n+1} = (2n+2)2^n n! = (n+1)!2^{n+1}$$

$\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie et d'après l'axiome de récurrence, pour tout entier n, $\mathcal{H}_n$ est vraie.

4. Soit f la fonction définie pour tout réel x par :

$$\begin{cases} f(x) = f_1(x) & \text{si } x \geqslant 0 \\ f(x) = 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

a. f est continue, positive sur $\mathbb{R}$. Les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_1(x)dx$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} 0dx$ sont convergentes donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)dx = 0 + \int_0^{+\infty} f_1(x)dx = 1$$

f est bien une densité de probabilité.

b. Soit X une variable aléatoire réelle qui admet f pour densité de probabilité.

i. X admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ converge c'est-à-dire si $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_2(x)dx$ converge ce qui est le cas et :

$$E(X) = I_2 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{2!}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

ii. X admet une variance si et seulement si $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx$ converge c'est-à-dire si $\int\limits_{0}^{+\infty} f_3(x)dx$ converge ce qui est le cas et :

$$E(X^2) = I_3 = 2$$

D'ou la variance de X

$$V(X) = 2 - \frac{\pi}{2}$$

5. On désigne par F et G les fonctions de répartitions respectives de X et de $Y = X^2$.

a. Exprimons $G(x)$ en fonction de $F(x)$ en distingant les deux cas : $x < 0$ et $x \geqslant 0$. Pour tout réel x,

$$G(x) = P\left[Y \leqslant x\right] = P\left[X^2 \leqslant x\right]$$

Pour $x < 0$ $\quad G(x) = P\left[X^2 \leqslant x\right] = 0$

Pour $x > 0$

$G(x) = P\left[X^2 \leqslant x\right] = P\left[0 \leqslant X \leqslant \sqrt{x}\right] = F(\sqrt{x})$

$G(x) = \int\limits_{0}^{\sqrt{x}} t\exp(-\dfrac{t^2}{2})dx = \left[-\exp(-\dfrac{t^2}{2})\right]_0^{\sqrt{x}} = 1 - \exp(-\dfrac{x}{2})$

b. G est continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0 donc Y est une variable à densité. La loi de Y est une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{2}$. On sait que :

$$E(Y) = \frac{1}{\lambda} = 2 \text{ et } V(Y) = \frac{1}{\lambda^2} = 4$$

3. EXERCICE.

E désigne l'espace des fonctions polynômes à coefficients réels, dont le degré est inférieur ou égal à l'entier naturel 2.

3.1. Etude d'un endomorphisme de E.

On considère l'application f qui, à tout élément P de E, associe la fonction polynôme Q définie par :

$$Q(x) = (x-1)P'(x) + P(x)$$

1. Montrons que f est un endomorphisme de E. Pour tous P_1, P_2 de E, et tous réels α et x

$$f(P_1 + \alpha P_2)(x) = (x-1)(P_1 + \alpha P_2)'(x) + (P_1 + \alpha P_2)(x)$$
$$= (x-1)(P_1{}'(x) + P_1(x) + \alpha(x-1)(P_2{}'(x) + P_2(x)) = f(P_1)(x) + \alpha f(P_2)(x)$$

f est donc une application linéaire. De plus $\deg Q \leqslant Max(\deg P' + 1, \deg P) \leqslant 2$. Q est élément de E donc f est un endomorphisme de E.

2. Soit $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2)$ la base canonique de E où P_k sont les fonctions polynômes $x \mapsto x^k$ pour $0 \leqslant k \leqslant 2$. Calculons l'image des vecteurs de la base canonique.

$$f(P_0)(x) = P_0(x) = 1$$
$$f(P_1) = (x-1) + x = 2x - 1$$
$$f(P_2) = (x-1)\,2x + x^2 = 3x^2 - 2x$$

En écrivant la matrice des coordonnées des images des vecteurs de bases relativement à cette base, nous obtenons :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Les valeurs propres de f figurent sur la diagonale de la matrice triangulaire.

$$SpA = \{1, 2, 3\}$$

f possède trois valeurs propres distinctes dans un espace de dimension 3, f est donc diagonalisable. Le spectre ne contient pas la valeur propre 0 donc f est bijective et f est un automorphisme de E.

4. Déterminons l'image par f des fonctions polynômes $R_k : x \mapsto (x-1)^k$ pour $0 \leqslant k \leqslant 2$.

$$f(R_0)(x) = R_0(x) = 1$$
$$f(R_1)(x) = (x-1) + (x-1) = 2\,(x-1) = 2R_1(x)$$
$$f(R_2)(x) = 2\,(x-1)^2 + (x-1)^2 = 3\,(x-1)^2 = 3R_2(x)$$

5. Il en découle que $\mathcal{B}' = (R_0, R_1, R_2)$ est une base de vecteurs propres de f. La matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ ainsi que la matrice D de f dans la base $\mathcal{B}'$ s'écrivent :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

6. Pour tout réel x :

$$\begin{cases} R_2(x) + 2R_1(x) + R_0 = (x-1)^2 + 2(x-1) + 1 = P_2(x) \\ R_1(x) + R_0(x) = x - 1 + 1 = x = P_1(x) \end{cases}$$

En écrivant les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ relativement à la base $\mathcal{B}$, nous en déduisons la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$.

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

7. On a :

$$A^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$$

Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$\left[A^{-1}\right]^n = P\left[D^{-1}\right]^n P^{-1} \quad \mathcal{H}_n$$

$\mathcal{H}_0$ est vraie puisque $[A^{-1}]^0 = I = PIP^{-1}P[D^{-1}]^0 P^{-1}$. Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie pour un certain n et montrons que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

$$\left[A^{-1}\right]^{n+1} = \left[A^{-1}\right]\left[A^{-1}\right]^n = P\left[D^{-1}\right]P^{-1}P\left[D^{-1}\right]^n P^{-1} = P\left[D^{-1}\right]^{n+1} P^{-1}$$

$\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie et d'après l'axiome de récurrence, pour tout entier n, $\mathcal{H}_n$ est vraie. Explicitons la troisième colonne de la matrice $[A^{-1}]^n$.

$$[A^{-1}]^n = P[D^{-1}]^n P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1/2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (1/3)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & (1/2)^n & 2(1/2)^n \\ 0 & 0 & (1/3)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \times & \times & 1 - 2(1/2)^n + (1/3)^n \\ \times & \times & 2(1/2)^n - 2(1/3)^n \\ \times & \times & (1/3)^n \end{pmatrix}$$

3.2. Suite d'épreuves aléatoires.

On dispose d'une urne qui contient des boules numérotées de 0 à 2.
On s'intéresse à une suite d'épreuves définies de la manière suivante :
- La première épreuve consiste à choisir au hasard une boule dans cette urne.
- Si j est le numéro de la boule tirée, on enlève de l'urne toutes les boules dont le numéro est strictement supérieur à j, le tirage suivant se faisant alors dans l'urne ne contenant plus que les boules numérotées de 0 à j.

On considère alors la variable aléatoire réelle X_k égale au numéro de la boule obtenue à la $k^{ème}$ épreuve ($k \geqslant 0$).
On note alors U_k la matrice unicolonne définie par :

$$U_k = \begin{pmatrix} p\left[X_k = 0\right] \\ p\left[X_k = 1\right] \\ p\left[X_k = 2\right] \end{pmatrix}$$

où $p\left[X_k = j\right]$ est la probabilité de tirer la boule numéro j à la $k^{ème}$ épreuve .

On convient de définir la matrice U_0 par :

$$U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminons la loi de X_2.

$$\begin{array}{ccccc}
\overset{\frac{1}{3}}{\nearrow} & X_1 = 0 & \overset{1}{\rightarrow} & X_2 = 0 \\
 & & \overset{\frac{1}{2}}{\nearrow} & X_2 = 0 \\
\overset{\frac{1}{3}}{\rightarrow} & X_1 = 1 & \overset{\frac{1}{2}}{\rightarrow} & X_2 = 1 \\
 & & \overset{\frac{1}{3}}{\nearrow} & X_2 = 0 \\
\overset{\frac{1}{3}}{\searrow} & X_1 = 2 & \overset{\frac{1}{3}}{\rightarrow} & X_2 = 1 \\
 & & \overset{\frac{1}{3}}{\searrow} & X_2 = 2
\end{array}$$

Par application des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
p\left[X_2 = 0\right] &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\frac{1}{3} = \frac{11}{18} \\
p\left[X_2 = 1\right] &= \frac{1}{3}\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\frac{1}{3} = \frac{5}{18} \\
p\left[X_2 = 2\right] &= \frac{2}{18}
\end{aligned}$$

Calculons l'espérance et la variance de X_2.

$$E[X_2] = \frac{5}{18} + \frac{4}{18} = \frac{1}{2}$$
$$E^2[X_2] = \frac{5}{18} + \frac{8}{18} = \frac{13}{18}$$
$$V[X_2] = \frac{13}{18} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{17}{36}$$

2. D'aprés de la formule des probabilités totales, pour tout entier k :

$$p[X_{k+1} = 0] = 1p[X_k = 0] + \frac{1}{2}p[X_k = 1] + \frac{1}{3}p[X_k = 2]$$

$$p[X_{k+1} = 1] = 0p[X_k = 0] + \frac{1}{2}p[X_k = 1] + \frac{1}{3}p[X_k = 2]$$

$$p[X_{k+2} = 2] = 0p[X_k = 0] + 0p[X_k = 1] + \frac{1}{3}p[X_k = 2]$$

Soit :

$$U_{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} U_k = A^{-1}U_k.$$

3. Par une récurrence simple, pour tout n de $\mathbb{N}$,

$$U_n = \left[A^{-1}\right]^n U_0$$

4. Loi de X_k :

$$U_n = \begin{pmatrix} \times & \times & 1 - 2(1/2)^n + (1/3)^n \\ \times & \times & 2(1/2)^n - 2(1/3)^n \\ \times & \times & (1/3)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} . = \begin{pmatrix} 1 - 2(1/2)^n + (1/3)^n \\ 2(1/2)^n - 2(1/3)^n \\ (1/3)^n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} p[X_n = 0] \\ p[X_n = 1] \\ p[X_n = 2] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2(1/2)^n + (1/3)^n \\ 2(1/2)^n - 2(1/3)^n \\ (1/3)^n \end{pmatrix}$$

on a bien :

$$\lim_{k\to+\infty} p[X_k = 0] = 1, \lim_{k\to+\infty} p[X_k = 1] = 0, \lim_{k\to+\infty} p[X_k = 2] = 0.$$

RAPPORT

LE SUJET

La volonté du concepteur pour ce cru Ecricome 2006, option économique, était de proposer un sujet qui couvre largement les programmes de mathématique de première et de seconde année.
Objectif difficilement compatible avec le souhait d'élaborer un sujet court.
Bien que l'informatique fasse partie intégrante de ce programme, les candidats semblent l'oublier. Traditionnellement pourtant une question porte sur la rédaction d'un programme en langage Pascal. Les points qui lui sont affectés ne sont jamais négligeables.

BILAN DE LA CORRECTION DES COPIES

Exercice 1

La plupart des candidats cherche la limite de f(x)/x sans voir qu'on peut directement trouver l'asymptote à partir de l'expression de f(x).
Pour l'existence et l'unicité de la racine de l'équation f(x)=0 beaucoup travaillent uniquement sur [-2 ; -1].
La recherche du point critique est généralement correcte mais peu de candidats indiquent que la fonction est de classe C1 sur R2. On lit souvent : "dérivable sur R" ou "de classe C^1 sur R".
Pour le minimum, la méthode est assez bien connue aussi, mais il arrive souvent que l'une ou l'autre des dérivées partielles soit fausse. La vérification de la question 1.1.6. est rarement traitée et quand elle l'est, c'est sans succès.
La question sur la convexité n'a pas posé trop de difficultés et les candidats font souvent appel à la position de la courbe par rapport aux tangentes pour expliquer la première des inégalités. Mais la rédaction manque parfois de précision (les candidats ne sont pas toujours capables de dire quelle est la tangente utilisée).
Dans la question 1.2.2 les candidats se contentent souvent de dire qu'une suite décroissante et minorée converge, mais sont incapables d'en trouver la limite.

Dans la question 1.3.b, de nombreux candidats remplacent "exp de 2 puissance n" par "exp de 2n".
L'informatique a été très souvent délaissée, et peu de programmes sont vraiment satisfaisants.

Exercice 2

La première question est généralement traitée de manière correcte.
Pour la convergence de l'intégrale, les candidats se servent de la question 1 mais indiquent rarement que les fonctions sont positives et continues. Beaucoup parlent de l'intégrale de $1/x^2$ sur [0, +infini [.

La formule d'intégration par parties est généralement connue mais il y a des erreurs dans le calcul (primitives quelquefois fantaisistes).
Les récurrences de 2.3.d ont posé beaucoup de problèmes aux candidats qui se contentent souvent de l'initialisation.
Les candidats savent généralement ce qu'est une densité de probabilité, mais ne pensent pas toujours à utiliser les questions précédentes pour le calcul de l'espérance et de la variance.
Dans la question 5, de nombreux candidats se contentent de donner une expression de G en fonction de F. Rares sont ceux qui reconnaissent une loi exponentielle pour Y.

PROBLÈME

Beaucoup de candidats rappellent ce qu'est une application linéaire mais sont incapables de rédiger correctement la première question.
La matrice de f dans la base canonique n'a pas posé de problèmes, mais la détermination des valeurs propres est souvent laborieuse et beaucoup de candidats ne sont pas capables de prouver de manière convenable que f est diagonalisable et que f est un automorphisme. On donne des réponses parfois fantaisistes du type "f est diagonalisable car 0 n'est pas valeur propre" ou "A est diagonalisable donc A est inversible".
Les images des polynômes R_0, R_1 et R_2 sont généralement correctes mais peu de candidats y reconnaissent des vecteurs propres et font la recherche des sous-espaces propres de f avant de conclure. La justification du fait que (R_0, R_1, R_2) est une base est souvent approximative.

Les questions 6 et 7 n'ont pas posé trop de problèmes aux candidats qui les ont abordées (mais la troisième colonne est rarement explicitée).

Dans la partie probabilité, beaucoup de candidats trouvent la bonne réponse mais sans justifier l'emploi de la formule des probabilités totales. Un arbre est parfois fourni mais pas toujours, remplacé alors par un discours plus ou moins clair ...
La loi de X_2, l'espérance et la variance sont souvent correctes. Pour ceux qui ont le temps d'aller plus loin, on oublie souvent de vérifier que la matrice trouvée est bien A^{-1}.

CONCLUSION

Bien qu'un peu trop long, ce sujet semble avoir fait, à quelques exceptions près, l'unanimité des correcteurs, le trouvant adapté au programme de la voie Economique. Avec un écart-type de 4.99 et une moyenne générale de 10.33 cette épreuve semble avoir joué son rôle discriminant.