ESPRIT GENERAL

Objectifs de l'épreuve
Vérifier chez les candidats l'existence des bases nécessaires pour des études supérieures de management.
Apprécier l'aptitude à lire et comprendre un énoncé, choisir un outil adapté et l'appliquer (théorème...).
Apprécier le bon sens des candidats et la rigueur du raisonnement.

Sujets
Deux problèmes indépendants.
Instruments de calcul interdits, tables de lois fournies.

Evaluation
Exercices de valeur sensiblement égale.

EPREUVE 2008

Durée : 4 heures

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

SUJET

Problème 1

On considère les trois matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour a, b, c réels, on pose :

$$M_{a,b,c} = aA + bB + cC.$$

Enfin, on note $\mathcal{F}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par la famille $\mathcal{B} = (A, B, C)$.

1.1. Partie 1.

1. Prouver que la famille $\mathcal{B}$ est une base $\mathcal{F}$.
   Quelle est la dimension de $\mathcal{F}$?
2. Montrer que la matrice B^2 appartient à $\mathcal{F}$. Donner ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.

1.2. Partie 2.

On considère les matrices suivantes :

$$\begin{cases} M_1 = A - B - C \\ M_2 = 2A - B - 2C \\ M_3 = A \end{cases}$$

1. Montrer que la famille $\mathcal{B}' = (M_1, M_2, M_3)$, est une base de $\mathcal{F}$.
2. Donner la matrice de passage P, de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. Déterminer son inverse P^{-1}.
3. Calculer les produits matriciels suivants :
$$M_1M_2, \quad M_2M_1, \quad M_3M_2, \quad M_2M_3, \quad M_1M_3, \quad M_3M_1.$$
4. Démontrer que pour tout entier naturel k non nul :
$$M_1^k = M_1, \quad M_2^k = M_2, \quad M_3^k = M_3\,.$$
5. Prouver que le produit de deux éléments de $\mathcal{F}$ est un élément de $\mathcal{F}$.
6. On pose $M_{a,b,c} = xM_1 + yM_2 + zM_3$. Exprimer x, y, z en fonction de a, b, c.
7. On définit la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de matrices par :
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left(M_{a,b,c}\right)^k,$$
avec la convention $\left(M_{a,b,c}\right)^0 = I$ matrice unité d'ordre 3.
   a. Exprimer I en fonction de M_1, M_2, M_3.
   b. Pour tout entier naturel k, donner l'expression de $\left(M_{a,b,c}\right)^k$ en fonction de $k, a, b, c, M_1, M_2, M_3$.
   c. Montrer l'existence de trois réels α_n, β_n et γ_n tels que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_n = \alpha_n M_1 + \beta_n M_2 + \gamma_n M_3.$$
   d. Montrer que les suites (α_n), (β_n) et (γ_n) convergent vers des réels α, β, γ, que l'on déterminera.

Problème 2

Soit h la fonction déterminée par :

$$\begin{cases} \forall u \in \mathbb{R}^{+*}, & h(u) = u\ln(u) \\ \forall u \in \mathbb{R}^{-}, & h(u) = 0 \end{cases}$$

2.1. Etude de la fonction h.

1. Démontrer que h est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Justifier l'inégalité suivante :

$$(\mathcal{I}) \qquad \forall u \in \mathbb{R}^{+}, h(u) \geqslant u-1,$$

avec égalité, si et seulement si $u = 1$.

2.2. Entropie des variables aléatoires discrètes d'univers image fini.

Soit X une variable discrète définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, p)$, à valeurs dans $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.
On appelle *entropie* de X, le réel $H(X)$ défini par :

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} h(p_i) \text{ avec } p_i = p\,[X = x_i] > 0.$$

1. Soient B_p la variable de Bernouilli de paramètre $p \in \,]0,1[$, de variance $V(B_p)$, d'entropie $H(B_p)$ et φ la fonction définie par :

$$\forall p \in \,]0,1[\,, \quad \varphi(p) = H(B_p) - V(B_p).$$

a. Montrer que l'expression de $\varphi(p)$ en fonction de p est donnée par :

$$\forall p \in \,]0,1[\quad \varphi(p) = -p\ln p + (p-1)\,[p + \ln(1-p)]\,.$$

b. Calculer la dérivée φ' de φ.

c. Calculer la dérivée seconde φ'' de φ et étudier les variations de φ'. Calculer $\varphi'(\frac{1}{2})$.

d. En déduire les variations de φ.

e. Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{p\to 0^+} \varphi(x) \text{ et } \lim_{p\to 1^-} \varphi(x).$$

et prouver que :

$$\forall p \in \,]0,1[\quad V(B) \leqslant H(B).$$

2. Soient n un entier non nul et U_n une variable uniforme sur $[1,n] \cap \mathbb{N}$.

a. Vérifier que :

$$H(U_n) = \ln n.$$

b. Rappeler l'expression de la variance $V(U_n)$ de U_n et établir que :

$$H(U_n) = \frac{1}{2}\ln\left(\mathbf{12}V(U_n) + 1\right).$$

3. Montrer, en utilisant l'inégalité $(\mathcal{I})$ pour les np_i, que pour toute variable aléatoire discrète X, à valeurs dans $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, telle que $p_i = p\,[X = i]$

$$H(X) \leqslant H(U_n),$$

avec égalité $H(X) = H(U_n)$ si et seulement si $X = U_n$.
On a montré que parmi les variables aléatoires discrètes X, la loi uniforme U_n réalise le maximum de l'entropie.

2.3. Entropie de variables aléatoires discrètes d'univers image infini.

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
On dit que X admet une *entropie* si la série de terme général $h(p_i)$ est convergente. Si c'est le cas on appelle *entropie* de X, le réel $H(X)$ défini par :

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{+\infty} h(p_i), \text{ avec } p_i = p\,[X = x_i] > 0.$$

1. On désigne par G_p la variable géométrique de paramètre $p \in \,]0,1[$.

a. Rappeler la loi de G_p, c'est-à-dire, donner la valeur des probabilités $p'_i = p\,[G_p = i]$. Rappeler aussi la valeur de l'espérance $E(G_p)$.

b. Etablir que G_p admet une entropie et que :

$$H(G_p) = \frac{H(B_p)}{p}.$$

c. L'entropie $H(G_p)$ admet-elle une limite lorsque p tend vers 0 par valeurs positives ?

d. Montrer que l'entropie $H(G_p)$ est négligeable devant la variance $V(G_p)$ de G_p au voisinage de 0^+.

2. On suppose de plus que X admet la même espérance que la loi géométrique G_p.

a. Prouver que la série de terme général $p_i \ln p'_i$ est convergente et que :

$$H(G_p) = -\sum_{i=1}^{+\infty} p_i \ln p'_i.$$

b. Montrer, en utilisant l'inégalité ($\mathcal{I}$) pour les $\frac{p_i}{p'_i}$, que :

$$H(X) \leqslant H(G_p),$$

avec égalité, si et seulement si X suit la même loi que G_p.
On a montré que parmi les variables aléatoires discrètes X, à valeurs dans $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, admettant une entropie et d'espérance $E(G_p)$, la loi géométrique G_p réalise le maximum de l'entropie.

CORRIGE

Problème 1

On considère les trois matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour a, b, c réels, on pose
$$M_{a,b,c} = aA + bB + cC$$
Enfin, on note $\mathcal{F}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par la famille (A, B, C).

1.1. Partie 1.

1. Prouvons que la famille (A, B, C) est une base $\mathcal{F}$.
Soit α, β, γ trois réels tels que $\alpha A + \beta B + \gamma C = 0$.

$$\alpha A + \beta B + \gamma C = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2\beta + \gamma = 0 \\ 3\beta - 2\gamma = 0 \\ \beta - \gamma = 0 \\ -\alpha - 2\beta = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases}$$

$$\alpha A + \beta B + \gamma C = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

La famille (A, B, C) est donc libre. Elle génératrice de $\mathcal{F}$ par définition et constitue donc une base de $\mathcal{F}$. Et $dim\mathcal{F} = 3$.

2. Montrons que la matrice B^2appartient à $\mathcal{F}$.

$$B^2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 6A - 5B - 6C$$

On peut donner les coordonnées de B^2 dans la base $\mathcal{B}$:

$$B^2(6, -5, -6) \text{ dans la base } \mathcal{B}$$

1.2. Partie 2.

On considère les matrices suivantes :

$$\begin{cases} M_1 = A - B - C \\ M_2 = 2A - B - 2C \\ M_3 = A \end{cases}$$

On a :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrons que la famille $\mathcal{B}' = (M_1, M_2, M_3)$ est une base de $\mathcal{F}$. Soit α, β, γ trois réels tels que $\alpha M_1 + \beta M_2 + \gamma M_3 = 0$.

$$\alpha M_1 + \beta M_2 + \gamma M_3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ -\alpha + \beta = 0 \\ \beta = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \\ \alpha - \gamma = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

$$\alpha M_1 + \beta M_2 + \gamma M_3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

La famille $\mathcal{B}'$ est donc libre. Elle comporte autant d'élément que $dim\mathcal{F}$, elle constitue donc une base de $\mathcal{F}$.

2. La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ s'écrit :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

et son inverse

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Calculons les produits.

$$M_1M_2 = M_2M_1 = 0$$
$$M_1M_3 = M_3M_1 = 0$$
$$M_2M_3 = M_3M_2 = 0$$

4. Soit un entier naturel k supérieur ou égal à 1.

$$M_1^2 = M_1, M_2^2 = M_2, M_3^2 = M_3$$

Par récurrence évidente, pour tout $k \geqslant 1$,

$$M_1^k = M_1, M_2^k = M_2, M_3^k = M_3$$

5. Soient Q, R deux matrices de $\mathcal{F}$. On peut les décomposer dans la base $\mathcal{B}'$. $Q = xM_1 + yM_2 + zM_3, R = x'M_1 + y'M_2 + z'M_3$.

$$\begin{aligned} QR &= (xM_1 + yM_2 + zM_3)(x'M_1 + y'M_2 + z'M_3) \\ &= xx'M_1 + yy'M_2 + zz'M_3 \in \mathcal{F} \end{aligned}$$

6. On pose $M_{a,b,c} = xM_1 + yM_2 + zM_3$ Exprimons x, y, z en conction de a, b, c. D'après les formules de changement de base on peut écrire.

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = -2b + c \\ y = b - c \\ z = a + c \end{cases}$$

7.

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} (M_{a,b,c})^k.$$

a. On remarque que :

$$M_1 + M_2 + M_3 = I$$

b. Donnons l'expression de $(M_{a,b,c})^k$ en fonction de $k, a, b, c, M_1, M_2, M_3$. Par récurrence, on montre que :

$$(M_{a,b,c})^n = x^nM_1 + y^nM_2 + z^nM_3$$
soit
$$(M_{a,b,c})^n = (-2b + c)^nM_1 + (b-c)^n M_2 + (a+c)^n M_3$$

c. Montrons l'existence de trois réels α_n, β_n et γ_n.:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} (M_{a,b,c})^k$$

$$S_n = I + \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}(-2b+c)^k\right) M_1 + \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}(b-c)^k\right) M_2 + \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}(a+c)^k\right) M_3$$
$$S_n = M_1 + M_2 + M_3 + \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}(-2b+c)^k\right) M_1 + \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}(b-c)^k\right) M_2 + \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}(a+c)^k\right) M_3$$
$$S_n = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(-2b+c)^k\right) M_1 + \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(b-c)^k\right) M_2 + \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(a+c)^k\right) M_3$$

Il en résulte que :

$$\alpha_n = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(-2b+c)^k\right)$$
$$\beta_n = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(b-c)^k\right)$$
$$\gamma_n = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(a+c)^k\right)$$

d. Les suites (α_n), (β_n) et (γ_n) convergent vers des réels respectifs

$$\alpha = \exp(-2b + c)$$
$$\beta = \exp(b - c)$$
$$\gamma = \exp(a + c)$$

Problème 2

Soit h est la fonction déterminée par :

$$\begin{cases} \forall u \in \mathbb{R}^{+*} & h(u) = u\ln(u) \\ \forall u \in \mathbb{R}^{-} & h(u) = 0 \end{cases}$$

2.1. Etude de la fonction h.

h est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sur $\mathbb{R}^{-}$. Le problème de continuité se pose en 0. Par limite de référence $\lim_{u \to 0+} u \ln u = 0 = f(0)$ se qui prouve la continuité en 0.

1. Pour justifier cette inégalité suivante définissons la fonction g par $\varphi(u) = h(u) - u + 1, u \geqslant 0$.

$$\varphi'(u) = \ln u + 1 - 1 = \ln u \geqslant 0 \Leftrightarrow u \geqslant 1.$$

D'où le tableau de variation de g :

u	0		1		$+\infty$
φ'		$-$	0	$+$	
φ	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2. On peut en déduire que :

$$\forall u \in \mathbb{R}_+^{}\ \varphi(u) \geqslant 0$$
$$(\mathcal{I}) \qquad \forall u \in \mathbb{R}_+^{}\ h(u) \geqslant u-1$$

avec égalité si et seulement si $u = 1$.

2.2. Entropie des variables aléatoires discrètes d'univers image fini.

Soit X une variable discrète à valeurs dans $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

1. Soient B_p la variable de Bernouilli de paramètre $p \in]0,1[$, de variance $V(B_p)$,d'entropie $H(B_p)$ et φ la fonction définie par :

$$\forall p \in]0,1[\quad \varphi(p) = H(B_p) - V(B_p).$$

a. L'expression de φ est donnée par :

$$\forall p \in]0,1[\quad \varphi(p) = -h(p) - h((1-p) - p(1-p)$$

b. Calculons sa dérivée première :

$$\varphi'(p) = -\ln p + \ln(1-p) + 2p - 1$$

Puis seconde :

$$\varphi''(p) = -\frac{1}{p} + \frac{1}{p-1} + 2 = \frac{-2p^2+2p-1}{p(1-p)} < 0 \text{ car } \Delta < 0$$

D'où le tableau de variation de g :

p	0		$1/2$		$+\infty$
φ''		$-$	0	$-$	
φ'	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$+\infty$

c. $\varphi'(\frac{1}{2}) = 0$

p	0		$1/2$		1
φ'		$+$	0	$-$	
φ	$+\infty$ 0	$\nearrow$	M	$\searrow$	$+\infty$ 0

Les variations de φ prouvent que :

$$\forall p \in]0,1[\quad \varphi(p) \geqslant 0.$$
$$\forall p \in]0,1[\quad V(B_p) \leqslant H(B_p).$$

2. Soient n un entier non nul et U_n une variable uniforme sur $[1,n] \cap \mathbb{N}$.

a.

$$H(U_n) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \ln \frac{1}{n} = \ln n.$$

b. $V(U_n) = \dfrac{n^2-1}{12}$ donc $n = \sqrt{12V(U_n)+1}$, que l'on remplace dans $H(U_n)$

$$H(U_n) = \frac{1}{2} \ln\left(12V(U_n)+1\right).$$

c. La fonction ln étant croissante, l'entropie et la variance de variables uniformes sont simultanément croissantes.

3. Montrons, en utilisant l'inégalité $(\mathcal{I})$ pour les np_i, que pour toute variable aléatoire discrète X, à valeurs dans $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, telle que $p_i = p[X=i]$:

$$H(X) \leqslant H(U_n).$$

avec égalité $H(X) = H(U_n)$ si et seulement si $X = U_n$.

$$np_i \ln(np_i) \geqslant np_i - 1$$
$$np_i \ln n + np_i \ln p_i \geqslant np_i - 1$$
$$n \ln n \sum_{i=1}^{n} p_i + n \sum_{i=1}^{n} p_i \ln p_i \geqslant n \sum_{i=1}^{n} p_i - n$$
$$n \ln n + n \sum_{i=1}^{n} p_i \ln p_i \geqslant 0$$
$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} h(p_i) \leqslant \ln n$$

$$H(X) = \ln n \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(np_i \ln(np_i) - np_i + 1)}_{+} = 0$$
$$\Leftrightarrow \forall i \quad np_i \ln(np_i) - np_i + 1 \Leftrightarrow \forall i \quad h(np_i) = np_i - 1$$
$$\Leftrightarrow \forall i \quad np_i = 1 \Leftrightarrow \forall i \quad p_i = 1/n$$

2.3. Entropie de variables aléatoires discrètes d'univers image infini.

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, admettant une entropie. En posant $p_i = p[X=i] \neq 0$, on peut écrire :

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{+\infty} h(p_i).$$

1. On désigne par G_p la variable géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.

   a. La loi de $G_p$est donnée par :

   $$\forall i \in \mathbb{N}^* \quad p_i' = p\left[G_p = i\right]. = p(1-p)^{i-1}$$

   L'espérance $E(G_p)$ valant $\dfrac{1}{p}$.

   b. Déterminons l'existence et la valeur de l'entropie de G_p .

   $$H_n(G_p) = -\sum_{i=1}^{n} p(1-p)^{i-1} \ln p(1-p)^{i-1}$$
   $$H_n(G_p) = -\ln p \sum_{i=1}^{n} p(1-p)^{i-1} - \ln(1-p) \sum_{i=1}^{n} (i-1)p(1-p)^{i-1}$$
   $$H_n(G_p) = -\ln p \sum_{i=1}^{n} p(1-p)^{i-1} - (1-p)\ln(1-p) \sum_{i=0}^{n-1} ip(1-p)^{i-1}$$
   $$H_n(G_p) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} -\ln p - (1-p)E(G_p) = -\ln p - \frac{(1-p)\ln(1-p)}{p} = \frac{H(B_p)}{p}$$

   c. L'entropie n'admet pas de limite lorsque p tend vers 0 par valeurs positives puisque :

   $$H(G_p) \underset{0^+}{\sim} -\ln p \underset{0^+}{\longrightarrow} +\infty$$

   d. Montrons que l'entropie $H(G_p)$ est négligeable devant la variance $V(G_p)$ de G_p au voisinage de 0^+.

   $$\frac{H(G_p)}{V(G_p)} \underset{0^+}{\sim} \frac{-p^2 \ln p}{q} \underset{0^+}{\longrightarrow} 0$$

2. On suppose de plus que X admet la même espérance que la loi géométrique G_p.

   a. Prouvons que la série de terme général $p_i \ln p_i'$ est convergente

   $$-\sum_{i=1}^{n} p_i \ln p_i' = -\sum_{i=1}^{n} p_i \ln p(1-p)^{i-1} = -\ln p \sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{n} (i-1)p_i \ln(1-p)$$
   $$= -\ln p \sum_{i=1}^{n} p_i - \ln(1-p)\left(\sum_{i=1}^{n} ip_i - \sum_{i=1}^{n} p_i\right)$$
   $$\underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} -\ln p - \left(\frac{1}{p} - 1\right)\ln(1-p) = -\ln p - \frac{(1-p)}{p}\ln(1-p) = H(G_p)$$

   b. Utilisont l'inégalité $(\mathcal{I})$ pour les $\dfrac{p_i}{p_i'}$:

   $$\frac{p_i}{p_i'} \ln \frac{p_i}{p_i'} \geqslant \frac{p_i}{p_i'} - 1$$
   $$p_i \ln p_i - p_i \ln p_i' \geqslant p_i - p_i'$$

Par sommation, chacune des séries étant convergente :

$$\sum_{i=1}^{+\infty} p_i \ln p_i - \sum_{i=1}^{+\infty} p_i \ln p_i' \geqslant 0$$

$$H(X) \leqslant H(G_p)$$

De plus :

$$H(X) = H(G_p) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{+\infty} (p_i \ln p_i - p_i \ln p_i') = 0$$
$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{+\infty} p_i' \underbrace{\left(\frac{p_i}{p_i'} \ln \frac{p_i}{p_i'} - \left(\frac{p_i}{p_i'} - 1\right)\right)}_{+} = 0$$
$$\Rightarrow \forall i \quad \frac{p_i}{p_i'} \ln \frac{p_i}{p_i'} - \left(\frac{p_i}{p_i'} - 1\right) = 0$$
$$\Rightarrow \forall i \quad g\left(\frac{p_i}{p_i'}\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow \forall i \quad \frac{p_i}{p_i'} = 1$$
$$\Leftrightarrow \forall i \quad p_i = p_i'$$

RAPPORT

Le sujet :
Le premier problème d'algèbre linéaire, très classique, déterminait le seuil minimal de connaissances que doit acquérir un étudiant sérieux et travailleur.

Le second problème de probabilité étudiait la notion d'entropie des variables aléatoires discrètes sur un univers image fini ou infini dénombrable. Plus abstrait et délicat, il avait pour objectif de repérer les étudiants ayant des aptitudes certaines dans cette matière.

Bilan de la correction des copies :
Le cru 2008 s'est avéré bien meilleur que l'an passé et le jury s'est réjoui de trouver de bonnes copies.
Avec un écart-type de **4,08** et une moyenne générale de **9,10**, cette épreuve a permis de classer les candidats.