Mathématiques ULM BL

ESPRIT GÉNÉRAL

Objectifs de l'épreuve
Vérifier chez les candidats l'existence des bases nécessaires pour des études supérieures de management.
Apprécier l'aptitude à lire et comprendre un énoncé, choisir un outil adapté et l'appliquer (théorème...).
Apprécier le bon sens des candidats et la rigueur du raisonnement.

Sujets
Deux problèmes indépendants.
Pour toutes les options : instruments de calcul interdits, tables de lois fournies

Evaluation
Problèmes de valeur sensiblement égale

ÉPREUVE 2007

Durée : 3 heures

Aucun document et instrument de calcul n'est autorisé.
Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

SUJET

1. PROBLEME.

On désigne par $(\mathcal{S})$ l'espace vectoriel des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Soit $(\mathcal{E})$ le sous-ensemble de $(\mathcal{S})$ constitué des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence :

$$(\mathcal{E}) \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+3} = 2u_{n+2} - \frac{5}{4}u_{n+1} + \frac{1}{4}u_n$$

On se propose de déterminer cet ensemble $(\mathcal{E})$ par deux méthodes.

1.1. Méthode matricielle.

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5/4 & 1/4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et on note $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ définie par : $\begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 + e_3 \\ e'_2 = e_1 + 2e_2 + 4e_3 \\ e'_3 = e_1 + e_2 \end{cases}$

1. Pour tout entier naturel n, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$. Reconnaître le produit AX_n.
   En déduire l'expression de X_n en fonction de A, X_0 et de l'entier naturel n.
2. En utilisant la méthode de Gauss, montrer que λ est valeur propre de A si et seulement si λ est racine du polynôme P défini par :
   $$P = 4X^3 - 8X^2 + 5X - 1$$
3. Vérifier que $a = \dfrac{1}{2}$ est racine double de P. Déterminer l'autre racine réelle de P.
4. La matrice A est elle diagonalisable ?
5. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Déterminer l'inverse de la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.
6. Démontrer que la matrice A' de f dans la base $\mathcal{B}'$ peut s'écrire sous la forme :
   $$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & a^2 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$
7. Prouver par récurrence sur l'entier naturel n que :
   $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad (A')^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a^n & na^{n+1} \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix}$$
8. En déduire les coefficients de la troisième ligne de A^n, pour tout entier naturel n.
9. Conclure en exprimant u_n en fonction de n, u_0, u_1, u_2.

1.2. Autre méthode.

1. Montrer qu'une suite géométrique non nulle, de raison q et de premier terme u_0 appartient à $(\mathcal{E})$ si et seulement si q est une racine de P.
2. On désigne par α, β, γ les suites réelles définies par :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \alpha_n = 1, \beta_n = a^n, \gamma_n = n\beta_n$$
   où a est le réel défini dans la partie précédente.
   Montrer que α, β, γ appartiennent à $(\mathcal{E})$.

2. On désigne par α, β, γ les suites réelles définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \alpha_n = 1, \beta_n = a^n, \gamma_n = n\beta_n$$

   où a est le réel défini dans la partie précédente.
   Montrer que α, β, γ appartiennent à $(\mathcal{E})$.

3. Démontrer que $(\mathcal{E})$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{S})$.

4. Prouver que l'application $\varphi : (\mathcal{E}) \to \mathbb{R}^3$ qui à toute suite de $(\mathcal{E})$ associe le triplet (u_0, u_1, u_2) est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

5. Justifier que la famille $\mathcal{C} = (\varphi^{-1}(1,0,0), \varphi^{-1}(0,1,0), \varphi^{-1}(0,0,1))$ est une base de $(\mathcal{E})$. Quelles sont les coordonnées de u dans cette base $\mathcal{C}$?

6. Montrer que la famille $\mathcal{C}' = (\alpha, \beta, \gamma)$ est une base de $(\mathcal{E})$ si et seulement si la matrice $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & a \\ 1 & a^2 & 2a^2 \end{pmatrix}$ est inversible.

7. Prouver que la matrice $R = \begin{pmatrix} 1 & -1/a^2 & 1/a^2 \\ 0 & 1/a^2 & -1/a^2 \\ -1/a & 3/a & -2/a \end{pmatrix}$ est la matrice inverse de Q.
   Calculer alors les coordonnées d'une suite u de $(\mathcal{E})$ dans cette base $\mathcal{C}'$ en fonction de u_0, u_1 et u_2.

8. Retrouver ainsi l'expression de u_n en fonction de n, u_0, u_1, u_2.

2. PROBLEME.

On s'intéresse dans cet exercice à l'évolution d'une bactérie qui se comporte dans un certain milieu de la manière suivante :
A l'issue d'un laps de temps T la bactérie meurt avec la probabilité $q \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ ou se divise avec la probabilité $p = 1 - q$ en deux bactéries identiques, chacune d'elles se comportant de façon identique à la précédente.
On se propose d'étudier la variable aléatoire X_n égale au nombre de bactéries présentes dans le milieu à l'issue de n laps de temps T. (n étant un entier naturel non nul).

2.1. Fonction génératrice.

Pour toute variable aléatoire discrète X d'univers image fini $X(\Omega) \subset \{0, 1, ..., n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle fonction génératrice de X, la fonction G_X définie pour x réel par :

$$G_X(x) = \sum_{k=0}^{n} P[X = k]\, x^k$$

1. Donner l'expression de la fonction génératrice des lois binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ et uniforme $\mathcal{U}\,[[1, n]]$.

2. Montrer que pour tout entier naturel $p \leqslant n$:

$$G_X^{(p)}(x) = \sum_{k=p}^{n} \frac{k!}{(k-p)!} P\left[X = k\right] x^{k-p}$$

3. En déduire que si deux variables entières X et Y, de même univers, ont la même fonction génératrice, alors elles ont la même loi.

4. Montrer que l'espérance de X est égale à $G_X'(1)$.

5. Donner l'expression de la variance de X en fonction de $G_X'(1)$ et $G_X''(1)$.

6. Retouver à l'aide de la fonction génératrice l'espérance et la variance de la loi binomiale.

2.2. Etude de la variable X_n.

1. Donner les lois de X_1, X_2 et vérifier que :

$$E(X_2) = 4p^2$$

2. Montrer par récurrence sur l'entier n non nul, que l'univers image $X_n(\Omega)$ est égal à :

$$X_n(\Omega) = \{0, 2, 4, 6, ..., 2^n\}$$

3. Pour tout entier i appartenant à $X_n(\Omega)$ déterminer la loi de la variable X_{n+1} conditionnée par l'événement $[X_n = i]$, c'est-à-dire donner la valeur de la probabilité suivante :

$$P\left[X_{n+1} = 2k / X_n = i\right] \text{ pour tout entier } k \text{ tel que } 2k \in X_{n+1}(\Omega)$$

4. Prouver que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad G_{X_1}(x) = q + px^2$$

Puis, en appliquant la formule des probabilités totales, montrer que la fonction génératrice G_{Xn+1} est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad G_{X_{n+1}}(x) = G_{X_n}(q + px^2)$$

5. Déduire de la question précédente que la suite $(E(X_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique et déterminer $E(X_n)$ en fonction de p et n.

2.3. Extinction de la population de bactéries.

On note Z_n la variable de Bernouilli égale à 1 si le milieu ne contient plus de bactéries à l'issue du $n^{i\grave{e}me}$ laps de temps T, et à 0 sinon. On se propose d'étudier la convergence en loi de la suite de variable aléatoire $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

1. Montrer par récurrence sur l'entier n non nul, que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad G_{X_n}(x) = \underbrace{(G_{X_1} \circ G_{X_1} \circ \cdots \circ G_{X_1})}_{n \text{ fois}}(x)$$

et en déduire que pour tout entier n non nul,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad G_{X_{n+1}}(x) = (G_{X_1} \circ G_{X_n})(x) = q + p\,[G_{X_n}(x)]^2$$

puis que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad G_{X_{n+1}}(x) - G_{X_n}(x) = p\left[1 - G_{X_n}(x)\right]\left[\frac{q}{p} - G_{X_n}(x)\right]$$

2. Lorsque x appartient à l'intervalle $\left[0, \frac{q}{p}\right]$, montrer par récurrence sur l'entier n non nul que :

$$0 \leqslant G_{X_n}(x) \leqslant \frac{q}{p}$$

en déduire que pour tout x de l'intervalle $\left[0, \frac{q}{p}\right]$, la suite $(G_{X_n}(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone, puis convergente vers une limite à préciser.

3. Prouver alors que la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une loi de Bernoulli dont on précisera le paramètre.

CORRIGÉ

1. PROBLEME.

On désigne par $(\mathcal{S})$ l'espace vectoriel des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Soit $(\mathcal{E})$ le sous ensemblede $(\mathcal{S})$ constitué des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence :

$$(\mathcal{E}) \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+3} = 2u_{n+2} - \frac{5}{4}u_{n+1} + \frac{1}{4}u_n$$

On se propose de déterminer cet ensemble $(\mathcal{E})$ par deux méthodes.

1.1. Méthode matricielle.

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$muni de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5/4 & 1/4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Pour tout entier naturel n, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_{n-2} \\ u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

$$AX_n = \begin{pmatrix} 2 & -5/4 & 1/4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n-2} \\ u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}.$$

Nous pouvons en déduire l'expression deX_n en fonction de A, X_0 et de l'entier naturel n.

$$X_n = A^n X_0$$

2. Montrons que le réel λ est valeur propre de A si et seulement si λ est racine du polynôme P défini par :

$$P = 4X^3 - 8X^2 + 5X - 1$$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2-\lambda & -5/4 & 1/4 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftrightarrow L_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 2-\lambda & -5/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$A - \lambda I \underset{L_2 \leftarrow L_2 - (2-\lambda)L_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & -5/4 - \lambda(\lambda - 2) & 1/4 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$A - \lambda I \underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & -\lambda^2 + 2\lambda - 5/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$A - \lambda I \underset{L_3 \leftarrow L_3 - (-\lambda^2 + 2\lambda - 5/4)L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \frac{5}{4}\lambda + \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

λ est valeur propre de A si et seulement la matrice $A - \lambda I$ n'est pas inversible, c'est à dire $-\lambda^3 + 2\lambda^2 - \frac{5}{4}\lambda + \frac{1}{4} = 0$ ou $P(\lambda) = 0$.

3. On vérifie que :

$$P = 4X^3 - 8X^2 + 5X - 1 = 4(X - \frac{1}{2})^2(X - 1)$$

$a = \frac{1}{2}$ est donc bien racine double de P. L'autre racine réelle de P est donc la racine 1.

4. Déterminons le sous-espace propre $E_{\frac{1}{2}}$ attaché à la valeur propre $\lambda = \frac{1}{2}$.

$$A - \frac{1}{2}I \sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le vecteur $u(x, y, z)$ appartient à $E_{\frac{1}{2}}$ si et seulement si :

$$\begin{cases} x - \frac{1}{2}y = 0 \\ y - \frac{1}{2}z = 0 \end{cases}$$

Donc :

$$\dim E_{\frac{1}{2}} = \dim Vect\,\{u(1, 2, 4)\} = 1$$

La somme des dimensions des sous-espaces propres de A est égale à $2 \neq 3$, la matrice A n'est-pas diagonalisable.

5. La famille $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$ car la matrice P est inversible, t de matrice inverse :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

6. La matrice A' de f dans la base $\mathcal{B}'$ peut s'écrire sous la forme :

$$A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & a^2 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

7. Prouvons par récurrence sur l'entier naturel n que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad (A')^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a^n & na^{n+1} \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix} \qquad \mathcal{H}_n$$

Pour $n = 0$, $\mathcal{H}_0$ est vraie. Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie pour un certain $n \geqslant 0$.

$$\begin{aligned} (A')^{n+1} &= A'(A')^n \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & a^2 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a^n & na^{n-1} \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a^{n+1} & (n+1)a^{n+2} \\ 0 & 0 & a^{n-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

L'axiome de récurrence achève la démonstration.

8. On peut en déduire les coefficients de la troisième ligne de A^n, pour tout entier naturel n.

$$A^n = PA'^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a^n & na^{n+1} \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

9. Puis :

$$X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

et donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = (4u_2 - 4u_1 + u_0) + 4(u_1 - 4u_2)a^n + 2\left(-2u_2 + 3u_1 - u_0\right) na^n$$

1.2. Autre méthode.

1. Une suite géométrique de raison q non nulle et de premier terme $u_0 \neq 0$ appartient à $(\mathcal{E})$ si et seulement :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_0 q^{n+3} = 2u_0 q^{n+2} - \frac{5}{4} u_0 q^{n+1} + \frac{1}{4} u_0 q^n$$

Soit en simplifiant :

$$q^3 - 2q^2 - \frac{5}{4}q + \frac{1}{4}$$

c'est à dire que si et seulement si q est racine de P.

2. On désigne par α, β, γ les suites réelles définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \alpha_n = 1, \beta_n = a^n, \gamma_n = n\beta_n$$

Les racines de P valant 1 et $a = \dfrac{1}{2}$, les suites α, β appartiennent à $(\mathcal{E})$. Montrons que γ appartient à $(\mathcal{E})$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{aligned} &\gamma_{n+3} - 2\gamma_{n+2} + \frac{5}{4}\gamma_{n+1} - \frac{1}{4}\gamma_n \\ &= (n+3)\beta_{n+3} - 2(n+2)\beta_{n+2} + \tfrac{5}{4}(n+1)\beta_{n+1} - \tfrac{1}{4}n\beta_n \\ &= n\left[\beta_{n+3} - 2\beta_{n+2} + \tfrac{5}{4}\beta_{n+1} - \tfrac{1}{4}\beta_n\right] + 3\beta_{n+3} - 4\beta_{n+2} + \tfrac{5}{4}\beta_{n+1} \\ &= 0 + 3\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+3} - 4.\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+2} + \tfrac{5}{4}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+1} \\ &= \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+1}\left[\tfrac{3}{4} - 2 + \tfrac{5}{4}\right] = 0 \end{aligned}$$

3. $(\mathcal{E})$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{S})$, car non vide et stable par combinaisons linéaires.

4. Prouvons que l'application $\varphi : (\mathcal{E}) \to \mathbb{R}^3$ qui a toute suite de $(\mathcal{E})$ associe le triplet (u_0, u_1, u_2) est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

$$\forall u, u' \in (\mathcal{E}), \forall x, y \in \mathbb{R} \qquad \begin{aligned} \varphi(xu + yu') &= (xu_0 + yu'_0, xu_1 + yu'_1, xu_2 + yu'_2) \\ &= x(u_0, u_1, u_2) + y(u'_0, u'_1, u'_2) = x\varphi(u) + y\varphi(u') \end{aligned}$$

D'autre part, par une démonstration par récurrence, on montre que pour tout triplet (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$, il existe une suite u et une seule telle que $\varphi(u) = (x, y, z)$,cette suite étant déterminée par ses trois premiers termes $(u_0, u_1, u_2) = (x, y, z)$ et la relation de récurrence caractérisant les éléments de $\mathcal{E}$. φ est donc une application linéaire bijective.

5. La famille $\mathcal{C} = (\varphi^{-1}(1,0,0), \varphi^{-1}(0,1,0)\varphi^{-1}(0,0,1)$ est une base de $(\mathcal{E})$ en tant qu'image de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ par l'isomorphisme φ^{-1}. Les coordonnées de u dans cette base $\mathcal{C}$ sont (u_0, u_1, u_2) car $u = \varphi^{-1}(\varphi(u) = \varphi^{-1}((u_0, u_1, u_2)) = u_0\varphi^{-1}(1,0,0) + u_1\varphi^{-1}(0,1,0) + u_2\varphi^{-1}(0,0,1)$.

6. La famille $\mathcal{C}' = (\alpha, \beta, \gamma)$ est une base de $(\mathcal{E})$ si et seulement si la matrice $Q = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \beta_0 & \gamma_0 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & a \\ 1 & a^2 & 2a^2 \end{pmatrix}$ est inversible.

7. La matrice $R = \begin{pmatrix} 1 & -1/a^2 & 1/a^2 \\ 0 & 1/a^2 & -1/a^2 \\ -1/a & 3/a & -2/a \end{pmatrix}$ est la matrice inverse de Q car :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & a \\ 1 & a^2 & 2a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1/a^2 & 1/a^2 \\ 0 & 1/a^2 & -1/a^2 \\ -1/a & 3/a & -2/a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculons alors les coordonnées d'une suite u de $(\mathcal{E})$ dans cette base $\mathcal{C}'$ en fonction de u_0, u_1 et u_2 en utilisant la formule de changement de base.

$$X' = QX = \begin{pmatrix} 1 & 1/a^2 & 1/a^2 \\ 0 & 1/a^2 & 1/a^2 \\ -1/a & 3/a & -2/a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} u_0 - u_1/a^2 + u_2/a^2 \\ u_1/a^2 - u_2/a^2 \\ -u_0/a + 3u_1/a - 2u_2/a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 - 4u_1 + 4u_2 \\ 4u_1 - 4u_2 \\ -2u_0 + 6u_1 - 4u_2 \end{pmatrix}$$

8. D'où l'expression de u_n en fonction de n, u_0, u_1, u_2.

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = (4u_2 - 4u_1 + u_0) + 4(u_1 - 4u_2)a^n + 2\left(-2u_2 + 3u_1 - u_0\right) n a^n$$

2. PROBLEME.

On s'intéresse dans cet exercice à l'évolution d'une bactérie qui se comporte dans un certain milieu de la manière suivante :
A l'issue d'un laps de temps T la bactérie meurt avec la probabilité $q \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ ou se divise avec la probabilité $p = 1 - q$ en deux bactéries identiques, chacune d'elles se comportant de façon identique à la précédente.
On se propose d'étudier la variable aléatoire X_n égale au nombre de bactéries présentes dans le milieu à l'issue de n laps de temps T. (n étant un entier naturel non nul).

2.1. Fonction génératrice.

Pour toute variable aléatoire entière X d'univers image fini $X(\Omega) \subset \{0, 1, ..., n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle fonction génératrice de X, la fonction G_X définie pour x réel par :

$$G_X(x) = \sum_{k=0}^{n} P\left[X = k\right] x^k$$

1. Donnons l'expression de la fonction génératrice des lois binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ et uniforme $\mathcal{U}\,[[1,n]]$. Commençons par la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$

$$G_X(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k x^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (px)^k q^{n-k} = (px+q)^n$$

Pour la fonction génératrice d'une loi uniforme $\mathcal{U}\,[[1,n]]$.

$$\text{Pour } x \neq 1, G_X(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} x^k = \frac{1}{n}\frac{1-x^n}{1-x}$$
$$G_X(1) = 1$$

2. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel $p \leqslant n$:

$$G_X^{(p)}(x) = \sum_{k=p}^{n} \frac{k!}{(k-p)!} P[X=k]\, x^{k-p} \qquad \mathcal{H}_p$$

Pour $p = 0$, $G_X^{(0)}(x) = G_X(x) = \sum_{k=0}^{n} P[X=k]\, x^k \sum_{k=0}^{n} \frac{k!}{(k-0)!} P[X=k]\, x^{k-0}$ ce qui prouve que $\mathcal{H}_0$ est vraie. Supposons pour un certain p que $\mathcal{H}_p$ soit vraie.

$$G_X^{(p+1)}(x) = \left(\sum_{k=p}^{n} \frac{k!}{(k-p)!} P[X=k]\, x^{k-p}\right)'$$
$$= \sum_{k=p+1}^{n} \frac{k!(k-p)}{(k-p)!} P[X=k]\, x^{k-p-1} = \sum_{k=p}^{n} \frac{k!}{(k-p-1)!} P[X=k]\, x^{k-p-1}$$

Ce qui prouve que $\mathcal{H}_{p+1}$ est vraie. D'après l'axiome de récurrence $\mathcal{H}_p$ set vraie pour tout entier p.

3. Soit deux variables entières X et Y , de même univers, de même fonction génératrice, montrons qu'elles ont la même loi .

$$\text{Pour tout entier } i \qquad G_X^{(i)}(0) = \sum_{k=i}^{n} \frac{k!}{(k-i)!} P[X=k]\, 0^{k-i} = i! P[X=i]$$

Il en découle :

$$\text{Pour tout entier } i \qquad G_X^{(i)}(0) = G_Y^{(i)}(0) \Longrightarrow P[X=i] = P[Y=i]$$

et ainsi X et Y ont la même loi.

4. Montrons que l'espérance de X est égale à $G'_X(1)$.

$$G_X^{(1)}(1) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k!}{(k-1)!} P[X=k]\, 1^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} k P[X=k]\, 1^{k-1} = E(X)$$

5. Donnons l'expression de la variance de X en fonction de $G'_X(1)$ et $G''_X(1)$.

$$G''_X(1) = \sum_{k=1}^{n} k(k-1) P[X=k]\, 1^{k-2} 1^{k-2} = E[X(X-1)]$$
$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$
$$= E[X(X-1)] + E(X) - [E(X)]^2 = G''_X(1) + G'_X(1) - \left[G'_X(1)\right]^2$$

6. Retrouvons à l'aide de la fonction génératrice l'espérance et la variance de la loi binomiale.

$$E(X) = G_X^{(1)}(1) = \left[(px+q)^n\right]'_{x=1} = np(p+q)^{n-1} = np$$

$$G''_X(1) = n(n-1)p^2(p+q)^{n-2} = n(n-1)p$$

$$V(X) = n(n-1)p^2 - np(np-1) = np(pn - p - np + 1) = npq$$

2.2. Etude de la variable X_n.

1. Donnons les lois de X_1, X_2 et vérifions que $E(X_2) = 4p^2$.

$$P[X_1 = 2] = p, P[X_1 = 0] = q$$

$$P[X_2 = 0] = P[X_2 = 0/X_1 = 0]\,P[X_1 = 0] + P[X_2 = 0/X_1 = 2]\,P[X_1 = 2] = q + pq^2$$
$$P[X_2 = 4] = P[X_2 = 4/X_1 = 2]\,P[X_1 = 2] = p^3$$
$$P[X_2 = 2] = P[X_2 = 2/X_1 = 2]\,P[X_1 = 2] = 2pqq = 2pq^2$$

D'ou :

$$E(X_2) = 4p^3 + 4pq^2 = 4p^2(p+q) = 4p^2$$

2. Montrons par récurrence sur l'entier n non nul, que l'univers image $X_n(\Omega)$ est égal à :

$$X_n(\Omega) = \{2j\}_{j\in\{0,1,2,3,\dots,2^{n-1}\}} : \qquad \mathcal{H}_n$$

Pour $n = 1$, $X_1(\Omega) = \{0, 2\}$ $\mathcal{H}_1$ est donc vraie. Supposons pour un certain n que $\mathcal{H}_n$ soit vraie. Si $[X_n = 2j]$ avec $j \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 2^{n-1}\}$, il y a $2j$ bactéries dont $l \leqslant 2^n$ se dédoublent et $2j - l$ meurent. Le nombre de bactéries à l'issue de $n+1$ laps de temps T est alors de $2l$ avec $2l \in \{0, 1, 2, \dots, 2^{n+1}\}$. Ainsi $X_{n+1}(\Omega) = \{0, 2, 4, ..., 2j, ...2^{n+1}\}$. Ce qui prouve que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie. D'après l'axiome de récurrence $\mathcal{H}_n$ est vraie pour tout entier n non nul.

3. Pour tout entier i appartenant à $X_n(\Omega)$ la loi de la variable X_{n+1} conditionnée par l'événement $[X_n = i]$ est donnée par :

$$P[X_{n+1} = 2k/X_n = i] = \binom{i}{k} p^k q^{i-k} \text{ pour tout entier tel que } 2k \in X_{n+1}(\Omega)$$

4. Puis :

$$\forall x \in \mathbb{R}, G_{X_1}(x) = P[X = 0]\,x^0 + P[X = 2]\,x^2 = q + px^2$$

Appliquons la formule des probabilités totales:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad G_{X_{n+1}}(x) = \sum_{2k \in X_{n+1}(\Omega)} P\left[X_{n+1} = 2k\right] x^{2k}$$

$$= \sum_{2k \in X_{n+1}(\Omega)} \left[\sum_{0 \leqslant k \leqslant i,\, i \in X_n(\Omega)} P\left[X_{n+1} = 2k / X_n = i\right] P\left[X_n = i\right] \right] x^{2k}$$

$$= \sum_{2k \in X_{n+1}(\Omega)} \left[\sum_{0 \leqslant k \leqslant i,\, i \in X_n(\Omega)} \binom{i}{k} p^k q^{i-k} P\left[X_n = i\right] \right] x^{2k}$$

$$= \sum_{i \in X_n(\Omega)} \left[\sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} q^{i-k} \left(px^2\right)^k \right] P\left[X_n = i\right]$$

$$= \sum_{i \in X_n(\Omega)} \left(px^2 + q\right)^i P\left[X_n = i\right] = G_{X_n}(q + px^2)$$

5. Déduisons de la question précédente que la suite $(E(X_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est géométrique et déterminer $E(X_n)$ en fonction de p et n.

$$E(X_{n+1}) = G'_{X_{n+1}}(1) = \left[G_{X_n}(q + px^2)\right]'_{x=1}$$
$$= \left[2px G'_{X_n}(q + px^2)\right]_{x=1} = 2pG'_{X_n}(1)$$
$$= 2pE(X_n)$$

La suite $(E(X_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $2p$ et :

$$E(X_n) = (2p)^{n-1} E(X_1) = (2p)^n$$

2.3. Extinction de la population de bactéries.

On note Z_n la variable de Bernouilli égale à 1 si le milieu ne contient plus de bactéries à l'issue du $n^{ième}$ laps de temps T, et à 0 sinon. On se propose d'étudier la convergence en loi de la suite de variable aléatoire $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

1. Montrons par récurrence sur l'entier n non nul, que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad G_{X_n}(x) = \underbrace{\left(G_{X_1} \circ G_{X_1} \circ \cdots \circ G_{X_1}\right)}_{n \text{ fois}}(x) \qquad \mathcal{H}_n$$

Pour $n = 1$, $G_1(x) = \underbrace{\left(G_{X_1}\right)}_{1 \text{ fois}}(x)$ce qui prouve que $\mathcal{H}_1$ est vraie. Supposons pour un certain n que $\mathcal{H}_n$ soit vraie.

$$G_{X_{n+1}}(x) = G_{X_n}(q + px^2) = \left(G_{X_n} \circ G_{X_1}\right)(x) = \left(\underbrace{\left(G_{X_1} \circ G_{X_1} \circ \cdots \circ G_{X_1}\right)}_{n \text{ fois}} \circ G_1 \right)(x)$$

La composition des applications étant associative on en déduit que pour tout entier n non nul,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad G_{X_{n+1}}(x) = \left(G_{X_1} \circ G_{X_n}\right)(x) = q + p\left[G_{X_n}(x)\right]^2$$

Ce qui prouve que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie. D'après l'axiome de récurrence $\mathcal{H}_n$ est vraie pour tout entier n non nul.puis :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad G_{X_{n+1}}(x) - G_{X_n}(x) = q + p\left[G_{X_n}(x)\right]^2 - G_{X_n}(x) =$$
$$= p\left[\frac{q}{p} + [G_{X_n}(x)]^2 - \frac{1}{p}G_{X_n}(x)\right] = p\left[\frac{q}{p} + [G_{X_n}(x)]^2 - \frac{p+q}{p}G_{X_n}(x)\right]$$
$$= p\left[\frac{q}{p} + [G_{X_n}(x)]^2 - \frac{q}{p}G_{X_n}(x) - G_{X_n}(x)\right]$$
$$= p\left[1 - G_{X_n}(x)\right]\left[\frac{q}{p} - G_{X_n}(x)\right]$$

2. Lorsque x appartient à l'intervalle $\left[0, \frac{q}{p}\right]$, montrons par récurrence sur l'entier n non nul que :

$$0 \leqslant G_{X_n}(x) \leqslant \frac{q}{p} \qquad \mathcal{H}_n$$

Pour $n = 1$, $0 \leqslant G_1(x) = q + px^2 \leqslant q + p\frac{q^2}{p^2} = q(\frac{p+q}{p}) = \frac{q}{p}$ ce qui prouve que $\mathcal{H}_1$ est vraie. Supposons pour un certain n que $\mathcal{H}_n$ soit vraie.

$$G_{X_{n+1}}(x) = q + p\left[G_{X_n}(x)\right]^2 \leqslant q + p\frac{q^2}{p^2} = q(\frac{p+q}{p}) = \frac{q}{p}$$

Ce qui prouve que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie. D'après l'axiome de récurrence $\mathcal{H}_n$ est vraie pour tout entier n non nul.
Pour tout x de l'intervalle $\left[0, \frac{q}{p}\right]$:

$$G_{X_{n+1}}(x) - G_{X_n}(x) = p\left[1 - G_{X_n}(x)\right]\left[\frac{q}{p} - G_{X_n}(x)\right] \geqslant p\left[1 - \frac{q}{p}\right]\left[\frac{q}{p} - G_{X_n}(x)\right]$$
$$G_{X_{n+1}}(x) - G_{X_n}(x) \geqslant p\left[\frac{p-q}{p}\right]\left[\frac{q}{p} - G_{X_n}(x)\right] \geqslant 0 \text{ car } q < \tfrac{1}{2} \text{ et donc } p > \tfrac{1}{2}$$

Il en découle que la suite $(G_{X_n}(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante, majorée $\frac{q}{p}$, donc converge vers son point fixe l solution de l'équation :

$$l - l = p(1-l)(\frac{q}{p} - 1) \text{ avec } 0 \leqslant l \leqslant \frac{q}{p} < 1$$

Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} G_{X_n}(x) = \frac{q}{p}$$

3. Prouvons alors que la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une loi de Bernoulli .

$$P(Z_n = 1) = P(X_n = 0) = G_{X_n}(0) \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{q}{p}$$

RAPPORT

Le premier problème d'algèbre linéaire se proposait de déterminer le sous-espace des suites vérifiant la relation de récurrence : $\forall n \in N \quad u_{n+3} = 2u_{n+2} - \frac{5}{4}u_{n+1} + \frac{1}{4}u_n$ *, par deux méthodes distinctes, l'une faisant appel au calcul de la puissance énième d'une matrice non diagonalisable et l'autre utilisant une base de ce sous-espace.*
Il devait permettre de sélectionner les étudiants sérieux, travailleurs, ayant acquis un niveau minimal en mathématiques.

Le second problème de probabilité s'intéressait à l'évolution d'une bactérie qui, dans un milieu, mourait avec la probabilité p ou se divisait en deux bactéries de comportement identique avec la probabilité 1-p.
Plus abstrait et délicat, il avait pour objectif de repérer les étudiants ayant des aptitudes certaines dans cette matière.

Premier problème :

Première méthode.

1. Bien traité.
2. La définition d'une valeur propre d'un endomorphisme est connue mais que de difficultés pour déterminer P !
3. On vérifie que a est racine sans prouver que cette racine est double.
4. Rappelons que deux valeurs propres pour une matrice de taille 3 ne prouvent pas que la matrice ne soit pas diagonalisable.
5. Traité en général.
6. Traité en général.

Deuxième méthode.

1. On rappelle trop rarement que la suite n'étant pas nulle, le premier terme ainsi que la raison de cette suite ne sont pas nuls.
2. On ne vérifie pas que la suite γ est élément de $(\mathcal{E})$ ou on affirme que cette suite est géométrique et donc qu'elle appartient à l'ensemble.
3. Correctement fait par quelques uns.

Le reste du problème n'est traité que par les meilleurs.

Deuxième problème :

Fonction génératrice

1. Sans doute la question n'était-elle pas suffisamment explicite. On s'attendait ici à ce que les candidats ne se contentent pas de rappeler la loi d'une variable binomiale ou uniforme, mais calculent la somme de l'expression de cette fonction génératrice.
2. Questions 3. 4. 5. bien abordées.

Etude de la variable Xn.
Cette partie a départagé les candidats. Les meilleurs d'entre eux ont compris l'exercice.

Bilan de la correction des copies :

L'augmentation du nombre de candidats s'est faite au détriment de la qualité. Certaines copies sont peu consistantes. Les résultats sont très disparates. Le programme ambitieux de cette option ne devrait attirer que les candidats ayant un niveau convenable en mathématiques. Ce ne fût pas le cas cette année et la moyenne générale de ***9,2*** *en a souffert.*