Annales concours ecricome 2006

Mathématiques ULM BL

ESPRIT GÉNÉRAL

Objectifs de l'épreuve
Vérifier chez les candidats l'existence des bases nécessaires pour des études supérieures de management.
Apprécier l'aptitude à lire et comprendre un énoncé, choisir un outil adapté et l'appliquer (théorème...).
Apprécier le bon sens des candidats et la rigueur du raisonnement.

Sujets
Deux problèmes indépendants.
Instruments de calcul interdits, tables de lois fournies

Evaluation
Problèmes de valeur sensiblement égale

ÉPREUVE 2006

Durée : 3 heures

Aucun document et instrument de calcul n'est autorisé.
Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

SUJET

1. PROBLEME.

Pour tout entier naturel n, $E = \mathbb{R}_n[X]$ représente l'ensemble des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à l'entier n. Id_E désigne l'identité de E, Θ l'endomorphisme nul de $\mathcal{L}(E)$.
Si g est un endomorphisme de E, on définit g^p par :

$$\begin{cases} g^0 = Id_E \\ g^p = g^{p-1} \circ g \ , \ p \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Soient φ et D les deux applications définies sur E par :

$$\forall P \in E, \qquad D(P) = P', \quad \varphi(P) = P + P'$$

1. Montrer que D est un endomorphisme de E. Vérifier que :

$$\varphi = Id_E + D$$

En déduire que φ un endomorphisme de E.

2. Justifier que l'on a :

$$(\varphi - Id_E)^{n+1} = \Theta$$

3. Soit P un polynôme propre de l'endomorphisme φ attaché à la valeur propre λ.

   a. Calculer $(\varphi - Id_E)^{n+1}(P)$ par le binôme de Newton et montrer que la seule valeur propre possible est le réel $\lambda = 1$.

   b. Montrer que $\lambda = 1$ est valeur propre de φ.

   c. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

4. Montrer que $\varphi \circ D = D \circ \varphi$ et prouver par récurrence que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \varphi \circ D^k = D^k \circ \varphi$$

5. Démontrer les deux égalités suivantes :

$$\varphi \circ \left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k D^k\right) = \left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k D^k\right) \circ \varphi = Id_E$$

En déduire que φ est bijective et exprimer φ^{-1} en fonction de $Id_E, D, D^2, ...D^n$.

6. Résoudre dans E l'équation d'inconnue P suivante :

$$P + P' = \frac{X^n}{n!}$$

7. Soit A la matrice de φ dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2, ..., X^n)$. Ecrire cette matrice A sous la forme d'un tableau. Faire de même pour son inverse A^{-1} en précisant bien ses éléments constitutifs.

2. PROBLEME.

On considère une suite finie, ou non, de lancers successifs d'une pièce de monnaie équilibrée pour laquelle la probabilité d'apparition de l'événement pile, noté P, est la même que la probabilité d'apparition de l'événement face, noté F . La suite de lancers est interrompue à la première apparition de deux piles consécutifs, si cet événement se produit. On désigne alors par T la variable aléatoire indiquant le numéro du dernier lancer et par a_n le cardinal de l'événement $[T = n]$. Par exemple l'événement $[T = 4]$ est réalisé pour les suites de lancers amenant les résultats $(P, F, P, P), (F, F, P, P)$ et dans ce cas $a_4 = 2$.

Mathématiques ULM BL

2.1. Détermination de la loi de T.

1. En vous référant à l'exemple ci-dessus, décrire les événements $[T = n]$ pour $n = 2, n = 3, n = 5$ et calculer a_2, a_3, a_5.

2. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, montrer que :
$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

3. On note Φ la racine positive de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.
   - a. Montrer que l'autre racine est $1 - \Phi$.
   - b. Vérifier les deux égalités suivantes :
$$\Phi^2 = \Phi + 1, \qquad (1 - \Phi)^2 = 2 - \Phi$$

4. Démontrer par récurrence sur l'entier $n \geqslant 2$, que l'expression de a_n est donnée par la formule :
$$a_n = \frac{1}{2\Phi - 1}\left[\Phi^{n-1} - (1 - \Phi)^{n-1}\right]$$

5. En déduire la loi de probabilité de la variable T, c'est-à-dire la probabilité de l'événement de $[T = n]$ pour tout entier $n \geqslant 2$.

2.2. Calcul de l'espérance de T.

1. Dans cette question N est un nombre entier non nul et S_N la fonction définie sur l'intervalle $[0, 1[$ par :
$$S_N(x) = \sum_{k=0}^{N} x^k$$
   - a. Calculer $(1 - x)S_N(x)$ et en déduire une expression de $S_N(x)$.
   - b. En déduire, pour x dans l'intervalle $[0, 1[$, la somme $S(x)$:
$$S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k$$
   - c. Déterminer la limite de la suite (Nx^N) lorsque N tend vers l'infini. Dériver $S_N(x)$, et en déduire, pour x dans l'intervalle $[0, 1[$, la somme $T(x)$:
$$T(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1}$$

2. Vérifier que T est bien une variable aléatoire, c'est-à-dire que :
$$\sum_{n=2}^{+\infty} p\,[T = n] = 1$$

2.3. Approximation du réel Φ.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ par :

$$f(x) = \frac{x^2+1}{2x-1}$$

à laquelle on lui associe la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ déterminée par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} b_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad b_{n+1} = f(b_n) \end{cases}$$

1. Calculer b_1 et b_2.
2. Montrer que Φ est solution du système $\begin{cases} f(x) = x \\ f'(x) = 0 \end{cases}$. En déduire les variations de f sur l'intervalle $[\Phi, +\infty[$.
3. Prouver que, pour tout $n \geqslant 0$:
$$\Phi \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \leqslant 2$$
En déduire que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers une limite à préciser.
4. Prouver que, pour tout $n \geqslant 0$:
$$b_{n+1} - \Phi \leqslant \frac{1}{2}(b_n - \Phi)^2$$
En déduire que, pour tout $n \geqslant 0$:
$$0 \leqslant b_n - \Phi \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{\sum_{k=0}^{n} 2^k}$$
5. Vérifier que b_3 est une valeur approchée de Φ à 10^{-4} près. Calculer cette valeur approchée sous la forme d'une fraction irréductible.

CORRIGÉ

1. PROBLEME.

Pour tout entier naturel n, $E = \mathbb{R}_n[X]$ représente l'ensemble des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à l'entier n. Id_E désigne l'identité de E, Θ l'endomorphisme nul de $\mathcal{L}(E)$.
Si g est un endomorphisme de E, on définit g^p par :

$$\begin{cases} g^0 = Id_E \\ g^p = g^{p-1} \circ g \ , \ p \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Soient φ et D les deux applications définies sur E par :

$$\forall P \in E, \qquad D(P) = P', \quad \varphi(P) = P + P'$$

1. L'opérateur de dérivation D est un endomorphisme de E. De façon évidente :

   $$\varphi = Id_E + D$$

   φ est un endomorphisme de E comme somme de deux endomorphismes de E.

2. Les éléments de E sont des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à l'entier n, leur dérivée $(n+1)^{ème}$ est le polynôme nul. Donc :

   $$(\varphi - Id_E)^{n+1} = \Theta$$

3. Soit P un polynôme propre de l'endomorphisme φ attaché à la valeur propre λ.

   a. Par définition
   $$\varphi(P) = \lambda P \text{ avec } P \neq 0$$
   Les endomorphismes φ et Id_E commutent, on peut développer $(\varphi - Id_E)^{n+1}$ par le binôme de Newton.

   $$(\varphi - Id_E)^{n+1}(P) = \left(\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\varphi^k\right)(P) = \left(\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\lambda^k\right) P$$
   $$= (\lambda - 1)^{n+1} P$$

   $$(\varphi - Id_E)^{n+1}(P) = 0 \underset{P\neq 0}{\Rightarrow} (\lambda - 1)^{n+1} \Rightarrow \lambda = 1$$

   La seule valeur propre possible est le réel $\lambda = 1$.

b. $\lambda = 1$ est valeur propre de φ puisque le polynôme $P = 1$ est un vecteur propre attaché à $\lambda = 1$. ($\varphi(1) = 1$).

c. Si l'endomorphisme φ était diagonalisable il serait semblable à l'identité, ce qui n'est pas le cas.

4. Montrons que $\varphi \circ D = D \circ \varphi$

$$\varphi \circ D = (Id_E + D) \circ D = D + D^2 = D \circ (Id_E + D) = D \circ \varphi$$

Prouvons par récurrence que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \varphi \circ D^k = D^k \circ \varphi \quad \mathcal{H}_n$$

$\mathcal{H}_0$ est vraie puisque $\varphi \circ D^0 = \varphi = D^0 \circ \varphi$. Supposons que $\mathcal{H}_n$ soit vraie pour un certain n.

$$\varphi \circ D^{k+1} = (\varphi \circ D) \circ D^k = D \circ \varphi \circ D^k = D \circ \left(D^k \circ \varphi\right) = D^{k+1} \circ \varphi$$

C'est donc vrai au rang $n+1$ et d'après l'axiome de récurrence $\mathcal{H}_n$ est vraie pour tout n.

5. Démontrons les deux égalités :

$$\varphi \circ \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k D^k\right) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(\varphi \circ D^k\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(D^k \circ \varphi\right) = \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k D^k\right) \circ \varphi = Id_E$$

$$\forall P \in E \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k D^k \circ \varphi(P) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k D^k (P + P')$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k D^k(P) + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k D^{k+1}(P)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k D^k(P) + \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} D^k(P) = Id_E + (-1)^n D^{n+1} = Id_E(P)$$

Cette dernière égalité prouve que

$$= \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k D^k \circ \varphi\right) = \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k D^k\right) \circ \varphi = Id_E$$

et que φ est bijective. Son application réciproque est donnée par :

$$\varphi^{-1} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k D^k$$

6. Soit à résoudre dans E l'équation d'inconnue P suivante :

$$P + P' = \frac{X^n}{n!}$$

On remarque que :

$$P + P' = \frac{X^n}{n!} \Leftrightarrow \varphi(P) = \frac{X^n}{n!}$$

$$\Leftrightarrow P = \varphi^{-1}(\frac{X^n}{n!}) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k D^k(\frac{X^n}{n!})$$

$$\Leftrightarrow P = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{X^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{X^k}{k!}$$

7. La matrice de φ dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2, ..., X^n)$ s'écrit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour tout j de $\{0, ...n\}$

$$\varphi^{-1}(X^j) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k D^k(X^j) = \sum_{k=0}^{j}(-1)^k j! \frac{X^{j-k}}{(j-k)!}$$

$$\varphi^{-1}(X^j) = \sum_{i=0}^{j} \frac{(-1)^{j-i} j!}{i!} X^i$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{(-1)^2 2!}{0!} & \dots & \dots & \frac{(-1)^n n!}{0!} \\ 0 & 1 & \frac{(-1)^1 2!}{1!} & \ddots & \ddots & \frac{(-1)^{n-1} n!}{1!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{(-1)^{j-i} j!}{i!} & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & & \frac{(-1)^{n-i} j!}{i!} \\ \vdots & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. PROBLEME.

On considère une suite finie, ou non, de lancers successifs d'une pièce de monnaie équilibrée pour laquelle la probabilité d'apparition de l'événement pile, noté P, est la même que la probabilité d'apparition de l'événement face, noté F . La suite de lancers est interrompue à la première apparition de deux piles consécutifs, si cet événement se produit. On désigne alors par T la variable aléatoire indiquant le numéro du dernier lancer et par a_n le cardinal de l'événement $[T = n]$. Par exemple l'événement $[T = 4]$ est réalisé pour les suites de lancers amenant les résultats $(P, F, P, P), (F, F, P, P)$ et dans ce cas $a_4 = 2$.

2.1. Détermination de la loi de T.

1.

$$[T = 2] = \{(P, P)\}$$
$$[T = 3] = \{(F, P, P)\}$$
$$[T = 5] = \{(F, F, F, P, P), (F, P, F, P, P), (P, F, F, P, P)\}$$

et donc :

$$a_2 = 1, a_3 = 1, a_5 = 3$$

2. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, soit le premier jet amène un face et pour que l'événement $[T = n + 2]$ soit réalisé, il faut que l'événement $[T = n + 1]$ soit réalisé ou le premier jet amène un pile et le deuxième jet amène un face et pour que l'événement $[T = n + 2]$ soit réalisé, il faut que l'événement $[T = n]$ soit réalisé. Il en découle que :

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

3. On note Φ la racine positive de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.

   a. On a $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$.

   $$(1 - \Phi)^2 - (1 - \Phi) - 1 = \Phi^2 - 2\Phi + 1 - 1 + \Phi - 1 = \Phi^2 - \Phi - 1 = 0$$

   L'autre racine est $1 - \Phi$.

   b. Puis :

   $$\Phi^2 - \Phi - 1 = 0 \Leftrightarrow \Phi^2 = \Phi + 1$$

   $$(1 - \Phi)^2 = \Phi^2 - 2\Phi + 1 = \Phi + 1 - 2\Phi + 1 = 2 - \Phi$$

4. Démontrons par récurrence sur l'entier $n \geqslant 2$, que l'expression de a_n est donnée par la formule :

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\Phi - 1}\left[\Phi^{n-1} - (1 - \Phi)^{n-1}\right] \\ a_{n+1} &= \frac{1}{2\Phi - 1}\left[\Phi^n - (1 - \Phi)^n\right] \end{aligned}\right\} \mathcal{H}_n$$

$\mathcal{H}_2$ est vraie puisque :

$$a_2 = \frac{1}{2\Phi - 1}\left[\Phi - (1-\Phi)\right] = \frac{2\Phi - 1}{2\Phi - 1} = 1$$

et

$$a_3 = \frac{1}{2\Phi - 1}\left[\Phi^2 - (1-\Phi)^2\right] = \frac{1}{2\Phi - 1}\left[\Phi + 1 - (2-\Phi)\right] = 1.$$

Supposons que $\mathcal{H}_n$ soit vraie pour un certain n.

$$a_{n+2} = a_n + a_{n+1} = \frac{1}{2\Phi - 1}\left(\Phi^{n-1} - (1-\Phi)^{n-1} + \Phi^n - (1-\Phi)^n\right)$$

$$a_{n+2} = \frac{1}{2\Phi - 1}\left(\Phi^{n-1}(1+\Phi) - (1-\Phi)^{n-1}(2-\Phi)\right)$$

$$a_{n+2} = \frac{1}{2\Phi - 1}\left(\Phi^{n-1}\Phi^2 - (1-\Phi)^{n-1}(1-\Phi)^2\right)$$

$$a_{n+2} = \frac{1}{2\Phi - 1}\left(\Phi^{n+1} - (1-\Phi)^{n+1}\right)$$

C'est donc vrai au rang $n+1$ et d'après l'axiome de récurrence $\mathcal{H}_n$ est vraie pour tout n.

5. La loi de probabilité de la variable T est donnée par :

$$\text{pour tout entier } n \geqslant 2 \quad p\left[T = n\right] = \frac{a_n}{2^n} = \frac{1}{2(2\Phi - 1)}\left(\left(\frac{\Phi}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\Phi}{2}\right)^{n-1}\right)$$

2.2. Calcul de l'espérance de T.

1. Dans cette question N est un nombre entier non nul et S_N la fonction définie sur l'intervalle $[0,1[$ par :

$$S_N(x) = \sum_{k=0}^{N} x^k$$

   a. Calculons $(1-x)S_N(x)$

$$(1-x)S_N(x) = \sum_{k=0}^{N} x^k - \sum_{k=0}^{N} x^k = 1 - x^{N+1}$$

   on peut en déduire que :

$$S_N(x) = \frac{1 - x^{N+1}}{1-x}$$

b. Pour x dans l'intervalle $[0,1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x^{N+1}=0$ donc :

$$S(x)=\sum_{k=0}^{+\infty} x^k=\lim_{n\to+\infty}\frac{1-x^{N+1}}{1-x}=\frac{1}{1-x}$$

c. Pour x dans l'intervalle $[0,1[$, $\lim\limits_{N\to+\infty} Nx^N=0$ donc :

$$S'_N(x)=\sum_{k=0}^{N} kx^{k-1}=\frac{(1-x)(N+1)x^N+\left(1-x^{N+1}\right)}{(1-x)^2}\underset{N\to+\infty}{\rightarrow}\frac{1}{(1-x)^2}$$

On peut en déduire que :

$$T(x)=\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1}=\frac{1}{(1-x)^2}$$

2. Vérifions que T est bien une variable aléatoire :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} p\left[T=n\right]=\frac{1}{2(2\Phi-1)}\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\left(\frac{\Phi}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1-\Phi}{2}\right)^{n-1}\right)$$

$$=\frac{1}{2(2\Phi-1)}\left[\frac{\frac{\Phi}{2}}{1-\frac{\Phi}{2}}-\frac{\frac{1-\Phi}{2}}{\frac{1+\Phi}{2}}\right]=\frac{1}{2(2\Phi-1)}\left[\frac{\Phi}{2-\Phi}-\frac{1-\Phi}{1+\Phi}\right]$$

$$=\frac{1}{2(2\Phi-1)}\left[\frac{\Phi^2+\Phi-(2+\Phi^2-3\Phi)}{(2-\Phi)(\Phi+1)}\right]=\frac{1}{2(2\Phi-1)}\left[\frac{4\Phi-2}{-\Phi^2+\Phi+2}\right]$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} p\left[T=n\right]=\frac{1}{-\Phi-1+\Phi+2}=1$$

3. Montrer que T admet une espérance et que :

$$E(T)=\frac{1}{2(2\Phi-1)}\sum_{n=2}^{+\infty}\left(n\left(\frac{\Phi}{2}\right)^{n-1}-n\left(\frac{1-\Phi}{2}\right)^{n-1}\right)$$

$$=\frac{1}{2(2\Phi-1)}\left[\frac{1}{\left(1-\frac{\Phi}{2}\right)^2}-\frac{1}{\left(\frac{1+\Phi}{2}\right)^2}\right]=\frac{4}{2(2\Phi-1)}\left[\frac{1}{(2-\Phi)^2}-\frac{1}{(1+\Phi)^2}\right]$$

$$=\frac{4}{2(2\Phi-1)}\left[\frac{(1+\Phi)^2-(2-\Phi)^2}{\left[(2-\Phi)(1+\Phi)\right]^2}\right]=\frac{4}{2(2\Phi-1)}\left[\frac{3(2\Phi-1)}{1}\right]=6$$

2.3. Approximation du réel Φ.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ par :

$$f(x) = \frac{x^2+1}{2x-1}$$

à laquelle on associe la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ déterminée par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} b_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad b_{n+1} = f(b_n) \end{cases}$$

1. Calculons b_1 et b_2.

$$b_1 = \frac{5}{3}$$

$$b_2 = \frac{\left(\frac{5}{3}\right)^2 + 1}{2\frac{5}{3} - 1} = \frac{34}{9}.\frac{3}{7} = \frac{34}{21}$$

2. f est dérivable sur l'intervalle $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$

$$f'(x) = \frac{2x(2x-1) - 2(x^2+1)}{(2x-1)^2} = \frac{2(x^2-x-1)}{(2x-1)^2}$$

$$f'(\Phi) = \frac{2(\Phi^2 - \Phi - 1)}{(2\Phi-1)^2} = 0$$

$$f(\Phi) - \Phi = \frac{\Phi^2+1}{2\Phi-1} - \Phi = \frac{\Phi^2 + 1 - 2\Phi^2 + \Phi}{2\Phi - 1} = \frac{-\Phi^2+1+\Phi}{2\Phi-1} = 0$$

Φ est bien solution du système $\begin{cases} f(x) = x \\ f'(x) = 0 \end{cases}$
On peut en déduire les variations de f sur l'intervalle $[\Phi, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{2(x-\Phi)(x+\Phi-1)}{(2x-1)^2}$$

Le polynôme du second degré situé au numérateur de cette dérivèe est du signe du coefficient en x^2 à l'extérieur des deux racines qui sont $1-\Phi$ et Φ. La fonction f est donc croissante sur $[\Phi, +\infty[$.

3. Prouver par récurrence que, pour tout $n \geqslant 0$:

$$\Phi \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \leqslant 2 \quad \mathcal{H}_n$$

$\mathcal{H}_0$ est vraie puisque $\Phi \leqslant b_1 = \frac{5}{3} \leqslant b_0 = 2 \leqslant 2$. Supposons que $\mathcal{H}_n$ soit vraie pour un certain n. Puisque f est croissante sur $[\Phi, +\infty[$.

$$\begin{aligned} &f(\Phi) \leqslant f(b_{n+1}) \leqslant f(b_n) \leqslant f(2) = \frac{5}{3} \\ &\Phi \leqslant b_{n+2} \leqslant b_{n+1} \leqslant 2 \end{aligned}$$

C'est donc vrai au rang $n+1$ et d'après l'axiome de récurrence $\mathcal{H}_n$ est vraie pour tout n.
La suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, minorée par Φ, donc converge vers l'unique point fixe solution de l'équation $\begin{cases} f(x) = x \\ x \in [\Phi, +\infty[\end{cases}$, c'est-à-dire vers Φ.

4. Prouvons que, pour tout $n \geqslant 0$:

$$b_{n+1} - \Phi \leqslant \frac{1}{2}\left(b_n - \Phi\right)^2$$

$$b_{n+1} - \Phi = f(x) - \Phi = \frac{b_n^2 + 1}{2b_n - 1} - \Phi$$

$$= \frac{b_n^2 + 1 - 2b_n\Phi + \Phi}{2b_n - 1} = \frac{b_n^2 - 2b_n\Phi + \Phi^2}{2b_n - 1}$$

$$b_{n+1} - \Phi = \frac{\left(b_n - \Phi\right)^2}{2b_n - 1} \leqslant \frac{\left(b_n - \Phi\right)^2}{2\Phi - 1} \leqslant \frac{1}{2}\left(b_n - \Phi\right)^2$$

car $2\Phi - 1 \geqslant 2$ puisque $\Phi \geqslant \frac{3}{2}$.
Prouvons par récurrence que, pour tout $n \geqslant 0$:

$$0 \leqslant b_n - \Phi \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{\sum_{k=0}^{n} 2^k} \qquad \mathcal{H}_n$$

$\mathcal{H}_0$ est vraie puisque $0 \leqslant b_0 - \Phi = 2 - \Phi \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{\sum_{k=0}^{0} 2^k} = \frac{1}{2}$. $\left(\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \geqslant \frac{1+2}{2} \geqslant \frac{3}{2}\right)$. Supposons que $\mathcal{H}_n$ soit vraie pour un certain n.

$$0 \leqslant b_{n+1} - \Phi \leqslant \frac{1}{2}\left(b_n - \Phi\right)^2 \leqslant \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\sum_{k=0}^{n} 2^k}\right]^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{1+2\sum_{k=0}^{n} 2^k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sum_{k=0}^{n+1} 2^k}$$

C'est donc vrai au rang $n+1$ et d'après l'axiome de récurrence $\mathcal{H}_n$ est vraie pour tout n.

5. Vérifions que b_3 est une valeur approchée de Φ à 10^{-4} près.

$$0 \leqslant b_3 - \Phi \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{\sum_{k=0}^{3} 2^k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1+2+4+8} = \frac{1}{2^{15}} \leqslant 10^{-4}$$

RAPPORT

LE SUJET

Le premier problème d'algèbre linéaire portait sur l'espace vectoriel E des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à n (n non nul). On se proposait de démontrer que l'application φ définie par :

Pour tout P de E $\quad \varphi(P) = P + P'$

est un automorphisme de E, non diagonalisable, d'en déterminer son application réciproque et de l'utiliser dans une application pour résoudre l'équation $P + P' = \dfrac{X^n}{n!}$, d'inconnue P.

Cette partie du programme a mis à mal certains candidats.

Le second problème s'intéressait à une suite de lancers successifs d'une pièce de monnaie équilibrée interrompue par la première apparition de deux piles consécutifs. On montrait que la variable aléatoire indiquant le numéro du dernier lancer était une variable aléatoire admettant une espérance.

PREMIER PROBLÈME

1. Bien traité.
2. Quelques candidats justifient correctement que $(\varphi - Id_E)^{n+1}$ est l'endomorphisme nul.
3. La définition d'une valeur propre d'un endomorphisme est connue mais on se perd dans le développement de $(\varphi - Id_E)^{n+1}$ par le binôme de Newton et on écrit souvent n'importe quoi. Les bons candidats prouvent que le réel 1 est la seule valeur propre possible de φ et que le spectre de φ est réduit à $\{1\}$.
4. Traité en général.
5. Traité en général.

DEUXIÈME PROBLÈME

1. La définition de la suite (a_n) est bien comprise.
2. On éprouve des difficultés pour justifier la relation de récurrence satisfaite par (a_n)
3. La partie concernant l'approximation du réel par la suite (b_n) a été traitée de façon décevante.

BILAN DE LA CORRECTION DES COPIES

Dans l'ensemble les copies sont bien présentées. Le niveau est assez hétérogène. On trouve de bonnes copies, des copies moyennes et des copies très faibles.
La moyenne est de 9.56 avec un écart-type de 3 .81.