CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

**EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE PC**

# MATHEMATIQUES 1

**Durée : 4 heures**

*N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

## Les calculatrices sont interdites

**Les parties I, II et III sont indépendantes.**

## Notations et définitions

Soit $\mathcal{P} = \mathbb{R}^2$ le plan muni du produit scalaire canonique et du repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ avec $O = (0,0)$, $\mathbf{i} = (1,0)$ et $\mathbf{j} = (0,1)$. La norme associée au produit scalaire canonique sera notée $\|\cdot\|_2$ si bien que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\|x \cdot \mathbf{i} + y \cdot \mathbf{j}\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Pour $a$ et $b$ deux réels donnés, on définit $\mathcal{D}_{a,b}$ la droite d'équation dans $\mathcal{R}$ : $y = ax + b$.

Si $M \in \mathcal{P}$ a pour coordonnées $(x,y)$ dans $\mathcal{R}$, on note $p_{a,b}(M)$ l'unique point de $\mathcal{D}_{a,b}$ ayant, dans $\mathcal{R}$, la même abscisse $x$ que $M$.

On définit aussi $\mathcal{D}'_{a,b}$ la droite d'équation dans $\mathcal{R}$ : $x = ay + b$, et $p'_{a,b}(M)$ l'unique point de $\mathcal{D}'_{a,b}$ ayant, dans $\mathcal{R}$, la même ordonnée $y$ que $M$.

**PARTIE I :** DROITES DES MOINDRES CARRÉS DANS UN CAS PARTICULIER

Soient $A$, $B$ et $C$ les trois points de $\mathcal{P}$ dont les coordonnées dans $\mathcal{R}$ sont respectivement : $(0,0)$, $(0,1)$ et $(\alpha, \frac{1}{2})$ où $\alpha$ désigne un réel non nul.

On définit deux applications $f_0$ et $f_1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ en posant : pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$,

$$f_0(a,b) = \left\|\overrightarrow{p_{a,b}(A)A}\right\|_2^2 + \left\|\overrightarrow{p_{a,b}(B)B}\right\|_2^2 + \left\|\overrightarrow{p_{a,b}(C)C}\right\|_2^2,$$

$$f_1(a,b) = \left\|\overrightarrow{p'_{a,b}(A)A}\right\|_2^2 + \left\|\overrightarrow{p'_{a,b}(B)B}\right\|_2^2 + \left\|\overrightarrow{p'_{a,b}(C)C}\right\|_2^2.$$

**I.1.** Montrer que $A$, $B$ et $C$ ne sont pas alignés.

**I.2.**

**I.2.a.** Montrer que $f_0(a,b) = b^2 + (b-1)^2 + \left(a\alpha + b - \frac{1}{2}\right)^2$.

**I.2.b.** Vérifier que $f_0(a,b) = \left(a\alpha + b - \frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(b - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$.

**I.2.c.** En déduire que la fonction $f_0$ admet un minimum sur $\mathbb{R}^2$ et que ce minimum est atteint en un unique couple de réels $(a,b) = (0, \frac{1}{2})$ correspondant à la droite, notée $\mathcal{D}_0$, d'équation dans $\mathcal{R}$ : $y = \frac{1}{2}$.

**I.3.**

**I.3.a.** Déterminer l'expression explicite de $f_1(a,b)$ en fonction de $a, b$ et $\alpha$.

**I.3.b.** Montrer que $f_1(a,b) = 3\left(\frac{a}{2} + b - \frac{\alpha}{3}\right)^2 + \frac{1}{2}a^2 + \frac{2}{3}\alpha^2$.

**I.3.c.** En déduire que la fonction $f_1$ admet un minimum sur $\mathbb{R}^2$ et que ce minimum est atteint en un unique couple de réels, noté $(a_1, b_1)$, à déterminer. On note alors $\mathcal{D}_1$ la droite d'équation dans $\mathcal{R}$ : $x = a_1 y + b_1$.

**I.4.** Montrer que $\mathcal{D}_0$ et $\mathcal{D}_1$ sont orthogonales et se coupent en un unique point $M \in \mathcal{P}$ qui est l'isobarycentre de $(A, B, C)$.

## PARTIE II : RÉSULTATS SUR UN ESPACE PRÉHILBERTIEN RÉEL

Soit $E$ un espace préhilbertien réel non réduit à $\{0\}$ et $F$ un sous-espace vectoriel de dimension finie de $E$. On note $(\cdot|\cdot)$ le produit scalaire sur $E$ et $\|\cdot\|$ la norme associée à ce produit scalaire.

**II.1.** Donner la définition de $F^\perp$. Énoncer (sans démonstration) une propriété vérifiée par $F$ et $F^\perp$ valable en général. Dans le cas où $E$ est de dimension finie, que peut-on dire de plus ?

Pour $\mathbf{x} \in E$, on note $p_F(\mathbf{x})$ la projection orthogonale de $\mathbf{x}$ sur $F$.

**II.2.** Démontrer que $\inf_{\mathbf{z} \in F} \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|$ est bien défini et que cette borne inférieure est atteinte en un unique élément $\mathbf{z}$ de $F$ défini par $\mathbf{z} = p_F(\mathbf{x})$.

Cette borne inférieure est notée $d(\mathbf{x}, F)$. On a donc $d(\mathbf{x}, F) = \|\mathbf{x} - p_F(\mathbf{x})\|$.
On dit qu'une application $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto (\mathbf{x}|\mathbf{y})_F$ de $E^2$ dans $\mathbb{R}$ est un **produit subordonné à** $F$ si elle vérifie les 4 propriétés suivantes :

**i)** $\forall \mathbf{x} \in E$, l'application $\mathbf{y} \mapsto (\mathbf{x}|\mathbf{y})_F$ est une forme linéaire sur $E$ ;
**ii)** $\forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E^2$, $(\mathbf{x}|\mathbf{y})_F = (\mathbf{y}|\mathbf{x})_F$ ;
**iii)** $\forall \mathbf{x} \in E$, $\forall \mathbf{y} \in F$, $(\mathbf{x}|\mathbf{y})_F = 0$ ;
**iv)** $\forall \mathbf{x} \in F^\perp$, $\forall \mathbf{y} \in F^\perp$, $(\mathbf{x}|\mathbf{y})_F = (\mathbf{x}|\mathbf{y})$.

**II.3.**

**II.3.a.** Montrer que si $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto (\mathbf{x}|\mathbf{y})_F$ est un produit subordonné à $F$, alors :

- $\forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E^2$, $(\mathbf{x}|\mathbf{y})_F = (\mathbf{x} - p_F(\mathbf{x}) | \mathbf{y} - p_F(\mathbf{y}))$ ;
- $\forall \mathbf{x} \in E$, $(\mathbf{x}|\mathbf{x})_F = (d(\mathbf{x}, F))^2$ ;
- $\forall \mathbf{x} \in E$, $(\mathbf{x}|\mathbf{x})_F \geqslant 0$ ;
- $\forall \mathbf{x} \in E$, $(\mathbf{x}|\mathbf{x})_F = 0 \iff \mathbf{x} \in F$.

**II.3.b.** Vérifier qu'il existe un unique produit subordonné à $F$.

On note alors $(\cdot|\cdot)_F$ ce produit subordonné à $F$ et pour $\mathbf{x} \in E$, on pose $\|\mathbf{x}\|_F = \sqrt{(\mathbf{x}|\mathbf{x})_F}$.

**II.4.** Montrer que pour tout $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E^2$, $|(\mathbf{x}|\mathbf{y})_F| \leqslant \|\mathbf{x}\|_F \cdot \|\mathbf{y}\|_F$ ; à quelle condition sur $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ peut-on dire que : $|(\mathbf{x}|\mathbf{y})_F| = \|\mathbf{x}\|_F \cdot \|\mathbf{y}\|_F$ ?

**II.5.**

**II.5.a.** Montrer l'existence d'un élément de $E$, noté $\mathbf{u}$, tel que $\|\mathbf{u}\| = 1$.

On note alors $D = \mathrm{Vect}(\mathbf{u})$ la droite vectorielle engendrée par $\mathbf{u}$ et $p_D$ la projection orthogonale sur $D$.

**II.5.b.** Vérifier que pour tout $\mathbf{x} \in E$, $p_D(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}|\mathbf{u})\mathbf{u}$.

Pour tout élément $\mathbf{x} \in E$, on pose $m_{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}|\mathbf{u})$, $\sigma_{\mathbf{x}} = \|\mathbf{x}\|_D$.

Pour tout couple $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E^2$, on pose $\mathrm{cov}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}|\mathbf{y})_D$.

**II.5.c.** Montrer que $\sigma_{\mathbf{x}} = \|\mathbf{x} - m_{\mathbf{x}}\mathbf{u}\|$ et que $\mathrm{cov}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}|\mathbf{y}) - m_{\mathbf{x}}m_{\mathbf{y}}$.

On suppose dans la suite de cette partie que $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont deux éléments de E tels que la famille $(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ soit libre.

**II.6.** Montrer que $\sigma_{\mathbf{x}}$ et $\sigma_{\mathbf{y}}$ sont deux réels strictement positifs.

On pose alors $\mathbf{x}^* = \dfrac{\mathbf{x} - m_{\mathbf{x}}\mathbf{u}}{\sigma_{\mathbf{x}}}$, $\mathbf{y}^* = \dfrac{\mathbf{y} - m_{\mathbf{y}}\mathbf{u}}{\sigma_{\mathbf{y}}}$ et $\rho = \dfrac{\mathrm{cov}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\sigma_{\mathbf{x}}\sigma_{\mathbf{y}}}$.

**II.7.**

**II.7.a.** Montrer que $m_{\mathbf{x}^*} = 0$, que $\sigma_{\mathbf{x}^*} = 1$ et que $\rho \in ]-1, 1[$.

**II.7.b.** Vérifier alors que $(\mathbf{u}, \mathbf{x}^*)$ est une base orthonormale de $F = \mathrm{Vect}(\mathbf{u}, \mathbf{x})$.

**II.7.c.** Montrer que $\inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \|\mathbf{y} - a\mathbf{x} - b\mathbf{u}\|$ est bien défini et vaut $d(\mathbf{y}, F)$.

**II.7.d.** Établir que $\inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \|\mathbf{y} - a\mathbf{x} - b\mathbf{u}\| = \|\mathbf{y} - m_{\mathbf{y}}\mathbf{u} - (\mathbf{y}|\mathbf{x}^*)\mathbf{x}^*\|$.

**II.7.e.** Vérifier que $\inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \|\mathbf{y} - a\mathbf{x} - b\mathbf{u}\| = \sigma_{\mathbf{y}}\|\mathbf{y}^* - \rho\mathbf{x}^*\|$.

**II.7.f.** Déterminer, en fonction de $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ et $\mathbf{u}$, l'unique couple de réels $(a_0, b_0)$ tel que :

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \|\mathbf{y} - a\mathbf{x} - b\mathbf{u}\| = \|\mathbf{y} - a_0\mathbf{x} - b_0\mathbf{u}\|.$$

Dans le plan $\mathcal{P}$, on définit $\mathcal{D}_0$ comme étant la droite dont l'équation dans $\mathcal{R}$ est : $y = a_0x + b_0$.

**II.8.** Montrer que $\mathcal{D}_0$ a pour équation dans $\mathcal{R}$ : $\dfrac{y - m_{\mathbf{y}}}{\sigma_{\mathbf{y}}} = \rho \cdot \dfrac{x - m_{\mathbf{x}}}{\sigma_{\mathbf{x}}}$.

**II.9.** Montrer de même qu'il existe un unique couple de réels $(a_1, b_1)$ tel que :

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \|\mathbf{x} - a\mathbf{y} - b\mathbf{u}\| = \|\mathbf{x} - a_1\mathbf{y} - b_1\mathbf{u}\|.$$

Dans le plan $\mathcal{P}$, on définit $\mathcal{D}_1$ comme étant la droite dont l'équation dans $\mathcal{R}$ est : $x = a_1y + b_1$.

**II.10.** Montrer que $\mathcal{D}_1$ a pour équation dans $\mathcal{R}$ : $\dfrac{x - m_{\mathbf{x}}}{\sigma_{\mathbf{x}}} = \rho \cdot \dfrac{y - m_{\mathbf{y}}}{\sigma_{\mathbf{y}}}$ avec le même réel $\rho$ défini précédemment.

**II.11.** Vérifier que $\mathcal{D}_0$ et $\mathcal{D}_1$ se coupent en un unique point $M \in \mathcal{P}$ de coordonnées dans $\mathcal{R}$ : $(m_{\mathbf{x}}, m_{\mathbf{y}})$.

**II.12.** Montrer que les droites $\mathcal{D}_0$ et $\mathcal{D}_1$ sont orthogonales si et seulement si $(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = m_{\mathbf{x}} m_{\mathbf{y}}$.

## PARTIE III : BASE ADAPTÉE À UN PRODUIT SCALAIRE DANS UN ESPACE EUCLIDIEN

Soit $E_n$ un espace euclidien de dimension $n$ avec $n \geqslant 1$.

On note $(\cdot|\cdot)$ le produit scalaire sur $E_n$ et $\|\cdot\|$ la norme associée à ce produit scalaire.

Soit $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ une base de $E_n$. Pour tout élément $\mathbf{z} \in E_n$, on notera $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathbf{z})$ la matrice de $\mathbf{z}$ dans la base $\mathcal{B}$, et on posera $Z = \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathbf{z})$. Ainsi $Z$ est la matrice-colonne à $n$ lignes donnée par la relation $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ si $\mathbf{z} = \sum_{i=1}^{n} z_i \mathbf{e}_i$.

**III.1.** Vérifier que pour tout $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E_n^2$, $(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = {}^tXSY$ si $X = \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathbf{x})$, $Y = \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathbf{y})$ et $S = \Big((\mathbf{e}_i|\mathbf{e}_j)\Big)_{(i,j)\in\{1,\ldots,n\}^2}$.

On dit alors que $S$ est **associée** à $\mathcal{B}$.

**III.2.**

**III.2.a.** Vérifier que si $S$ est associée à $\mathcal{B}$, alors $S$ est une matrice carrée symétrique réelle d'ordre $n$ et que le spectre de $S$ dans $\mathbb{C}$ est inclus dans $\mathbb{R}_+^*$.

**III.2.b.** À quelle condition sur $\mathcal{B}$ la matrice $S$ associée à $\mathcal{B}$ est-elle diagonale ?

**III.3.** On considère deux matrices $A$ et $B$ carrées d'ordre $n$ telles que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXAY = {}^tXBY$. Montrer que $A = B$.

Notons $\mathcal{B}' = (\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n)$ une base de $E_n$ et $P$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

**III.4.**

**III.4.a.** Pour $\mathbf{x} \in E_n$, on note $X = \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathbf{x})$ et $X' = \mathrm{M}_{\mathcal{B}'}(\mathbf{x})$. Donner la relation entre $X$, $X'$ et $P$.

**III.4.b.** On note $S' = \Big((\mathbf{e}'_i|\mathbf{e}'_j)\Big)_{(i,j)\in\{1,\ldots,n\}^2}$. Pour $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E_n^2$, $X' = \mathrm{M}_{\mathcal{B}'}(\mathbf{x})$ et $Y' = \mathrm{M}_{\mathcal{B}'}(\mathbf{y})$, donner l'expression de $(\mathbf{x}|\mathbf{y})$ en fonction de $X'$, $Y'$ et $S'$. En déduire que $S' = {}^tPSP$.

**III.4.c.** Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}'$ de $E_n$ telle que, pour tout $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E_n^2$,

$$(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} x'_i y'_i \qquad \text{si} \quad \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x'_i \mathbf{e}'_i \qquad \text{et} \qquad \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} y'_i \mathbf{e}'_i.$$

**III.4.d.** À quelle condition sur $\mathcal{B}$ la matrice de passage $P$ de $\mathcal{B}$ à la base précédente $\mathcal{B}'$ est-elle une matrice orthogonale ?

**III.5.** Étant donné une matrice $M_1 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale avec des réels $(d_1, \ldots, d_n)$ strictement positifs sur la diagonale, $M_1$ est-elle la matrice associée à une base de $E_n$ ?

**III.6.** Soit $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ une base orthonormale de $E_2$ et $f_2$ l'endomorphisme de $E_2$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est $M_2$.

**III.6.a.** Déterminer le spectre de $f_2$ et une base orthonormale de chaque sous-espace propre de $f_2$.

**III.6.b.** $M_2$ est-elle la matrice associée à une base de $E_2$ ?

**III.7.** Soit $M_3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ une base orthonormale de $E_3$.
On note $f_3$ l'endomorphisme de $E_3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est $M_3$.

**III.7.a.** Déterminer le spectre de $f_3$ et une base orthonormale de chaque sous-espace propre de $f_3$.

**III.7.b.** $M_3$ est-elle la matrice associée à une base de $E_3$ ?

**III.8.** $M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle la matrice associée à une base de $E_4$ ?

On dit qu'une famille $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ d'éléments de $E_n$ est **adaptée** si les conditions suivantes sont remplies :

- pour tout $(i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2$, $(\mathbf{e}_i | \mathbf{e}_j) = 0$ si $i \neq j$ ;
- pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\qquad (\mathbf{e}_i | \mathbf{e}_i) = \dfrac{1}{n}$.

**III.9.**

**III.9.a.** Montrer qu'une famille adaptée est une base de $E_n$.

**III.9.b.** Montrer l'existence d'une base adaptée.

**III.9.c.** $E_n$ admet-il une unique base adaptée ?

**III.9.d.** On suppose que $\mathcal{B}$ est une base adaptée. Pour $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E_n^2$, déterminer l'expression de $(\mathbf{x}|\mathbf{y})$ en fonction des coordonnées de $\mathbf{x}$ et de $\mathbf{y}$ dans la base $\mathcal{B}$.

**III.9.e.** Calculer alors la norme du vecteur $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{e}_i$.

## PARTIE IV : DROITES DES MOINDRES CARRÉS DANS LE CAS GÉNÉRAL

Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 3.
On considère $A_1, \ldots, A_n$, $n$ points distincts du plan $\mathcal{P}$ qui ne sont pas alignés.
On note $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ leurs coordonnées respectives dans $\mathcal{R}$.
On définit deux applications $f_0$ et $f_1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ en posant : pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$f_0(a,b) = \sum_{i=1}^{n} \left\| \overrightarrow{p_{a,b}(A_i)A_i} \right\|_2^2 \qquad \text{et} \qquad f_1(a,b) = \sum_{i=1}^{n} \left\| \overrightarrow{p'_{a,b}(A_i)A_i} \right\|_2^2.$$

**IV.1.** Donner un exemple d'espace préhilbertien réel de dimension infinie, puis un exemple d'espace euclidien de dimension $n$ (dans les deux cas, on donnera l'expression du produit scalaire).

On considère dans toute la suite du problème un espace euclidien $E_n$ de dimension $n$, dont le produit scalaire et la norme associée sont notés respectivement $(\cdot|\cdot)$ et $\|\cdot\|$.

**IV.2.** Justifier l'existence d'une base $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ de $E_n$ telle que :

$$\forall (\mathbf{z}, \mathbf{t}) \in E_n^2, \qquad (\mathbf{z}|\mathbf{t}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} z_i t_i \qquad \text{si} \quad \mathbf{z} = \sum_{i=1}^{n} z_i \mathbf{e}_i \qquad \text{et} \qquad \mathbf{t} = \sum_{i=1}^{n} t_i \mathbf{e}_i.$$

On pose $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{e}_i$, si bien que $\|\mathbf{u}\| = 1$.

On définit alors, à partir des points $A_1, \ldots, A_n$, deux éléments $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ dans $E_n$ en posant : $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i$ et $\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i \mathbf{e}_i$.

**IV.3.** Montrer que $(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ est une famille libre de $E_n$.

**IV.4.** Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $f_0(a, b) = n\|\mathbf{y} - a\mathbf{x} - b\mathbf{u}\|^2$ et $f_1(a, b) = n\|\mathbf{x} - a\mathbf{y} - b\mathbf{u}\|^2$.

**IV.5.**

**IV.5.a.** En déduire que $f_0$ admet un minimum sur $\mathbb{R}^2$ qui est atteint en un unique couple de réels, noté $(a_0, b_0)$, et qu'il en est de même de $f_1$ avec un unique couple de réels noté $(a_1, b_1)$.

Dans le plan $\mathcal{P}$, on définit alors les droites $\mathcal{D}_0$ et $\mathcal{D}_1$ d'équation dans $\mathcal{R}$ : $y = a_0 x + b_0$ et $x = a_1 y + b_1$. On les appelle **les droites des moindres carrés** associées à $A_1, \ldots, A_n$.

**IV.5.b.** Montrer que les droites $\mathcal{D}_0$ et $\mathcal{D}_1$ se coupent en un unique point $M \in \mathcal{P}$ qui est l'isobarycentre de $(A_1, \ldots, A_n)$.

**IV.5.c.** À quelle condition sur les $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$, les droites $\mathcal{D}_0$ et $\mathcal{D}_1$ sont-elles orthogonales ? Donner dans ce cas les équations dans $\mathcal{R}$ de $\mathcal{D}_0$ et $\mathcal{D}_1$.

**IV.5.d.** Donner un exemple de quatre points distincts et non alignés $A_1, \ldots, A_4$ de $\mathcal{P}$ tels que les droites des moindres carrés $\mathcal{D}_0$ et $\mathcal{D}_1$ associées à $A_1, \ldots, A_4$ soient orthogonales et donner dans ce cas les équations dans $\mathcal{R}$ de $\mathcal{D}_0$ et $\mathcal{D}_1$.

# Fin de l'énoncé