Notations : Soit n un entier supérieur ou égal à 1. Pour p entier supérieur ou égal à 1, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices à coefficients réels ayant n lignes et p colonnes et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ désigne le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des matrices à coefficients complexes ayant n lignes et p colonnes. On identifiera $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}^n$, que l'on supposera muni de son produit scalaire canonique note $(.|.)$.

Lorsque $p = n$, $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ sont notés plus simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et sont munis de leur structure d'algèbre, I_n représentant la matrice identité.

Pour A appartenant à $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$, ${}^tA$ représente la matrice transposée de A : c'est un élément de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{C})$. $0_{n,p}$ désigne la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$.

Si f est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n représenté par la matrice A dans une base donnée, on note $Sp(f)$ ou $Sp(A)$ l'ensemble des valeurs propres de f, χ_f ou χ_A son polynôme caractéristique et $Tr(f)$ ou $Tr(A)$ sa trace. En outre, si A appartient à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $Sp_{\mathbb{C}}(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A, lorsque A est considérée comme un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

$\mathbb{R}[X]$ est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, $\mathbb{C}[X]$ est le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes et $\mathbb{N}_n$ est l'ensemble $\{1, 2, ..., n\}$.

Partie I

I.1 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et M la matrice de $\mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{R})$ donnée par :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_{p,n} & C \end{pmatrix}$$

(a) Si A est non inversible, montrer sans recourir au déterminant que M est non inversible.

(b) Si A est inversible, on pose $P = \begin{pmatrix} A & 0_{n,p} \\ 0_{p,n} & I_p \end{pmatrix}$. Résoudre alors dans $\mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{R})$ l'équation matricielle $XP = M$.

(c) Retrouver le résultat connu : $\det M = \det A . \det C$

Dans toute la suite u désigne un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

I.2 Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ stable par u. Si v désigne l'endomorphisme induit par u sur F, montrer que χ_v divise χ_u.

I.3 Pour tout x élément de $\mathbb{R}^n$, on définit l'ensemble $F_u(x)$ par :

$$F_u(x) = \{y \in \mathbb{R}^n / \exists P \in \mathbb{R}[X],\, y = P(u)(x)\}$$

Montrer que $F_u(x)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ stable par u.

I.4 Dans cette question, on suppose que x est un élément non-nul de $\mathbb{R}^n$.

(a) Montrer l'existence d'un plus petit entier naturel q pour lequel la famille $\{x, u(x), ..., u^q(x)\}$ est liée.

(b) Soit $(a_0, a_1, ..., a_q)$ une famille de réels non tous nuls tels que $\displaystyle\sum_{j=0}^{q} a_j u^j(x) = 0$ et S le polynôme de $\mathbb{R}[X]$ défini par $S(X) = \displaystyle\sum_{j=0}^{q} a_j X^j$. Montrer que a_q est non nul, puis que $\{x, u(x), ..., u^{q-1}(x)\}$ est une base de $F_u(x)$.

(c) Pour tout $i \in \{0, 1, ..., q\}$, on pose $\alpha_i = \dfrac{a_i}{a_q}$ et on note u_0 l'endomorphisme induit par u sur $F_u(x)$. Montrer que $\chi_{u_0}(X) = (-1)^q \sum_{i=0}^{q} \alpha_i X$, donner la valeur de $\chi_{u_0}(u)(x)$ et en déduire que le polynôme caractéristique de u est un polynôme annulateur de u.

Partie II

II.1 Vérifier les propriétés suivantes :

(a) $\forall (X, Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2$, $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $(AX|Y) = (X|\,{}^tAY)$.

(b) $\forall (X, Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2,\ Tr(X^tY) = (X|\,Y)$.

(c) $\forall (X, Y, Z) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^3,\ (X^tY)Z = (Y|\,Z)X$.

II.2 Soit $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $(A, B) \mapsto Tr({}^tAB)$. Montrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Dans toute la suite ce produit sera noté $((.\,|\,.))$.

II.3 A partir de cette question, r, s, l, m désignent des entiers naturels inférieurs ou égaux à n.

(a) Évaluer le produit par blocs $\begin{pmatrix} I_r \\ 0_{n-r,r} \end{pmatrix} (I_r, 0_{r,n-r})$.

(b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang r. Montrer qu'il existe B dans $\mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{R})$ et C dans $\mathcal{M}_{r,n}(\mathbb{R})$ telles que $A = BC$.

(c) Montrer qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de rang 1 si et seulement s'il existe deux matrices non nulles X et Y de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que $A = X^tY$.

(d) Montrer que la décomposition $A = X^tY$ de la question précédente n'est pas unique et déterminer les relations vérifiées par des matrices colonnes X, Y, Z, T telles que
$$A = X^tY = Z^tT$$

II.4 (a) Soit $(Z_i)_{1 \leq i \leq r}$ et $(T_j)_{1 \leq j \leq s}$ deux familles libres de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Montrer que la famille de matrices $(Z_i{}^tT_j)_{1 \leq i \leq r,\, 1 \leq j \leq s}$ est de rang égal à rs.

(b) Soit $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(Y_j)_{1 \leq j \leq n}$ deux bases de $\mathbb{R}^n$. Que peut-on dire de la famille de matrices $(X_i{}^tY_j)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j, \leq n}$?

(c) Soit $(V_i)_{1 \leq i \leq l}$ et $(W_j)_{1 \leq j \leq m}$ deux familles de vecteurs de rangs respectifs r et s. Déterminer le rang de la famille de matrices $(V_i{}^tW_j)_{1 \leq i \leq l, 1 \leq j, \leq m}$.

II.5 Montrer que si les bases $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(Y_j)_{1 \leq j \leq n}$ sont des bases orthonormales de $\mathbb{R}^n$, la famille $(X_i{}^tY_j)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j, \leq n}$ est une base orthonormale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire défini en II.2. La réciproque est-elle vraie ?

II.6 Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1.

(a) Montrer que $A^2 = (Tr\, A)A$.

(b) Soit X et Y deux éléments non nuls de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que $A = X^tY$. Montrer l'équivalence des quatre propriétés suivantes :

i. $(X \mid Y) = 0$.

ii. $Tr(A) = 0$.

iii. $Im\, A \subset Ker\, A$

iv. A est non diagonalisable.

II.7 Montrer que les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, diagonalisables et de rang 1 engendrent $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Partie III

Pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on note $h_{A,B}$ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad h_{A,B}(M) = AM - MB$$

et $\overline{h}_{A,B}$ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ défini par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad \overline{h}_{A,B}(M) = AM - MB$$

III.1 Soit A_0 et B_0 les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ données par :

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad B_0 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Déterminer $Sp_{\mathbb{C}}(A_0)$ et $Sp_{\mathbb{C}}(B_0)$.

(b) On considère la base $\mathcal{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et on note H_0 la matrice dans cette base $\mathcal{B}$ de l'endomorphisme h_{A_0,B_0}. Déterminer H_0, puis $Sp_{\mathbb{C}}(H_0)$ et vérifier que :

$$Sp_{\mathbb{C}}(H_0) = \{a - b/(a,b) \in Sp_{\mathbb{C}}(A_0) \times Sp_{\mathbb{C}}(B_0)\}$$

(c) Montrer que A_0 et B_0 sont diagonalisables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. En est-il de même pour H_0 ?

Soit maintenant A et B quelconques dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On se propose d'étudier les liens existant entre la diagonalisabilité de A et B et celle de $h_{A,B}$.

III.2 Soit $a \in Sp_{\mathbb{C}}(A)$ et $b \in Sp_{\mathbb{C}}(B)$. Montrer qu'il existe $(V, W) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\})^2$ tel que :

$$AV = aV \quad , \quad {}^tWB = b\,{}^tW \text{ et } V\,{}^tW \text{ est vecteur propre de } \overline{h}_{A,B}$$

En déduire l'inclusion : $\{a - b/(a,b) \in Sp_{\mathbb{C}}(A) \times Sp_{\mathbb{C}}(B)\} \subset Sp(\overline{h}_{A,B})$.

III.3 Montrer que si A et B sont diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il en est de même de $h_{A,B}$. Calculer dans ce cas $Tr(h_{A,B})$.

III.4 On note $a_1, a_2, ..., a_n$ les valeurs propres non nécessairement distinctes de A dans $\mathbb{C}$. En exprimant χ_A en fonction des a_i, montrer que la matrice $\chi_A(B)$ est inversible si et seulement si $Sp_{\mathbb{C}}(A) \cap Sp_{\mathbb{C}}(B) = \emptyset$.

III.5 Soit $\lambda \in Sp(\overline{h}_{A,B})$ et M un vecteur propre associé.

(a) Montrer que pour tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ on a la relation :

$$P(A)M = MP(B + \lambda I_n)$$

(b) Montrer que $\chi_A(B + \lambda I_n)$ est non inversible.

(c) En déduire en utilisant III.2 et III.4 :
$Sp(\overline{h}_{A,B}) = \{a - b/(a,b) \in Sp_{\mathbb{C}}(A) \times Sp_{\mathbb{C}}(B)\}$.

III.6 Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe M non nulle dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $AM = MB$.

Dans toute la suite du problème, on suppose $B = A$ et on considère l'endomorphisme $h_{A,A}$ que l'on notera plus simplement h_A.

III.7 On suppose A diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on note $(V_1, V_2, ..., V_n)$ une base de vecteurs propres de A, chaque vecteur propre V_i étant associé à la valeur propre λ_i. Pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}_n^2$, on définit la matrice $M_{i,j}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$\forall k \in \mathbb{N}_n,\ M_{i,j}V_k = \delta_{j,k}V_i \quad \text{où}\, \delta_{j,k} = \begin{cases} 1 & \text{si}\, j = k \\ 0 & \text{si}\, j \neq k \end{cases}$$

(a) Montrer que la famille de matrices $(M_{i,j})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(b) Montrer que pour tout $(i,j,k) \in \mathbb{N}_n^3$:

$$h_A(M_{i,j})V_k = (\lambda_i - \lambda_j)M_{i,j}V_k$$

et en déduire que les matrices $M_{i,j}$ sont des vecteurs propres de h_A.

(c) On note $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_p$ les valeurs propres distinctes de A, $m_1, m_2, ..., m_p$ leurs ordres de multiplicité respectifs et $J = \{(i,j) \in \mathbb{N}_n^2/\lambda_i = \lambda_j\}$. Montrer que :

$$Ker\, h_A = Vect(M_{i,j}/(i,j) \in J\} \quad \text{et} \quad \dim Ker\, h_A = \sum_{i=1}^{p} m_i^2$$

(d) Montrer que $\dim Ker\, h_A \geq n$ et que l'égalité a lieu si et seulement si A admet n valeurs propres distinctives.

(e) On note $\mathbb{R}[A] = \{Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})/\exists P \in \mathbb{R}[X],\, Q = P(A)\}$. Montrer que si les n valeurs propres de A sont distinctes , $\{I_n, A, A^2, ..., A^{n-1}\}$ constitue une base de $\mathbb{R}[A]$ et en déduire que dans ce cas $Ker\, h_A = \mathbb{R}[A]$.

III.8 On suppose h_A diagonalisable et on note $(P_{i,j})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n}$ une base de vecteurs propres de h_A, chaque matrice $P_{i,j}$ étant associée à la valeur propre $\lambda_{i,j}$. Montrer que si X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ, la famille $(P_{i,j}X)_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$ et en déduire que A est diagonalisable.

Fin de l'énoncé