



# BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

**CODE SUJET :**  
**289**  
**HEC\_M3\_E**

**Concepteur : H.E.C.**

OPTION : ECONOMIQUE

## MATHEMATIQUES III

Mercredi 2 Mai 2007, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

### EXERCICE

1. On considère  $\mathbb{R}^3$  muni de sa base canonique  $(e_1, e_2, e_3)$  ; soit  $t$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$ , dont la matrice associée  $T$  relativement à cette base s'écrit :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer les valeurs propres de  $t$ . Déterminer les sous-espaces propres de  $t$  associés, et donner une base de chacun d'entre eux.

L'endomorphisme  $t$  est-il diagonalisable ? Est-il bijectif ?

*L'objet des questions suivantes est une généralisation des résultats précédents.*

2. Soit  $n$  un entier de  $\mathbb{N}^*$ . On considère l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^{2n+1}$  muni de sa base canonique  $(e_1, e_2, \dots, e_{2n+1})$ . Soit  $t$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^{2n+1}$  défini par :

- pour tout entier  $i$  de  $\llbracket 1, 2n+1 \rrbracket$ , avec  $i \neq n+1$  :  $t(e_i) = e_i$  ;
- $t(e_{n+1}) = e_1 + e_2 + \dots + e_{2n+1}$ .

a) Déterminer la matrice  $T$  associée à l'endomorphisme  $t$  relativement à la base  $(e_1, e_2, \dots, e_{2n+1})$ .

b) Déterminer le rang de  $t$ , ainsi que la dimension du noyau de  $t$ .

c) Justifier que 0 est valeur propre de  $t$ . Déterminer la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 0, ainsi qu'une base de ce sous-espace.

3. Montrer que  $\text{Im}(t \circ t) \subset \text{Im}(t)$ , où  $\text{Im}(u)$  désigne l'image d'un endomorphisme  $u$  de  $\mathbb{R}^{2n+1}$ .

4. Soit  $\tilde{t}$  l'endomorphisme défini sur  $\text{Im}(t)$  par : pour tout  $x$  de  $\text{Im}(t)$ ,  $\tilde{t}(x) = t(x)$ .

Établir que  $\mathcal{B} = \left( e_1, \sum_{i=1}^{2n+1} e_i \right)$  constitue une base de  $\text{Im}(t)$ . Écrire la matrice associée à  $\tilde{t}$  relativement à la base  $\mathcal{B}$ .

5. a) Soit  $\lambda$  une valeur propre non nulle de  $t$ , et  $x$  un vecteur propre associé à  $\lambda$ . Montrer que  $x$  appartient à  $\text{Im}(t)$ .

b) En déduire toutes les valeurs propres de  $t$ . L'endomorphisme  $t$  est-il diagonalisable ?

## PROBLÈME

Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans ce problème sont considérées comme définies sur des espaces probabilisés non nécessairement identiques, mais qui, par souci de simplification, seront tous notés  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

### Partie I

1. On considère la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = \frac{1}{2} \times e^{-|x|}$ .

a) Montrer que les intégrales  $\int_{-\infty}^0 g(x)dx$  et  $\int_0^{+\infty} g(x)dx$  sont convergentes et de même valeur.

b) Établir que  $g$  est une densité de probabilité sur  $\mathbb{R}$ .

Soit  $Y$  une variable aléatoire à valeurs réelles admettant  $g$  pour densité. On dit que  $Y$  suit la loi  $\mathcal{L}(0)$ .

2. Étudier les variations de  $g$  et tracer l'allure de sa représentation graphique dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

3. a) Montrer, pour tout  $r$  de  $\mathbb{N}$ , l'existence du moment  $m_r(Y)$  d'ordre  $r$  de la variable aléatoire  $Y$ .

b) Calculer, pour tout  $r$  de  $\mathbb{N}$ ,  $m_r(Y)$  en fonction de  $r$ . Quelles sont les valeurs de l'espérance  $E(Y)$  et de la variance  $V(Y)$  de la variable aléatoire  $Y$  ?

4. a) Déterminer la fonction de répartition  $G$  de  $Y$ .

b) Établir que  $G$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $]0, 1[$ .

c) Montrer que l'équation  $G(x) = \frac{1}{2}$  admet une unique solution que l'on déterminera.

d) Établir que la fonction qui, à tout réel  $x$  associe  $G(x)(1 - G(x))$ , est paire.

5. a) Montrer que l'application réciproque  $G^{-1}$  de  $G$  est définie par :

$$G^{-1}(x) = \begin{cases} \ln(2x) & \text{si } 0 < x \leq 1/2 \\ -\ln(2(1-x)) & \text{si } 1/2 \leq x < 1 \end{cases}$$

b) Écrire une fonction Pascal dont l'en-tête est Laplace qui permet de simuler la loi  $\mathcal{L}(0)$ . On rappelle que la fonction `random` permet de simuler en Pascal une loi uniforme sur  $]0, 1[$ .

6. Pour tout entier  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , on considère la fonction  $g_n$  définie par :

$$g_n(x) = g(x)(1 + xe^{-n|x|})$$

Montrer que  $g_n$  définit une densité de probabilité sur  $\mathbb{R}$ .

Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , on désigne par  $Y_n$  une variable aléatoire de densité  $g_n$ , et on note  $G_n$  la fonction de répartition de  $Y_n$ .

7. a) Établir pour tout réel  $x$ , la majoration suivante :  $|G_n(x) - G(x)| \leq \frac{1}{ne} \times G(x)$ .

b) En déduire que la suite de variables aléatoires  $(Y_n)_{n \geq 1}$  converge en loi vers la loi  $\mathcal{L}(0)$ .

## Partie II

Soit  $\theta$  un paramètre réel inconnu et  $X$  une variable aléatoire à densité. On dit que  $X$  suit la loi  $\mathcal{L}(\theta)$ , si une densité  $f$  de  $X$  est donnée par : pour tout  $x$  réel,  $f(x) = \frac{e^{-|x-\theta|}}{2}$ .

Soit  $n$  un entier naturel. On considère un  $(2n+1)$ -échantillon  $(X_1, X_2, \dots, X_{2n+1})$  de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi  $\mathcal{L}(\theta)$ .

1. a) Déterminer la fonction de répartition  $F$  de la variable aléatoire  $X$ .
  - b) En déduire que la variable aléatoire  $(X - \theta)$  suit la loi  $\mathcal{L}(0)$  définie dans la partie I.
  - c) Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire  $X$ .
  - d) Résoudre l'équation  $F(x) = 1/2$ .
2. Soit  $x$  un réel fixé. Pour tout  $i$  de  $\llbracket 1, 2n+1 \rrbracket$ , on note  $Z_i$  la variable aléatoire de Bernoulli telle que  $P(\{Z_i = 1\}) = P(\{X_i \leq x\})$ .
- a) Établir l'indépendance des variables aléatoires  $Z_1, Z_2, \dots, Z_{2n+1}$ .
  - b) Soit  $S_{2n+1}$  la variable aléatoire définie par :  $S_{2n+1} = \sum_{i=1}^{2n+1} Z_i$ . Quelle est la loi de probabilité de  $S_{2n+1}$  ? Préciser l'espérance et la variance de  $S_{2n+1}$ .
3. On pose  $\bar{X}_{2n+1} = \frac{1}{2n+1} \sum_{i=1}^{2n+1} X_i$ .
- a) Montrer que  $\bar{X}_{2n+1}$  est un estimateur sans biais du paramètre  $\theta$ .
  - b) Calculer le risque quadratique de  $\bar{X}_{2n+1}$  en  $\theta$ .

## Partie III

Le contexte de cette partie est identique à celui de la partie précédente.

Pour tout  $\omega$  de  $\Omega$ , on réordonne par ordre croissant les réels  $X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_{2n+1}(\omega)$ , et on note  $\widehat{X}_1(\omega), \widehat{X}_2(\omega), \dots, \widehat{X}_{2n+1}(\omega)$ , les nombres ainsi rangés, c'est-à-dire que  $\widehat{X}_1(\omega) \leq \widehat{X}_2(\omega) \leq \dots \leq \widehat{X}_{2n+1}(\omega)$ . On définit ainsi  $(2n+1)$  variables aléatoires  $\widehat{X}_1, \widehat{X}_2, \dots, \widehat{X}_{2n+1}$  telles que  $\widehat{X}_1 \leq \widehat{X}_2 \leq \dots \leq \widehat{X}_{2n+1}$ , qui constituent un réarrangement par ordre croissant des variables aléatoires  $X_1, X_2, \dots, X_{2n+1}$ . On admet que  $P(\{\widehat{X}_1 < \widehat{X}_2 < \dots < \widehat{X}_{2n+1}\}) = 1$ .

On s'intéresse dans cette partie à la variable aléatoire  $\widehat{X}_{n+1}$ .

1. a) Pour tout réel  $x$ , justifier l'égalité entre événements suivante :  $[\widehat{X}_{n+1} \leq x] = [S_{2n+1} \geq n+1]$ .
  - b) En déduire la fonction de répartition  $\widehat{F}_{n+1}$  de  $\widehat{X}_{n+1}$  en fonction de  $F$  (on exprimera cette fonction sous forme d'une somme que l'on ne cherchera pas à calculer).
2. On note  $\widehat{f}_{n+1}$  une densité de  $\widehat{X}_{n+1}$ , et  $\widehat{g}_{n+1}$  une densité de  $(\widehat{X}_{n+1} - \theta)$ .
- a) Établir pour tout  $j$  de  $\llbracket 0, 2n \rrbracket$ , l'égalité suivante :  $(j+1) \binom{2n+1}{j+1} = (2n-j+1) \binom{2n+1}{j}$ .
  - b) En déduire, pour tout  $x$  réel, l'égalité :

$$\widehat{f}_{n+1}(x) = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} (F(x))^n (1-F(x))^n f(x)$$

c) Établir, pour tout  $x$  réel, l'égalité suivante :

$$\widehat{g}_{n+1}(x) = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} (G(x))^n (1-G(x))^n g(x)$$

où  $g$  et  $G$  ont été définies dans la partie I.

d) En utilisant la question I.4.d, montrer que  $\widehat{X}_{n+1}$  est un estimateur sans biais du paramètre  $\theta$ .

3. Dans cette question, on étudie le comportement de la suite  $(\widehat{X}_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ , lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

On désigne par  $\widehat{h}_{n+1}$  une densité de la variable aléatoire  $\sqrt{2n+1}(\widehat{X}_{n+1} - \theta)$ .

a) Montrer que pour tout réel  $x$ , on a :

$$\widehat{h}_{n+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \times \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \left( G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right) \right)^n \times \left( 1 - G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right) \right)^n \times g\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)$$

b) Écrire, lorsque  $u$  tend vers 0, le développement limité à l'ordre 2 de  $e^{-u}$ , et le développement limité à l'ordre 1 de  $\ln(1-u)$ .

c) Soit  $x$  un réel fixé. Montrer que lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ , on a :

$$G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right) \left( 1 - G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right) \right) = \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{x^2}{2n+1} + o\left(\frac{1}{(2n+1)}\right) \right)$$

d) En déduire que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4^n \left[ G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right) \left( 1 - G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right) \right) \right]^n = e^{-x^2/2}$ .

e) On admet que lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ , on a :

$$\binom{2n}{n} \times \frac{1}{4^n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

Montrer alors que pour tout réel  $x$ , on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \widehat{h}_{n+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

4. On admet que le résultat de la question précédente entraîne la convergence en loi de la suite de variables aléatoires  $(\sqrt{2n+1}(\widehat{X}_{n+1} - \theta))_n$  vers une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.

Montrer qu'un intervalle de confiance  $[I_n, J_n]$  pour le paramètre  $\theta$  au risque  $\alpha = 0.05$ , est donné par :

$$I_n = \widehat{X}_{n+1} - \frac{1.96}{\sqrt{2n+1}} \quad \text{et} \quad J_n = \widehat{X}_{n+1} + \frac{1.96}{\sqrt{2n+1}}$$

(on rappelle que si  $\Phi$  désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, on a  $\Phi(1.96) \approx 0.975$ ).