BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

Concepteur : H.E.C.

OPTION : LETTRES & SCIENCES HUMAINES

MATHEMATIQUES

Programme ENS (B/L)

Lundi 5 mai 2008, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : **l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.**
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'épreuve est constituée de deux problèmes indépendants.

Problème 1

Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans ce problème sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Dans tout le problème, un polynôme R sera noté indifféremment R ou $R(X)$.
On note a et b deux entiers naturels non nuls, et on pose : $N = a + b$.
On considère une urne contenant initialement a boules noires et b boules blanches, dans laquelle on effectue des tirages successifs d'une boule selon le protocole suivant :
- si la boule tirée est blanche, elle est remise dans l'urne avant de procéder au tirage suivant ;
- si la boule tirée est noire, elle n'est pas remise dans l'urne, mais remplacée dans celle-ci par une boule blanche, prise dans une réserve annexe, avant de procéder au tirage suivant.

On considère, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire réelle X_n égale au nombre de boules noires tirées lors des n premiers tirages, et on note $E(X_n)$ son espérance.

Partie 1

Soit F l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à a, et Φ, l'application qui à tout polynôme R de F, fait correspondre $\Phi(R)$ défini par : $\Phi(R)(X) = (aX + b)R(X) + X(1 - X)R'(X)$, où R' désigne le polynôme dérivé de R.
On rappelle que la base canonique de F est : $\mathcal{B} = (1, X, \ldots, X^a)$.

1. (a) Montrer que Φ est un endomorphisme de F.
   (b) Écrire la matrice de Φ dans la base $\mathcal{B}$.
2. (a) Donner les valeurs propres de Φ.
   (b) Φ est-il diagonalisable ?

3. Pour tout k de $[\![0, a]\!]$, on note H_k le polynôme de F défini par : $H_k(X) = X^k(1-X)^{a-k}$.
   (a) Calculer $\Phi(H_k)$.
   (b) Montrer que : $\mathcal{B}_1 = (H_0, H_1, \ldots, H_a)$ est une base de F.
4. On considère la suite de polynômes $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par : $Q_0 = 1$, et pour tout n de $\mathbb{N}$, $Q_{n+1} = \Phi(Q_n)$.
   (a) En remarquant que : $(X+1-X)^a = 1$, donner la décomposition de Q_0 dans la base $\mathcal{B}_1$.
   (b) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $Q_n(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{a} \binom{a}{k} (b+k)^n H_k(X)$.

Partie 2

Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on note T_k la variable aléatoire qui vaut 1 si le $k^{\text{ème}}$ tirage amène une boule noire, et qui vaut 0 sinon.

1. (a) Déterminer la loi de T_1.
   (b) Déterminer la loi de T_2.
   (c) Calculer la covariance de T_1 et T_2.
2. (a) Exprimer X_n en fonction de $T_1, T_2, \ldots, T_n$.
   (b) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $P(T_{n+1} = 1) = \dfrac{a - E(X_n)}{N}$.
   (c) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la formule suivante : $P(T_n = 1) = \dfrac{a(N-1)^{n-1}}{N^n}$.
3. Calculer $E(X_n)$ et sa limite quand n tend vers $+\infty$.

Partie 3

1. (a) Justifier le fait que $X_n(\Omega) = [\![0, \min(a, n)]\!]$.
   (b) Calculer $P(X_n = 0)$.
   (c) Calculer, pour tout entier naturel n inférieur ou égal à a, $P(X_n = n)$.

   On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout t de $\mathbb{R}$: $G_n(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{a} P(X_n = k)t^k$.

   On pose également, pour tout t de $\mathbb{R}$: $G_0(t) = 1$.
2. (a) Établir, pour tout entier naturel k tel que $1 \leqslant k \leqslant \min(a, n)$, l'égalité $(\mathcal{S})$ suivante :
$$(\mathcal{S}) \quad P(X_{n+1} = k) = \frac{b+k}{N} P(X_n = k) + \frac{a+1-k}{N} P(X_n = k-1).$$
   (b) Vérifier que cette égalité est encore valable pour $k = 0$.
   (c) On suppose que : $n + 1 \leqslant a$. Montrer que l'égalité $(\mathcal{S})$ est vérifiée pour $k = n+1$.
   (d) En déduire que l'égalité $(\mathcal{S})$ est vérifiée pour tout entier naturel k inférieur ou égal à a.
3. En utilisant l'égalité $(\mathcal{S})$, montrer la relation $(\mathcal{R})$ suivante :
$$(\mathcal{R}) \quad G_{n+1}(t) = \frac{at+b}{N} G_n(t) + \frac{t(1-t)}{N} G_n'(t), \text{ où } G_n' \text{ désigne la dérivée de } G_n.$$
4. (a) Que représente $G_n'(1)$ pour la variable aléatoire X_n ?
   (b) À l'aide de la relation $(\mathcal{R})$, exprimer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $E(X_{n+1})$ en fonction de $E(X_n)$.
   (c) Retrouver ainsi la valeur de $E(X_n)$ en fonction de n.
5. En utilisant la partie 1 et la relation $(\mathcal{R})$, montrer, pour tout entier naturel j inférieur ou égal à a, l'égalité suivante :
$$P(X_n = j) = \sum_{k=0}^{j} \binom{a}{k} \binom{a-k}{j-k} (-1)^{j-k} \left(\frac{b+k}{N}\right)^n$$

Problème 2

Partie 1

1. (a) Montrer que pour tout réel x, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ est convergente.

   (b) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$ est convergente si et seulement si le réel x est strictement positif.

   (c) En déduire que la fonction Γ, définie par : $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$, a pour domaine de définition $\mathbb{R}_+^*$.

2. Établir, pour tout réel x strictement positif, l'égalité suivante : $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

3. (a) Calculer $\Gamma(1)$.

   (b) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a : $\Gamma(n) = (n-1)!$.

Partie 2

1. Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ est convergente si et seulement si les réels x et y sont strictement positifs.

   On définit alors la fonction B par : pour tout couple (x, y) de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, $B(x, y) = \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$.

2. Montrer, pour tout couple (x, y) de réels strictement positifs, l'inégalité suivante : $B(x, y) > 0$.

3. Établir, pour tout couple (x, y) de réels strictement positifs, les deux égalités suivantes :

   (a) $B(x, y) = B(y, x)$.

   (b) $B(x+1, y) = \dfrac{x}{x+y}B(x, y)$.

4. En déduire que pour tout entier n de $\mathbb{N}$ et pour tout réel x strictement positif, on a :
   $B(n+1, x) = \dfrac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$.

Partie 3

On définit les deux suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ par :

$$u_n = -\ln n + \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad v_n = u_{n+1} - u_n.$$

1. Écrire le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction h définie par :

$$h(x) = x(1+x)^{-1} - \ln(1+x).$$

2. En déduire un équivalent de v_n quand n tend vers $+\infty$.
3. Quelle est la nature de la série de terme général v_n ?
4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente. On note γ sa limite.

Partie 4

Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$.

1. Montrer que pour tout réel t de l'intervalle $[0, n]$, on a : $\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n e^t \leqslant 1$.
2. (a) Montrer, pour tout réel t de $[0, \sqrt{n}[$, que l'on a : $\ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right) \leqslant t + n\ln\left(1 - \frac{t}{n}\right)$.

   (b) En déduire, pour tout réel t de l'intervalle $[0, \sqrt{n}\,]$, l'inégalité suivante : $1 - \frac{t^2}{n} \leqslant \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n e^t$.
3. Déduire des questions précédentes que, pour tout réel t de l'intervalle $[0, n]$, on obtient l'encadrement suivant : $\left(1 - \frac{t^2}{n}\right) e^{-t} \leqslant \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leqslant e^{-t}$.

Partie 5

1. À l'aide de la partie précédente, déterminer, pour tout entier naturel n non nul, un encadrement de $\displaystyle\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt$.
2. Montrer que pour tout réel x strictement positif, on a : $\Gamma(x) = \displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt$.
3. (a) À l'aide d'un changement de variable, montrer l'égalité suivante : $\displaystyle\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt = n^x B(n+1, x)$.

   (b) En déduire, pour tout réel x strictement positif, la formule suivante :

$$\Gamma(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)}.$$

4. On rappelle que γ désigne la limite de la suite (u_n) définie dans la partie 3.
   Montrer alors, pour tout réel x strictement positif, la formule suivante :

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x e^{\gamma x} \prod_{k=1}^{+\infty} \left[\left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}}\right]$$

   où l'on a posé : $\displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty} \left[\left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}}\right] = \lim_{n \to +\infty} \prod_{k=1}^{n} \left[\left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}}\right]$.