

# [ MPSI – Mécanique ]

## Sommaire

[ MPSI – MECANIQUE ] .....	1
1 – SYSTEMES DE COORDONNEES .....	2
2 – CINEMATIQUE DU POINT MATERIEL .....	4
3 – CHANGEMENT DE REFERENTIEL .....	7
4 – PRINCIPES DE LA DYNAMIQUE DU POINT MATERIEL .....	9
5 – APPLICATIONS DU P.F.D. ....	11
6 – THEOREME DE L'ENERGIE CINETIQUE, ENERGIE POTENTIELLE.....	14
7 – DYNAMIQUE ET STATIQUE DANS UN REFERENTIEL NON GALILEEN.....	16
8 – L'OSCILLATEUR HARMONIQUE.....	18
9 – OSCILLATIONS AMORTIES, OSCILLATIONS FORCEES .....	20
10 – SYSTEME DE 2 POINTS MATERIELS.....	22
11 – INTERACTION DE DEUX POINTS MATERIELS.....	24
12 – INTERACTIONS EN $1/R^2$ .....	26
13 – CHOC DE 2 POINTS.....	31

## Notions sur le produit vectoriel

La surface du triangle ABC est donnée par  $\frac{1}{2} \| \vec{AB} \wedge \vec{BC} \|$

# 1 – Systèmes de coordonnées

## I Définitions

Dans un espace euclidien, 3 paramètres sont nécessaires et suffisants pour repérer la position d'un point.

### 1 – Coordonnées cartésiennes

Les coordonnées cartésiennes sont  $(x, y, z)$  :

x est l'abscisse  
y est l'ordonnée  
z est la cote

### 2 – Coordonnées cylindriques

On choisit un axe polaire Oz, un plan polaire P, un axe polaire Ox, et un sens positif d'orientation des angles d'après la règle du tire bouchon de Maxwell.

Les coordonnées cylindriques sont  $(r, \theta, z)$ , où :

r est la distance de M à l'axe Oz ( $> 0$ )  
 $\theta$  est l'angle polaire  
z est la cote

$(r, \theta, z)$  ne sont pas les coordonnées du vecteur position OM. Pas de bijection. Coordonnées polaires dans le plan.

Relations avec les coordonnées cartésiennes :

$$\begin{aligned}x &= r \cos \theta \\y &= r \sin \theta \\z &= z\end{aligned}$$

### 3 – Coordonnées sphériques

Les coordonnées sphériques de M sont  $(r, \theta, \varphi)$  :

r est la norme du rayon vecteur, la distance OM ( $> 0$ )  
 $\theta$  est la colatitude  
 $\varphi$  est la longitude, ou l'azimut

$(r, \theta, z)$  ne sont pas les coordonnées du vecteur position OM. Pas de bijection.

Relations avec les coordonnées cartésiennes :

$$\begin{aligned}x &= r \sin \theta \cos \varphi \\y &= r \sin \theta \sin \varphi \\z &= z \cos \theta\end{aligned}$$

En géographie, on utilise la latitude =  $\pi/2 - \text{colatitude}$

### 4 – Abscisse curviligne

On choisit arbitrairement sur une courbe un sens positif et une origine  $\Omega$ . L'abscisse curviligne du point M, notée  $s(M)$  est la valeur algébrique de l'arc  $\Omega M$ . Ex : sur un cercle,  $s(M) = R \alpha$ .

## II Courbes

### 1 – Définition

Courbe = ensemble des points de l'espace dont les 3 coordonnées sont fonctions d'un paramètre noté t.

### 2 – Base locale en coordonnées cylindriques ( $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z$ )

Généralement,  $\vec{u}_x$  est le vecteur unitaire dont la direction et le sens correspondent à une petite augmentation de X.

Pour un vecteur  $\vec{A} = A_r \vec{u}_r + A_\theta \vec{u}_\theta + A_z \vec{u}_z$ , on appellera  $A_r$  la composante radiale,  $A_\theta$  la composante orthoradiale, et  $A_z$  la composante axiale. Le vecteur position de M est  $r \vec{u}_r + z \vec{u}_z$ .

### 3 – Base locale en coordonnées sphériques ( $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi$ )

Pour un vecteur  $\vec{A} = A_r \vec{u}_r + A_\theta \vec{u}_\theta + A_\varphi \vec{u}_\varphi$ , on appellera  $A_r$  la composante radiale,  $A_\theta$  la composante orthoradiale, et  $A_\varphi$  la composante azimutale. Le vecteur position de M est  $r \vec{u}_r$ .

En coordonnées sphériques :  $\vec{e}_x = \cos \varphi \sin \theta \vec{e}_r + \cos \varphi \cos \theta \vec{e}_\theta - \sin \varphi \vec{e}_\varphi$ . [ passer par un intermédiaire  $\vec{u}$  ]

#### 4 – Base locale de Frenet, ou trièdre de Frenet

On considère une courbe, on y fixe un point M et un point M' qui s'en rapproche. MM' définit le vecteur tangent à la courbe  $\vec{u}_T$  **orienté suivant le sens positif d'orientation de la courbe**, orthogonal au vecteur normal (ou normale principale)  $\vec{u}_N$ , qui est dirigé vers l'intérieur de la concavité de la courbe. Ils définissent le plan osculateur. Enfin, la binormale :  $\vec{u}_B = \vec{u}_T \wedge \vec{u}_N$ .

### III Dérivation d'un vecteur par rapport à un angle

Le vecteur dérivé d'un vecteur unitaire  $\vec{v}$  par rapport à l'angle qu'il réalise avec un axe fixe Ox est un vecteur unitaire déduit de  $\vec{v}$  par rotation d'angle  $+\pi/2$  par rapport à Oz. [ ~demo ]

### IV Rayon de courbure

On considère un arc de courbe M'M. Le plan orthogonal à la tangente en M' coupe la normale principale en M en un point C' ; lorsque M' tend vers M, le point C' tend vers une position limite C. C'est le centre de courbure au point M.

$CM = \rho_c =$  le rayon de courbure en M.

On a, de plus :  $\frac{d\vec{u}_T}{ds} = \frac{\vec{u}_N}{\rho_c}$  [ demo ]

## 2 – Cinématique du point matériel

### I Objet de la cinématique

C'est la traduction mathématique des caractéristiques d'un mouvement (équations horaires...) à partir de sa description.

### II Définitions

#### 1 – Espace et temps d'un observateur

##### a – Etalon de longueur

Nécessité : comparaison des règles

##### b – Etalon de temps

#### 2 – Mouvement et référentiel

Référentiel = objet qui sert de référence dans l'espace. On y associe une base dont les vecteurs y sont fixes : c'est la base liée, ou base fixe. [ exemple du train ]

#### 3 – Temps absolu

Le temps est une notion absolue : il ne dépend pas du référentiel d'étude. Deux observateurs liés à 2 référentiels en mouvement l'un par rapport à l'autre vont donner la même date à un même événement. ( ce n'est plus valable si la vitesse relative des 2 référentiels n'est plus négligeable devant la vitesse de la lumière )

#### 4 – Modèle du point matériel

Point matériel = point géométrique associé à un corps dont la position est parfaitement définie par la donnée de 3 coordonnées, et le mouvement, par les 3 équations horaires correspondantes. Ex : le centre d'inertie.

#### 5 – Trajectoire d'un point matériel

Trajectoire = lieu des points successivement occupés par le point matériel au cours de son mouvement. Elle dépend du référentiel d'étude.

### III Vitesse d'un point matériel

#### 1 – Définition

$$\vec{V}_M(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t) \quad [ \sim \text{demo} ]$$

Le vecteur  $\overrightarrow{MM'}/\Delta t$  est appelé le vecteur vitesse moyen

#### 2 – Composantes en coordonnées cartésiennes

Si le vecteur position s'écrit  $x \vec{u}_x + y \vec{u}_y + z \vec{u}_z$ , le vecteur  $\vec{v}_M = \dot{x} \vec{u}_x + \dot{y} \vec{u}_y + \dot{z} \vec{u}_z$ .

#### 3 – Composantes en coordonnées cylindriques

Si le vecteur position s'écrit  $r \vec{u}_r + z \vec{u}_z$ , le vecteur vitesse s'écrit :

$$\vec{v}_M = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{z} \vec{u}_z \quad [ \text{demo calculs} + \text{demo géométrie} ]$$

#### 4 – Composantes en coordonnées sphériques

Le vecteur position s'écrit  $r \vec{u}_r$ .

$$\vec{v}_M = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta + r \sin \theta \dot{\phi} \vec{u}_\phi \quad [ \text{demo calculs} + \text{demo géométrie} ]$$

### 5 – Composantes dans le trièdre de Frenet

On a ici  $\vec{v}_M = \dot{s} \cdot \vec{u}_T$  [ ~demo ]  
 Notation importante :  $\dot{s} = \dot{v}$

## IV Vecteur accélération

### 1 – Définition

Le vecteur accélération est le vecteur dérivé du vecteur vitesse.

### 2 – Composantes en coordonnées cartésiennes

On a  $\vec{a}_M = \ddot{x} \vec{u}_x + \ddot{y} \vec{u}_y + \ddot{z} \vec{u}_z$ .

### 3 – Composantes en coordonnées cylindriques

$$\vec{a}_M = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \vec{u}_r + (r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta}) \vec{u}_\theta + \ddot{z} \vec{u}_z. \quad [ \text{demo calculs} ]$$

### 4 – Composantes dans le trièdre de Frenet

$$\vec{a}_M = \frac{d\vec{v}}{dt} \vec{u}_T + \frac{v^2}{\rho_c} \vec{u}_N = \vec{a}_T + \vec{a}_N \quad [ \text{demo calculs} ]$$

On remarque que le vecteur accélération est contenu dans le plan osculateur.

$\vec{a}_T$  traduit les variations de  $\dot{v}$ .

$\vec{a}_N$  traduit les variations de la direction de  $\vec{v}_M$ .

$\vec{a}_M$  pointe toujours vers la concavité de la trajectoire.

$$\rho_c = \frac{\|\vec{v}\|^3}{\|\vec{v} \wedge \vec{a}\|} \quad [ \text{demo} ] \quad \vec{v} \cdot \vec{a} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \|\vec{v}\|^2 \right).$$

Si  $\vec{v} \cdot \vec{a} > 0$ , le mouvement est accéléré.

Si  $\vec{v} \cdot \vec{a} = 0$ , le mouvement est uniforme.

Si  $\vec{v} \cdot \vec{a} < 0$ , le mouvement est freiné, ou ralenti.

⊗ Attention, la connaissance de la trajectoire ne donne pas l'accélération. (Centrale2000)

## V Distinction entre référentiel et base de projection

Le vecteur vitesse ne dépend que du référentiel d'étude ; il est indépendant de la base de projection. L'expression de ses coordonnées sera différente, mais il s'agit toujours du même vecteur. Les mêmes conclusions s'appliquent aux autres vecteurs caractéristiques du mouvement (position, accélération).

## VI Exemples de mouvements simples

### 1 – Mouvement rectiligne

Le point matériel M se déplace sur une droite D dans le référentiel d'étude.

$\vec{v}$  et  $\vec{a}$  sont portés par la droite trajectoire.

Cas particuliers :

- Mouvement rectiligne uniforme  $\Leftrightarrow \vec{v}$  est constant
- Mouvement rectiligne uniformément varié  $\Leftrightarrow \vec{a}$  est constant et  $\vec{a} \wedge \vec{v}_0 = 0$

### 2 – Mouvement circulaire

#### a – Description du mouvement

M décrit un cercle de centre O et de rayon R. On se place en coordonnées polaires.

#### b – Vecteur vitesse

$$\vec{v} = R \dot{\theta} \vec{u}_\theta \quad (\text{orthoradial})$$

Soit  $\omega = \dot{\theta}$  vitesse angulaire instantanée.

On définit le vecteur rotation instantanée :  $\vec{\omega}$

- direction : orthogonal au plan polaire
  - sens : donné par le tire-bouchon, en considérant le sens du mouvement.
  - norme :  $|\omega|$
- $\forall t$ , on a  $\vec{\omega} = \omega \vec{u}_z$ . [ demo 2 cas ]  
 $\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{OM}$ .

#### c – Vecteur accélération

$$\vec{a}_M = -R \omega^2 \vec{u}_r + R \dot{\omega} \vec{u}_\theta .$$

$$s(t) = R \theta(t)$$

Pour un mouvement circulaire uniforme : l'accélération est centripète.

### 3 – Mouvement hélicoïdal

#### a – Description du mouvement

Le point matériel se déplace dans le référentiel d'étude sur une hélice circulaire, c'est-à-dire une hélice enroulée sur un cylindre dont la base est un cercle de rayon R.  $h'$  : pas de l'hélice.  $h = h'/2\pi$  : pas réduit.  $z = h\theta$ .

#### b – Vecteur vitesse

$$\vec{v} \begin{matrix} | \\ \hline \end{matrix} \begin{matrix} 0 \\ R\omega \\ h\dot{\omega} \end{matrix} \quad \text{en notant } \omega = d\theta/dt$$

$(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$

Au cours du mouvement, l'angle que fait le vecteur vitesse avec l'axe Oz reste constant.

#### c – Vecteur accélération

$$\vec{a} \begin{matrix} | \\ \hline \end{matrix} \begin{matrix} -R\omega^2 \\ R\dot{\omega} \\ h\ddot{\omega} \end{matrix}$$

$(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$

Mouvement hélicoïdal uniforme : Le rayon de courbure de l'hélice en chacun de ses points, est une constante, qui ne dépend que des caractéristiques de l'hélice. Il est plus grand que le cercle de base :  $\rho_c = R + h^2/R$

### 4 – Mouvement à accélération centrale

Le vecteur accélération passe par un point fixe O.

Traduction mathématique :  $\vec{a} \wedge \vec{OM} = \vec{0}$ .

Propriétés : Le vecteur  $\vec{C} = \vec{OM} \wedge \vec{v}$  est constant. [ demo : calcul du vecteur dérivée ]

$\vec{OM}$  est constamment contenu dans le plan orthogonal à la direction de  $\vec{C}$  passant par O. Le mouvement est plan. On travaille en coordonnées polaires. On a  $\vec{C} = \vec{OM} \wedge \vec{v} = r^2 \dot{\theta} \vec{u}_z$ .

$r^2 \dot{\theta}$  est la constante de la loi des aires.  $\theta$  est donc monotone : le sens du mouvement ne change pas.

On oriente le plus souvent le plan dans le sens du mouvement :  $C > 0$ .

Loi des aires : le rayon vecteur  $\vec{OM}$  balaie des aires égales pendant des laps de temps égaux. [ demo ]

La vitesse aréolaire  $\frac{dS}{dt} = \frac{C}{2}$ .

⊗ Ne pas dire "La vitesse et la force sont dans un même plan, donc la trajectoire est plane." (Centrale 2000)

## 3 – Changement de référentiel

Problème : on connaît le mouvement d'un point M par rapport à un référentiel R', qui est en mouvement par rapport à un autre référentiel R ; ces mouvements sont bien connus. On cherche le mouvement de M par rapport à R.

### I Référentiel absolu, référentiel relatif

#### 1 – Exemple

Vélo. Mouvement cycloïdal. R est le référentiel de la route, R' est le référentiel lié au cadre du vélo.

On appelle R le référentiel fixe, ou référentiel absolu. (souvent galiléen en dynamique)

On appelle R' le référentiel mobile, ou référentiel relatif.

Ce ne sont que des conventions.

#### 2 – Notion de point coïncidant

Point coïncidant = le point de référentiel relatif qui, à la date t, coïncide avec le point mobile M.

Exemples : vélo, et insecte sur horloge.

#### 3 – Définitions

$\vec{v}_a = \vec{v}_{M/R}$	<u>Vitesse absolue</u> = vitesse de M dans le référentiel absolu R.
$\vec{a}_a = \vec{a}_{M/R}$	<u>Accélération absolue</u> = vitesse de M dans le référentiel absolu R.
$\vec{v}_r = \vec{v}_{M/R'}$	<u>Vitesse relative</u> = vitesse de M dans le référentiel relatif R'.
$\vec{a}_r = \vec{a}_{M/R'}$	<u>Accélération relative</u> = vitesse de M dans le référentiel relatif R'.
$\vec{v}_e = \vec{v}_{P/R}$	<u>Vitesse d'entraînement</u> = vitesse du point coïncidant P dans le référentiel absolu R.
$\vec{a}_e = \vec{a}_{P/R}$	<u>Accélération d'entraînement</u> = accélération du point coïncidant P dans le référentiel absolu R.

Dans ce chapitre, le référentiel absolu est lié à  $(O, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ ,  
le référentiel relatif est lié à  $(O_1, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ .

### II Transformation du vecteur vitesse

Loi de composition des vitesses :  $\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e$ . [ demo ]

Exemples : vélo, insecte...

### III Transformation du vecteur accélération

Loi de composition des accélérations :  $\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c$ . [ demo ]

$\vec{a}_c$  est l'accélération complémentaire, ou accélération de Coriolis :  $\vec{a}_c = 2\left(\dot{x} \frac{d\vec{u}_x}{dt} + \dot{y} \frac{d\vec{u}_y}{dt} + \dot{z} \frac{d\vec{u}_z}{dt}\right)$

Si M est immobile dans R',  $\vec{a}_a = \vec{a}_e$ .

Attention,  $\vec{a}_e \neq d\vec{v}_e/dt$ .

### IV Cas de mouvements particuliers de R' par rapport à R

#### 1 – R' est en mouvement de translation par rapport à R

##### a – Définition

Solide = corps indéformable, c'est-à-dire tel que la distance entre 2 points quelconques reste constante.

Un solide est en mouvement de translation lorsqu'un segment joignant 2 points quelconques du solide garde une direction fixe au cours du mouvement. Le vecteur déplacement de chacun des points du solide est le même. Tous les points du solide ont des trajectoires identiques ; il suffit d'étudier le mouvement d'un seul point.

Exemple de translation : Translation circulaire d'une cabine de grande roue.

##### b – Mouvement d'entraînement

$\vec{v}_e = \vec{v}_{O_1/R}$  : quand R' est en translation par rapport à R, tous les points ont la même vitesse d'entraînement.

$\vec{a}_e = \vec{a}_{O_1/R}$  : quand R' est en translation par rapport à R, tous les points ont la même accélération d'entraînement.

**c – Accélération de Coriolis**

$$\vec{a}_e = \vec{0}.$$

**2 – R' est en rotation par rapport à un axe fixe de R**

Les points d'un solide en rotation autour d'un axe fixe ont des trajectoires qui sont des cercles orthogonaux et centrés sur l'axe.

**a – Position du problème**

Le solide est en rotation autour de  $O_1z$ . On pose  $\alpha = (\vec{u}_x, \vec{u}_x)$ , et  $\omega_e = d\alpha/dt$ .

**b – Mouvement d'entraînement**

$$\vec{v}_e = \vec{\omega}_e \wedge \vec{O}_1M \quad [ \text{demo} ]$$

$$\vec{a}_e = \frac{d\vec{\omega}_e}{dt} \wedge \vec{O}_1M - \omega_e^2 \vec{HM} \quad [ \text{DEMO} ]$$

où H est le projeté orthogonal de M sur  $O_1z$ .

Si la rotation pure est uniforme, le mouvement de M est circulaire uniforme.

Si la rotation n'est pas pure, c'est-à-dire si  $O_1$  se déplace, on rajoute aux expressions  $\vec{v}_e$  et  $\vec{a}_e$  respectivement  $d\vec{O}O_1/dt$  et  $d^2\vec{O}O_1/dt^2$ .

Remarque : Double produit vectoriel :  $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$

**c – Accélération de Coriolis**

$$\vec{a}_c = 2 \vec{\omega}_e \wedge \vec{v}_r \quad [ \text{demo} ]$$

Cette expression de l'accélération de Coriolis est générale et peut être employée dans tous les cas.

Cas particuliers :  
 Si M immobile par rapport à R',  $\vec{v}_r = \vec{0} \Rightarrow \vec{a}_c = \vec{0}$   
 Si R' est en translation par rapport à R :  $\vec{\omega}_e = \vec{0} \Rightarrow \vec{a}_c = \vec{0}$

**3 – Conclusion**

$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e$       O est un point fixe du référentiel absolu R.  
 $\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c$        $O_1$  est un point fixe du référentiel relatif R'.  
 H est le projeté orthogonal de M sur  $O_1z$ .  
 P est le point coïncidant de M à la date t

Mouvement de R' par rapport à R	Translation	Rotation pure uniforme ( $\vec{\omega}_e$ constant suivant $O_1z$ )	Rotation pure non uniforme ( $\vec{\omega}_e$ non constant suivant $O_1z$ )
$\vec{v}_e$	$\vec{v}_{O_1/R} = \frac{d\vec{O}O_1}{dt/R}$	$\vec{\omega}_e \wedge \vec{O}_1M$	
$\vec{a}_e$	$\vec{a}_{O_1/R} = \frac{d^2\vec{O}O_1}{dt^2/R}$	$-\omega_e^2 \vec{HM}$	$\frac{d\vec{\omega}_e}{dt} \wedge \vec{O}_1M - \omega_e^2 \vec{HM}$
$\vec{a}_c$	$\vec{0}$	$2 \vec{\omega}_e \wedge \vec{v}_r$	

Si la rotation de R' autour d'un axe fixe R n'est pas pure, il faut ajouter  $\vec{v}_{O_1/R}$  dans l'expression de  $\vec{v}_e$ , et  $\vec{a}_{O_1/R}$  dans l'expression de  $\vec{a}_e$ .

Principe de résolution d'un exercice avec changement de référentiel :

- Définir clairement R et R'. On choisira R' de manière à ce que la description du mouvement de M y soit simple.
- Description du mouvement de M par rapport à R'  $\Rightarrow$  on en déduit  $\vec{v}_r$  et  $\vec{a}_r$ .
- Description du mouvement de R' par rapport à R  $\Rightarrow$  on en déduit  $\vec{v}_e$  et  $\vec{a}_e$ .
- On applique les lois de composition des vitesses et des accélérations, et on en déduit  $\vec{v}_a$  et  $\vec{a}_a$ , puis la description du mouvement de M dans R.

## 4 – Principes de la dynamique du point matériel

### I Masse, quantité de mouvement, moment cinétique

#### 1 – Masse

Masse = grandeur qui caractérise l'inertie du système, c'est-à-dire sa répugnance à toute modification de son mouvement. C'est un scalaire positif. Mais les expériences qui permettraient de définir la masse inertielle ne sont pas suffisamment précises, donc ne sont pas utilisées pour la définition de la masse. Le seul procédé légal pour mesurer une masse est l'utilisation d'une balance. La masse gravitationnelle et la masse inertielle coïncident.

Propriétés de la masse :

- Indépendant de l'état (repos, mouvement)
- Indépendant du référentiel d'étude
- Conservation (en mécanique classique)

[ exemple de la balance ] L'unité légale de masse est le kilogramme, kg.

#### 2 – Quantité de mouvement, moment cinétique

Une grandeur est dite cinétique si la masse y intervient.

Vecteur quantité de mouvement :  $\vec{p} = m \vec{v}$ . (en kg. m. s<sup>-1</sup>)

Moment cinétique du point matériel par rapport à O :  $\vec{\sigma}_O = \vec{OM} \wedge m\vec{v} = \vec{OM} \wedge \vec{p} = m\vec{C}$ . (en kg. m<sup>2</sup>. s<sup>-1</sup>).

La plupart du temps, le point O sera un point fixe du référentiel d'étude.

### II Systèmes en interaction

Deux systèmes interagissent lorsqu'une modification de l'un entraîne une modification de l'autre, et réciproquement.

Pour toutes les interactions connues, l'intensité diminue lorsque la distance tend vers +∞.

Un point matériel est dit isolé s'il n'est soumis à aucune interaction.

Souvent, on considérera des systèmes pseudo-isolés, c'est-à-dire des systèmes soumis à des interactions qui se compensent. Ils se comportent comme des systèmes isolés. Ex : mobile autoporteur.

### III Référentiels galiléens, principe d'inertie

Enoncé du principe d'inertie : Il existe des référentiels dans lesquels le mouvement d'un point matériel isolé est rectiligne et uniforme. De tels référentiels sont alors dits galiléens.

Pour trouver des référentiels galiléens, on a recours à l'expérience. Le meilleur référentiel galiléen connu est le référentiel de Copernic (origine : centre d'inertie du système solaire ; axes : 3 étoiles ~fixes).

Prop : R et R' sont galiléens  $\Leftrightarrow$  R est en mouvement de translation rectiligne uniforme avec R' [ demo  $\Rightarrow$  ]

Référentiel géocentrique (origine : centre d'inertie de la Terre ; axes : 3 étoiles ~fixes) peut être considéré comme galiléen si la durée de l'expérience est courte devant 1 an.

Référentiel terrestre (origine : centre d'inertie de la Terre ; axes : liés à la Terre) peut être considéré comme galiléen si la durée de l'expérience est courte devant 1 jour sidéral.

### IV Principe fondamental de la dynamique (P.F.D)

#### 1 – Notion de force

Soit un point matériel dont le mouvement dans un référentiel galiléen n'est pas rectiligne et uniforme. Le point matériel n'est pas isolé ; il subit une interaction.

Toutes les interactions connues peuvent être décrites par une grandeur vectorielle appelée force. En effet, à chaque interaction, on peut associer une direction, un sens et une intensité. On appelle force la grandeur vectorielle décrivant une interaction capable de provoquer ou de modifier un mouvement ou encore capable de créer une déformation.

#### 2 – Principe Fondamental de la Dynamique du point

Dans un référentiel galiléen, la somme vectorielle des forces s'exerçant sur un point matériel est égal à la dérivée par rapport au temps de sa quantité de mouvement. Dans le PFD se trouve le lien entre les causes du mouvement, les

forces, et la grandeur cinétique  $\vec{p}$ , qui permettra de décrire le mouvement.  $\sum \vec{f} = m \vec{a}$

Unité légale d'intensité de force 1 N (Newton) = 1 kg. m. s<sup>-2</sup>.

## **V Les interactions fondamentales**

L'interaction gravitationnelle (poids), l'interaction électromagnétique (tout le reste à l'échelle macroscopique : mayonnaise), l'interaction nucléaire forte (fusion/fission ; elle assure la cohésion du noyau), et l'interaction nucléaire faible (neutrinos,  $\beta^-$ ...) constituent les 4 grandes familles d'interactions.

## **VI Principe de relativité de Galilée**

Soient 2 référentiels galiléens, R et R'. Soit M un point matériel en mouvement par rapport à R et R'. R' est en translation rectiligne uniforme par rapport à R. On a alors  $\vec{a}_{M/R} = \vec{a}_{M/R'}$  : les lois de la mécanique sont les mêmes dans R et R' ; elles sont invariantes par changement de référentiel galiléen.

## 5 – Applications du P.F.D.

### I Point matériel sur une courbe ou une surface

#### 1 – Sur une courbe

Le point matériel est astringé à se déplacer sur une courbe ( $\Gamma$ ). La liaison entre le point matériel et la courbe est bilatérale. On travaille dans un référentiel galiléen  $R$ . PFD :  $m\vec{a} = \vec{f} + \vec{R}$ , où  $\vec{f}$  représente les forces à distance, et  $\vec{R}$  les forces de liaison. Soit  $\vec{R} = \vec{R}_t + \vec{R}_n$ ;  $\vec{R}_t$  est la composante tangentielle, ou force de frottement.  $\vec{R}_n$  est la composante normale. Sa direction est inconnue a priori.

Hyp : la liaison a lieu sans frottement  $\Rightarrow \vec{R}_t = \vec{0}$ . La réaction est normale. En projetant le PFD sur la direction de la tangente à ( $\Gamma$ ), on élimine  $\vec{R}_n$ .

#### 2 – Sur une surface

Le point matériel est astringé à se déplacer sur une surface ( $S$ ). La liaison peut être unilatérale ( $M$  ne peut pas traverser  $S$  mais peut s'en écarter (ski acrobatique)) ou bilatérale ( $M$  ne peut pas quitter  $S$ ). Soit  $\vec{R}$  la réaction du support.  $\vec{R} = \vec{R}_t + \vec{R}_n$ ;  $\vec{R}_t$  est la composante tangentielle, ou force de frottement, de direction a priori inconnue.  $\vec{R}_n$  est la composante normale.

#### 3 – Lois de Coulomb relatives au glissement

(SEULEMENT pour le frottement solide ( $\neq$  fluide))

Pour qu'un solide soit en équilibre, il faut que les forces exercées soient concourantes, et que leur somme soit nulle. Soit un solide en équilibre sur un plan horizontal dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

En l'absence de mouvement,  $R_t < k R_n$ .  $k$  : coefficient de résistance au glissement  
 Lorsqu'il y a mouvement,  $R_t = k R_n$ .  $k$  dépend de la nature des surfaces en contact.  
 En pratique,  $k \approx 0,2$ .

### II Equilibre d'un point matériel dans un référentiel

#### 1 – CNS d'équilibre

Un point matériel est en équilibre  $\Leftrightarrow$  son vecteur position est constant  $\Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$  et  $\vec{v}_0 = \vec{0}$ . [ ~demo ]

#### 2 – Stabilité d'un équilibre

Une position d'équilibre d'un point matériel est stable si la force élémentaire qui apparaît lorsqu'on le déplace infiniment peu de cette position d'équilibre tend à l'y ramener. Dans le cas où la force tend à l'écartier de sa position d'équilibre, elle est dite instable. Si aucune force n'apparaît, elle est dite indifférente. (exemple de 3 cas classiques)

### III Chute libre

#### 1 – Poids d'un corps

Dans le vide, tous les corps ont la même accélération, notée  $\vec{g}$ , de norme voisine de  $9,81 \text{ m s}^{-2}$ .  $\vec{g}$  dépend a priori de la latitude et de l'altitude, mais dans une zone restreinte de l'espace, on peut le considérer uniforme.

Un point matériel de masse  $m$  placé dans le champ de pesanteur subit la force  $\vec{P} = m\vec{g}$ , appelée poids du corps.

#### 2 – Tir dans le vide

• Un point matériel est lancé dans le champ de pesanteur terrestre supposé uniforme. On a l'équation horaire :

$$x = v_0 t \cos \alpha \quad y = 0 \quad z = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t \sin \alpha$$

Le mouvement est donc plan. La trajectoire est contenue dans le plan de tir.

Le mouvement de la projection de  $M$  sur  $Ox$  est rectiligne uniforme.

Le mouvement de la projection de  $M$  sur  $Oz$  est rectiligne uniformément varié.

Equation de la trajectoire :  $z = -1/2 g x^2 / (v_0^2 \cos^2 \alpha) + x \tan \alpha$  parabole de concavité vers le bas

• Flèche = altitude maximale  $h_m$  atteinte par le point matériel au sommet  $S$  de la parabole.

$$h_m = v_0^2 \sin^2 \alpha / 2g \quad x_s = v_0^2 \sin(2\alpha) / 2g$$

• Portée = abscisse du point de chute  $P$  sur le plan horizontal.  $x_p = v_0^2 \sin(2\alpha) / g$

La flèche et la portée dépendent de  $\alpha$ . Pour  $v_0$  donné, la flèche est maximale pour  $\alpha = \pi/2$  ; la portée maximale pour  $\alpha = \pi/4$ . Pour  $v_0$  donné, il existe 2 valeurs de  $\alpha$ ,  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  permettant d'atteindre un point déterminé du sol. Ces 2 angles sont complémentaires. Appellations : Tir en cloche / tir indirect (haut) ; Tir tendu / tir direct (bas)

• Comment choisir  $\alpha$  pour atteindre à partir du point O la cible C ? On cherche  $\tan \alpha$  à partir de l'équation de la trajectoire ( $\tan^2 \alpha + 1 = 1/\cos^2 \alpha$ ) ; il vient alors l'équation de la parabole de sureté (discriminant).

Si C est à l'intérieur :  $\Delta > 0$  : 2 valeurs de  $\alpha$  permettant d'atteindre C.

Si C est sur la parabole :  $\Delta = 0$  : 1 valeur de  $\alpha$  permettant d'atteindre C.

Si C est à l'extérieur :  $\Delta < 0$  : C est inaccessible dans les conditions choisies.

### 3 – Influence de la résistance de l'air

L'air exerce sur le point matériel une force de frottement dite fluide. Si la vitesse du projectile dans le référentiel d'étude est relativement faible, on peut mettre la force de frottement sous la forme  $\vec{f} = -k \vec{v}$ . Mêmes CI qu'au 2.

$$x = - (m v_0 \cos \alpha / k) (1 - e^{-kt/m})$$

$$y = 0$$

$$z = (m / k) (V_0 \sin \alpha + mg / k) (1 - e^{-kt/m}) - m g t / k. \quad [ \text{demo} ]$$

Lorsque  $t \rightarrow +\infty$ , le mouvement tend vers un mouvement rectiligne uniforme sur une droite verticale.

Si la vitesse du projectile est importante, on peut modéliser la force de frottement sous la forme  $\vec{f} = -k \|\vec{v}\|^a \vec{v}$ , où  $a$  varie entre 1 et 4.

## IV Mouvements de particules chargées

Soit un point matériel dans un champ électrique  $\vec{E}$  et un champ magnétique  $\vec{B}$ . Il subit la force de Lorentz :

$$\vec{f} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

La vitesse  $\vec{v}$  est définie dans le référentiel où les sources du champ magnétique  $\vec{B}$  sont immobiles.

### 1 – Aspect énergétique

$d(\frac{1}{2} m \vec{v}^2) = m \vec{v} \cdot d\vec{v} = \vec{f} \cdot d\vec{OM} = \delta w = -q dV$  est le travail élémentaire de  $f$ . (Forme différentielle de l'énergie cinétique)

Electron-Volt = l'énergie cinétique acquise par une particule de charge  $+e$  qui subit une chute de potentiel de 1 V.  
 $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ .

### 2 – Action d'un champ électrique $\vec{E}$ uniforme

On considère un champ uniforme et constant  $\vec{E}$ , entre des plaques conductrices planes parallèles portées à des potentiels différents.  $\|\vec{E}\| = |V_1 - V_2| / d$ .

a – 1<sup>er</sup> cas :  $\vec{E}$  est parallèle à  $\vec{v}_0$

Le mouvement est rectiligne uniformément varié. [ ~demo ]

b – 2<sup>ème</sup> cas :  $\vec{E}$  est orthogonal à  $\vec{v}_0$

Le mouvement est plan, la trajectoire est contenue dans le plan contenant  $\vec{E}$ ,  $\vec{v}_0$  et passant par O.

Equation de la trajectoire : parabole.

Angle de déviation  $\alpha$  = angle entre  $\vec{v}$  à la sortie du champ et  $\vec{v}_0$ .

La tangente à la parabole en S d'abscisse  $\ell$  coupe l'axe des abscisses en I d'abscisse  $\ell/2$ .

La déviation ne dépend pas des caractéristiques de la particule mais uniquement des caractéristiques du dispositif [ ~demo ] Projété sur un écran en h, on a h proportionnel à U (tension du champ vertical).

### 3 – Action d'un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme

a – 1<sup>er</sup> cas :  $\vec{B}$  orthogonal à  $\vec{v}_0$

$q \vec{v} \wedge \vec{B}$  ne travaille pas. Donc un champ magnétique ne peut pas modifier l'énergie cinétique d'une particule.

[ DEMO que : le mouvement est plan, le plan de la trajectoire est orthogonal à  $\vec{B}$ , le mouvement est uniforme, le

rayon de courbure est  $\frac{m v_0}{|q| B}$ , calcul de la période du mouvement (indépendante de  $v_0$ ), calcul de la déviation lorsque

$\vec{B}$  agit sur une région limitée de l'espace ]

**b – 2<sup>ème</sup> cas :  $\vec{B}$  n'est pas orthogonal à  $\vec{v}_0$** 

On prend  $\vec{v}_0 = v_{0x} \vec{u}_x + v_{0y} \vec{u}_y + v_{0z} \vec{u}_z$ , et  $\vec{B} = B \vec{u}_z$ .

La projection du mouvement sur l'axe Oz est rectiligne uniforme, avec la vitesse  $v_{0z}$ .

La projection du mouvement sur le plan xOy est circulaire uniforme, donc le mouvement est hélicoïdal uniforme, d'axe vertical Cz, avec la vitesse  $v_0$ . ( calcul du pas de l'hélice... )

**4 – Actions simultanées de  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  uniformes**

On choisit les champs orthogonaux.  $\vec{E} = E \vec{u}_z$ ,  $\vec{B} = B \vec{u}_x$ ,  $\vec{v}_0 = \vec{0}$ .

Alors le point M se déplace sur une cycloïde dans le plan orthogonal à B passant par  $x_0$  :

$$x = 0$$

où

$$y = R(\omega t - \sin(\omega t))$$

$$\omega = \frac{qB}{m}$$

$$z = R(1 - \cos(\omega t))$$

$$R = \frac{E}{\omega B} = \frac{mE}{qB^2}$$

[ demo ]

# 6 – Théorème de l'énergie cinétique, énergie potentielle

## I Energie cinétique

### 1 – Travail d'une force

$$\delta W = \vec{f} \cdot d\vec{OM} = \vec{f} \cdot \vec{v} \cdot dt = \mathcal{P} \cdot dt \quad \text{Travail élémentaire}$$

$$W_{M1 \rightarrow M2}(\vec{f}) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{f} \cdot \vec{v} \, dt = \int_{M_1 M_2} \vec{f} \cdot d\vec{OM}.$$

### 2 – Théorème de l'énergie cinétique

Dans un référentiel galiléen, la variation d'énergie cinétique d'un point matériel entre 2 instants  $t_1$  et  $t_2$  est égale au travail de la résultante des forces qui s'exercent sur ce point matériel entre ces 2 instants. [ demo PFD ]

## II Forces conservatives, énergie potentielle

### 1 – Gradient d'une fonction

Soit  $U$  une fonction réelle des variables réelles  $x, y, z : U \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ .

$\partial U / \partial x$  est la fonction  $\in \mathcal{F}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$  obtenue en dérivant  $U$  par rapport à  $x$ , en maintenant  $y$  et  $z$  constantes. En général,

$$\partial(\partial U / \partial y) / \partial x = \partial^2 U / \partial x \partial y \neq \partial^2 U / \partial y \partial x$$

Par définition,  $dU = \partial U / \partial x \, dx + \partial U / \partial y \, dy + \partial U / \partial z \, dz$

$$\text{grad } U = \partial U / \partial x \, \vec{u}_x + \partial U / \partial y \, \vec{u}_y + \partial U / \partial z \, \vec{u}_z$$

Mais la vraie définition de  $\text{grad } U$  est :

$$\text{grad } U \cdot d\vec{OM} = dU$$

Coordonnées cylindriques :	Coordonnées sphériques :
$\text{grad } U \begin{vmatrix} \frac{\partial U}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \\ \frac{\partial U}{\partial z} \end{vmatrix} \quad [ \text{demo} ]$	$\text{grad } U \begin{vmatrix} \frac{\partial U}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \phi} \end{vmatrix} \quad [ \text{demo} ]$

### 2 – Energie potentielle

Dans un espace règne un champ de forces si un point matériel placé en un point quelconque de cet espace y subit une force qui ne dépend que de la position du point dans le champ et de ses caractéristiques :

Ex : champ électrostatique, gravitationnel (pas le champ magnétique)

Un champ de forces  $\vec{f}$  dérive d'une énergie potentielle s'il existe une fonction  $\mathcal{E}_P$ , telle que  $\vec{f} = - \text{grad } \mathcal{E}_P$ .

On peut considérer l'énergie potentielle comme de l'énergie que possède le point matériel (en réserve) du fait de sa position dans le champ des forces.

Les champ de force qui dérivent d'une énergie potentielle sont dits conservatifs.

### 3 – Propriété des champs de force conservatifs

a – CNS pour qu'un champ de force soit conservatif

$$\delta W = \vec{f} \cdot d\vec{OM} = - \text{grad } \mathcal{E}_P \cdot d\vec{OM} = - d\mathcal{E}_P = f_x \, dx + f_y \, dy + f_z \, dz$$

Le travail élémentaire de  $\vec{f}$ , qui dans le cas général est une forme différentielle, est ici une différentielle totale.

Le champ de forces est conservatif  $\Leftrightarrow$  la forme différentielle est totale

$$\Leftrightarrow \partial f_x / \partial y = \partial f_y / \partial x \quad \partial f_y / \partial z = \partial f_z / \partial y \quad \partial f_x / \partial z = \partial f_z / \partial x$$

( Critère de Schwarz, valable qu'en coordonnées cartésiennes )

$$\Leftrightarrow \text{rot } \vec{f} = \vec{0}. \quad (\text{ Cf. Cours de Spé } )$$

b – Travail d'un champ de forces conservatif

$$\delta W = - d\mathcal{E}_P$$

$$W_{M1 \rightarrow M2}(\vec{f}) = - \Delta \mathcal{E}_P.$$

Le travail d'un champ de forces conservatif est égal à la diminution (c'est-à-dire l'opposé de la variation) d'énergie potentielle. Il ne dépend pas du chemin suivi.

Si le trajet suivi par le point matériel est fermé, on a  $W_{M_1 \rightarrow M_1}(\vec{f}) = \oint_{M_1, M_2} \vec{f} \cdot d\vec{OM} = 0$ .

Force conservative = force dont le travail sur un trajet fermé est nul.

Ex : champs de forces conservatives,  $\vec{R}_n$ ,  $q \vec{v} \wedge \vec{B}$ ...

Contrex : frottements

## 4 – Exemples de champs de forces conservatifs

### a – Poids d'un corps

$\vec{P}$  vérifie le critère de Schwarz. Il dérive d'une énergie potentielle.

$\mathcal{E}_P = mgz + \text{cste}$        $W_{M_1 \rightarrow M_2}(\vec{f}) = mg(z_1 - z_2)$       où  $z$  est vertical, dirigé vers le haut      [ ~demo ]

### b – Champ de forces électrostatique

$\vec{E}$  dérive d'un potentiel électrostatique  $V$  :  $\vec{E} = -\text{grad } V$ . On a alors

$\mathcal{E}_P = qV + \text{cste}$        $W_{M_1 \rightarrow M_2}(\vec{f}) = q(V_1 - V_2)$

### c – Tension d'un ressort

$\vec{T} = -k(\ell - \ell_0)\vec{u}$       où  $\vec{u}$  est unitaire dans l'axe du ressort, dans le sens des allongements réels pour l'extrémité

$\vec{T}$  vérifie le critère de Schwarz. On a :

$\mathcal{E}_P = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 + \text{cste}$  : énergie potentielle élastique

## III Energie mécanique

Thec :  $\delta W(\vec{f}) = d\mathcal{E}_K$ .

- Si  $\vec{f}$  est un champ de forces conservatif,  $\delta W(\vec{f}) = -d\mathcal{E}_P = d\mathcal{E}_K$ . On pose  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_K + \mathcal{E}_P$  : énergie mécanique.  
 $d\mathcal{E} = 0 \Rightarrow \mathcal{E}$  est constante. Mais a priori,  $\mathcal{E}_P$  et  $\mathcal{E}_K$  varient. On a alors une relation :  $\mathcal{E}_P + \mathcal{E}_K = \text{cste}$ , qui est appelée intégrale 1<sup>ère</sup> du mouvement, qui permet de faire des prévisions sur le mouvement.
- Sinon, on pose  $\vec{f} = \vec{f}_{\text{dérivant de } \mathcal{E}_P} + \vec{f}_{\text{ne dérivant pas de } \mathcal{E}_P}$ . On a alors  $\Delta\mathcal{E} = W_{\text{forces ne dérivant pas de } \mathcal{E}_P}$ .

## IV Exemples d'utilisation de l'intégrale première du mouvement

Résultante des forces :  $\vec{f} = f(x)\vec{u}_x$ . Schwarz. On a donc  $\mathcal{E}_K + \mathcal{E}_P = \text{cste} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \mathcal{E}_P(x)$ .

- 1<sup>ère</sup> utilisation : on dérive par rapport à  $t$  pour en déduire l'équation différentielle du mouvement ( $\Leftrightarrow$  PFD)
- 2<sup>ème</sup> utilisation : on peut faire une résolution graphique ; on représente  $\mathcal{E}_P$  en fonction de  $x$  ; on porte la valeur de  $\mathcal{E}$  donnée par les CI, et on trouve ainsi les valeurs de  $x$  vérifiant l'inégalité  $\mathcal{E}_K = \mathcal{E} - \mathcal{E}_P \geq 0$

## V Equilibre d'un point matériel et condition de stabilité

Résultante des forces :  $\vec{f} = f(x)\vec{u}_x$ .

Pour  $x = x_0$  position d'équilibre du système, on a  $\vec{f} = \vec{0}$ , donc  $d\mathcal{E}_P/dx = 0$  :  $\mathcal{E}_P$  est extrémale en une position d'équilibre.

Pour que la position soit stable, il faut que  $\frac{df_x}{dx} < 0$  c'est-à-dire  $\frac{d^2\mathcal{E}_P}{dx^2} \geq 0$ , c'est-à-dire  $\mathcal{E}_P$  est minimale.

Ce résultat se généralise aux cas d'un point matériel dont la position ne dépend que d'un seul paramètre.

## 7 – Dynamique et statique dans un référentiel non galiléen

### I Force d'inertie

On veut déterminer  $\vec{a}_r, \vec{v}_r, \vec{OM}$  puis l'équation de la trajectoire dans R' non galiléen.

$$m\vec{a}_r = \vec{f} + (-m\vec{a}_e) + (-m\vec{a}_c)$$

Force d'inertie d'entraînement :  $\vec{f}_{ie} = -m\vec{a}_e = -m \frac{d^2\vec{OO}_1}{dt^2/R} - m \frac{d\vec{\omega}_e}{dt} \wedge \vec{O}_1M + m \omega_e^2 \vec{HM}$

Force d'inertie de Coriolis :  $\vec{f}_{ic} = -m\vec{a}_c = -2 m \vec{\omega}_e \wedge \vec{v}_r$ .

On peut appliquer le théorème de l'énergie cinétique dans un référentiel non galiléen à condition d'ajouter au travail des forces réellement exercées le travail des forces d'inertie.  $\vec{f}_{ic}$  ne travaille pas [ ~demo ]

Si R' est en rotation pure uniforme par rapport à R,

$$\mathcal{E}_P = -\frac{1}{2} m \omega_e^2 r^2 + \text{cste} = -\frac{1}{2} J \omega_e^2 + \text{cste} \quad (\text{champ de force conservatif})$$

⊗ Il faut bien savoir écrire les forces d'inertie. (X2000)

### II Exemple

Tige tournant autour de l'axe OZ dans le plan horizontal avec  $\omega$  constant. Alors  $x(t) = x_0 \cos \omega t$

Remarque : Le travail de la force normale n'est nulle que dans le référentiel lié au support.

$\vec{f}_{ie}$  est appelée ici la force centrifuge.

### III Cas de la Terre

#### 1 – Référentiel terrestre

Le mouvement de la Terre dans le référentiel de Copernic se décompose en un mouvement de rotation uniforme autour de l'axe des pôles et un mouvement de translation circulaire uniforme autour de l'origine du référentiel de Copernic.  $\omega = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ rad. s}^{-1}$ .

#### 2 – Champ de gravitation terrestre

Loi de Newton :  $\vec{F}_{A \rightarrow B} = -\frac{\mathcal{G} m_A m_B \vec{u}_{AB}}{r^2}$  où  $\mathcal{G} = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N. m}^2. \text{kg}^{-2}$ .

Le champ de gravitation créé par une masse ponctuelle m placée en un point P est au point M,

$$\vec{G}(M) = -\frac{\mathcal{G} m \vec{u}_{PM}}{PM^2}.$$

On considère que la Terre est un corps dont la répartition de masse est à symétrie sphérique, c'est-à-dire qu'elle est sphérique et que sa masse volumique ne dépend que de la distance au centre de la sphère.

On montrera en électrostatique que le champ de gravitation créé par une telle répartition de masse en un point M est, à l'extérieur de la Terre, identique à celui qui serait créé par la même masse concentrée au centre de la Terre.

$\vec{G}(P) = -\mathcal{G} M_T \vec{u}_r / (R_T + h)^2$  ne dépend que de l'altitude.

#### 3 – Définition du poids d'un corps

Pour mesurer le poids d'un corps on suspend ce corps à un ressort étalonné vertical à on attend l'équilibre par rapport à la Terre. Il y a équilibre ; la force qui compense  $\vec{T}$  est appelée le poids.

PFD :  $\vec{g} = \vec{G} + \omega^2 \vec{HM}$ .  $\omega^2 HM \leq 3,4 \cdot 10^{-2} \text{ m. s}^{-2} \ll 9,8 \text{ m. s}^{-2}$ .

$g = G - \omega^2 R_T \cos \lambda$  à la surface de la Terre.

$$\varepsilon = \omega^2 R_T \cos \lambda \sin \lambda / G \leq 0,1^\circ.$$

Bref :  $\vec{P} = m\vec{g} = m\vec{G} + \vec{f}_{ic}$ .

#### 4 – Energie potentielle gravitationnelle

$$\mathcal{E}_P = -\frac{\mathcal{G} m M_T}{r} = -\frac{g_0 m R_T^2}{r} \quad \text{car } \mathcal{G} M_T = g_0 R_T^2.$$

#### 5 – Force de Coriolis

On lâche un point matériel de masse m à l'altitude h par rapport au sol sans vitesse initiale.

On utilise la base du repère local terrestre : Oz suivant  $-\vec{g}$ , Oy vers le Nord et tangent à la terre, Ox vers l'Est.  
On suppose que :

- Le référentiel géocentrique est galiléen
- L'altitude h est suffisamment faible pour qu'on puisse considérer  $\vec{G}$  constant.
- Les variations de la latitude  $\lambda$  sont négligeables
- Les frottements sont négligeables
- La verticale du lieu est confondue avec TO, si T est le centre de la Terre.
- On effectue l'approximation  $\omega \ll g t / x$ .  
[ Calculs : 3 équations différentielles en x y z du repère local terrestre ]

Déviations vers l'Est de  $x = \omega g \cos \lambda t^3 / 3$ .

Expérience de Reich à Frydberg : confirment théorie.  $\lambda = 45^\circ$ ,  $h = 100$  m,  $\Delta x = 1,6$  cm.

## 6 – Phénomène des marées

### a – Référentiel astrocentrique

Soit un astre  $\Sigma$  de masse  $M_\Sigma$  de centre de masse  $G_\Sigma$ .

Référentiel astrocentrique = référentiel qui a pour origine  $G_\Sigma$  et pour axes, 3 axes qui pointent vers 3 étoiles "fixes".  
Un tel référentiel, noté  $R^*$  est toujours en translation par rapport au référentiel de Copernic.

$\vec{G}$  : champ de gravitation extrastral.

On étudie le mouvement d'un point matériel M au voisinage de  $\Sigma$ , dans  $R^*$ .

PFD à M /  $R^*$  :  $m\vec{a}_{M/R^*} = \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow M/R^*} + m\vec{G}(M) + \vec{f}_{\text{ic}} + \vec{f}_{\text{ic}} = \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow M/R^*} + m\vec{G}(M) - m\vec{a}_{G_\Sigma/R}$ . PFD à  $\Sigma$  / R :  $\vec{a}_{G_\Sigma/R} = \vec{G}(G_\Sigma)$ .

Alors on a  $\boxed{m\vec{a}_{M/R^*} = \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow M/R^*} + m(\vec{G}(M) - \vec{G}(G_\Sigma))}$ .

$\vec{G}(M) - \vec{G}(G_\Sigma)$  est le terme de marée, négligeable en général.

### b – Etude du terme de marée

Le champ de marée tend à disloquer  $\Sigma$  (la Terre) en l'étirant. En considérant celui dû au soleil,

$$\|\vec{G}(M_1) - \vec{G}(G_\Sigma)\| = 2 \mathcal{G} M_s R / d^3, \quad \text{où } M_1 \text{ est à la surface de la Terre éclairée et aligné avec S et } G_\Sigma.$$

Ex : Anneaux de Saturne, Dislocation de la comète Shoemaker-Levy 9 au voisinage de Jupiter.

### c – Application aux marées océaniques

Le bourrelet océanique (dû au terme des marées de la Lune) balaie la surface de la Terre, et revient environ toutes les 12 heures. Quand les effets de marée du soleil et de la lune s'additionnent, on parle de marées de vives eaux. Quand elles sont opposées, on parle de marées de mortes eaux.

## IV Référentiels uniformément accélérés et gravitation

R : référentiel galiléen ; R' est en mouvement de translation rectiligne uniformément accélérée par rapport à R.

M : point matériel,  $\vec{f}$  : résultante des forces réellement exercées sur M.

Alors  $m\vec{a}_r = \vec{f} - m\vec{a}_e$  ( PFD ; m : masse inertielle ).

Si  $\vec{f}$  traduit l'action d'un champ de gravitation,  $\vec{f} = m\vec{G}$  ( m : masse gravitationnelle ).

$$\Rightarrow \vec{a}_r = \vec{G} - \vec{a}_e$$

Localement, il y a équivalence entre le champ de gravitation  $\vec{G}$  et le champ d'accélération  $-\vec{a}_e$ .

Exemple : une enceinte en chute libre.  $\vec{a}_e = \vec{g}$  ;  $\vec{a}_r = \vec{0}$ . Le champ de pesanteur est compensé localement par l'accélération d'entraînement ; c'est le phénomène d'impesanteur.

## 8 – L'oscillateur harmonique

But : étudier de petits mouvements autour d'une position d'équilibre stable en utilisant le modèle de l'~.

### I Notion d'oscillateur harmonique

#### 1 – Mouvement d'un point autour d'une position d'équilibre stable

Problème à un seul paramètre. Soit un point matériel astringé à se déplacer sur un axe Ox sous l'action d'un champ de forces  $\vec{f}$  qui dérive de l'énergie potentielle  $\mathcal{E}_P(x)$ .

Soit  $x = x_0$  une position d'équilibre stable.  $\frac{d\mathcal{E}_P}{dx}(x_0) = 0$  ;  $\frac{d^2\mathcal{E}_P}{dx^2}(x_0) > 0$ .

On veut étudier le mouvement au voisinage de cette position d'équilibre stable.  $x = x_0 + \varepsilon$ .

→ développement limité de  $\mathcal{E}_P$  à l'ordre 2 en  $(x - x_0)$  :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_P(x) &= \mathcal{E}_P(x_0) + (x - x_0) \frac{d\mathcal{E}_P}{dx}(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2} \frac{d^2\mathcal{E}_P}{dx^2}(x_0) \\ &= \mathcal{E}_P(x_0) + \frac{1}{2} k (x - x_0)^2 \text{ où } k = \frac{d^2\mathcal{E}_P}{dx^2}(x_0) > 0\end{aligned}$$

PFD : on a l'équation différentielle  $d^2X/dt^2 + kX/m = 0$  où  $X = x - x_0$

Cette équation différentielle est l'équation différentielle qui traduit le mouvement d'un oscillateur harmonique.

#### 2 – Exemples de représentations d'oscillateurs harmoniques

##### a – Masse accrochée à un ressort

Ressort horizontal :  $d^2x/dt^2 + kx/m = 0$ . Pulsation :  $\sqrt{k/m}$

Le point matériel lié à un ressort horizontal est un oscillateur harmonique. On n'a pas fait de DL →  $x$  n'a pas besoin d'être petit (il ne faut quand même pas dépasser la limite d'élasticité du ressort).

Ressort vertical : L'origine de Oz est à la cote de la position d'équilibre stable  $\ell = \ell_1$ . On a alors  $d^2z/dt^2 + kz/m = 0$ .

##### b – Cas du pendule simple

Pendule simple = point matériel de masse  $m$  fixé à l'extrémité d'un fil inextensible de masse négligeable et de longueur  $\ell$ . En appelant  $\theta$  l'angle entre le fil et la verticale, on a :

$$d^2\theta/dt^2 + g \sin \theta / \ell = 0 \quad \text{Ce n'est pas un oscillateur harmonique.}$$

Autour de la position d'équilibre stable  $\theta = 0$ , on a  $d^2\theta/dt^2 + g \theta / \ell = 0$

Au voisinage de la position d'équilibre, le point matériel se comporte comme un oscillateur harmonique. On parle d'oscillateur harmonique linéarisé.

### II Etude du mouvement

#### 1 – Caractéristiques

$$d^2x/dt^2 + \omega^2 x = 0 \quad \omega = \sqrt{k/m} \quad k = (d^2\mathcal{E}_P/dx^2)_{x=x_e} > 0 \quad T = 2\pi/\omega.$$

→  $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$  [ ceci n'est vrai que si  $x$  correspond à une longueur (angle) ]

La période ne dépend que des caractéristiques du dispositif, elle ne dépend pas des CI. On dit que les oscillations sont isochrones. Le terme d'oscillateur harmonique provient du caractère purement sinusoïdal des oscillations.

#### 2 – Aspect énergétique

Cas du ressort horizontal

Ici,  $\mathcal{E}_P = \frac{1}{2} kx^2$  ;  $\mathcal{E} = \frac{1}{2} kX_m^2 = \text{cste}$ . → Résolution graphique car il faut que  $\mathcal{E}_K = \mathcal{E} - \mathcal{E}_P \geq 0$ .

#### 3 – Analogie électromécanique

$$\text{(ressort)} \quad m d^2x/dt^2 + kx = 0 \quad \Leftrightarrow \quad L d^2q/dt^2 + q/C = 0 \quad \text{(circuit LC)}$$

### III Oscillateur spatial

#### 1 – Etude du mouvement

Soit un point matériel lâché dans un référentiel supposé galiléen. La résultante des forces s'exerçant sur lui s'écrit  $\vec{f} = -k \vec{OM}$ .  $O$  : point fixe de  $R$ , et  $k$  : constante positive.

Exemple de réalisation : mobile autoporteur lié à un point fixe de la table par un ressort de longueur à vide nulle.

C'est un mouvement à accélération centrale → Le mouvement est plan ; la trajectoire est contenue dans le plan défini par  $(O, \vec{OM}_0, \vec{v}_0)$  ; la loi des aires est vérifiée ; le mouvement ne change jamais de sens dans la mesure où il n'est pas rectiligne. Etude avec les coordonnées cartésiennes.

$$x(t) = X_m \cos(\omega t) \quad y(t) = Y_m \cos(\omega t + \varphi)$$

La trajectoire est inscrite dans un rectangle de centre  $O$  et de côtés égaux à  $2X_m$  et  $2Y_m$ .

Equation de la trajectoire :  $x^2/X_m^2 + y^2/Y_m^2 - 2xy \cos \varphi / X_m Y_m = \sin^2 \varphi$ . C'est l'équation d'une ellipse de centre  $O$  dont les axes sont inclinés par rapport à  $Ox$  et  $Oy$ .

Cas particuliers :  $\varphi = 0$  ou  $\varphi = \pi$  → La trajectoire est une droite

$\varphi = \pi/2$  ou  $\varphi = -\pi/2$  → La trajectoire est une ellipse d'axes  $Ox, Oy$ .

Si l'ellipse est parcourue dans le sens trigonométrique direct elle est dite **gauche**. Sinon, elle est droite.

Pour s'en souvenir : c'est l'orientation de  $\vec{v}$  lorsque le point est en haut.

Le sens de parcours de l'ellipse est donnée par le sens de  $\vec{v}_0$ .

L'ellipse est gauche pour  $\varphi \in [\pi, 2\pi]$  ; sinon, elle est droite.

En pratique, on peut mesurer  $\varphi$  de 2 manières : en bicourbe  $(X(t), Y(t))$ , et en X-Y ( $CD/AB = |\sin \varphi|$ )

#### 2 – Energie

La force  $\vec{f}$  est un champ de forces conservatif → il existe  $\mathcal{E}_p$ ,  $\vec{f} = -\text{grad } \mathcal{E}_p$  ;  $\mathcal{E}_p = \frac{1}{2} k (x^2 + y^2)$ .

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} k X_m^2 + \frac{1}{2} k Y_m^2 = \mathcal{E}_p + \mathcal{E}_k.$$

### IV Portrait de phase d'un oscillateur

#### 1 – Définition

Soit un point matériel dont le mouvement est caractérisé par la grandeur  $x(t)$ .

Trajectoire de phase = courbe obtenue en traçant  $\dot{x}$  en fonction de  $x$ .

Portrait de phase du système = ensemble des trajectoires de phases décrites par le système à partir de toutes les conditions initiales possibles.

#### 2 – Cas de l'oscillateur harmonique à une dimension

$$x(t) = X_m \cos(\omega t) \quad \dot{x}(t) = X_m \omega \sin(\omega t)$$

$$\text{Equation de la trajectoire de phase : } x^2 + \left(\frac{\dot{x}}{\omega}\right)^2 = X_m^2.$$

Si on représente plutôt  $\dot{x}/\omega$  en fonction de  $x$ , la trajectoire de phase est alors un cercle centré sur l'origine, et de rayon égal à l'amplitude des oscillations. Dans ce système de coordonnées, le portrait de phase de l'oscillateur harmonique est un ensemble de cercles concentriques.

#### 3 – Cas du pendule rigide

Soit un point matériel de masse  $m$  relié à un point  $O$  par une tige rigide de masse négligeable.

De l'intégrale 1<sup>ère</sup> du mouvement on déduit  $d^2\theta/dt^2 + g \sin \theta / \ell = 0$ . Soit  $\omega_0 = \sqrt{g/\ell}$

Portrait de phase : on porte  $(d\theta/(\omega_0 dt))$  en fonction de  $\theta$  (qui n'est pas défini à  $2\pi$  près)

- Si  $\theta$  reste petit,  $\theta \sim \sin \theta$  et on obtient des cercles centrés sur l'origine ( $\theta=0, d\theta/dt=0$ ) → oscillateurs harmoniques
- Si l'énergie est plus grande, on obtient des courbes fermées ovales ; on ne peut plus considérer le système comme un oscillateur harmonique. Mais  $\theta$  est borné → c'est un oscillateur.
- Si l'énergie dépasse un certain seuil, on obtient des courbes qui ne coupent plus l'axe  $d\theta/dt=0$  ;  $M$  tourne autour du point  $O$  toujours dans le même sens.

## 9 – Oscillations amorties, oscillations forcées

### I Oscillations amorties par frottement fluide

#### 1 – Mise en équation

Un point matériel est astringé à se déplacer sans frottement solide sur un axe horizontal Ox.

Forces :  $\vec{P}$ ,  $\vec{R}_n$ ,  $-k x \vec{u}_x$ , frottement fluide. Il n'y a pas d'expression générale pour les forces de frottement fluide.

Pour des vitesses faibles, on les met sous la forme  $\vec{F} = -f \vec{v}$ . D'où  $d^2x/dt^2 + (f/m) dx/dt + (k/m) x = 0$

On pose  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  et  $\alpha = f/2m$ .  $\rightarrow d^2x/dt^2 + 2\alpha dx/dt + \omega_0^2 x = 0$ .  $\Delta' = \alpha^2 - \omega_0^2$ . Cf cours d'électricité...

#### 2 – Régime pseudo-périodique amorti

#### 3 – Régime critique

#### 4 – Régime apériodique

Au bout d'un temps théoriquement infini, le point matériel revient vers sa position d'équilibre stable  $x=0$ ,  $dx/dt=0$ .

#### 5 – Portrait de phase

##### a – Cas du régime pseudo-périodique amorti

$x(t) = A e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \varphi)$ . On a une spirale logarithmique (tortillon).  $\forall CI$ , la trajectoire de phase tend vers le point O, appelé attracteur. Une telle évolution vers une position d'équilibre stable est appelée relaxation. Temps caractéristique de la relaxation :  $\tau = 1/\alpha$ .

##### b – Cas des régimes critiques et apériodiques

On a des vagues demi-cercles orientés vers le bas.

#### 6 – Amortissement optimal

C'est dans le cas du régime critique ( $\alpha = \omega_0$ ) que le retour à l'équilibre est le plus rapide. En pratique, pour obtenir un amortissement rapide, on se place en régime pseudo-périodique ( $\omega_0 - \epsilon < \alpha < \omega_0$ ). Et alors au bout d'une période propre  $T_0$ , l'amplitude est descendue de 99,9 %.

#### 7 – Aspect énergétique

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} m (dx/dt)^2 + \frac{1}{2} k x^2 \quad \mathcal{E}(t + T) = e^{-2\alpha T} \mathcal{E}(t)$$

Cas du régime pseudo-périodique amorti ( $\alpha < \omega_0$ ) :  $\Delta \mathcal{E} = W(-f \vec{v})$

On définit le facteur de qualité  $Q = 2\pi \frac{\text{énergie mécanique à la date } t}{\text{énergie mécanique perdue entre } t \text{ et } t + T}$

$$= 2\pi \frac{\mathcal{E}(t)}{\mathcal{E}(t) - \mathcal{E}(t + T)} = \frac{2\pi}{1 - \exp(-2\alpha T)}$$

Si l'amortissement est très faible,  $Q \sim \omega_0/2\alpha$ . [ développement limité de l'exponentielle ]

#### 8 – Analogie électromécanique

Résistance R  $\Leftrightarrow$  Facteur de frottements f.

### II Oscillations forcées

#### 1 – Position du problème

Même hypothèses, mais le point matériel subit en plus une force extérieure :  $\vec{F}_{\text{ext}} = F \cos(\omega t) \vec{u}_x$ .

$$d^2x/dt^2 + 2\alpha dx/dt + \omega_0^2 x = F \cos(\omega t) / m \quad [\text{ PFD : } \vec{P}, \vec{R}_n, \vec{f}, \vec{F}, \vec{F}_{\text{ext}} ]$$

Exemple de réalisation pratique : Le point matériel est lié à une extrémité d'un ressort ; l'autre extrémité est reliée à un vibreur, tel que  $x_A = a \cos(\omega t)$ . On a alors  $F = k a$ .

## 2 – Résolution de l'équation différentielle

$x(t) = x_{G-2}(t) + x_{P+2}(t)$ , avec  $x_{G-2} \rightarrow 0$ .

Régime transitoire  $\rightarrow$  Superposition du régime libre et forcé.

Régime permanent  $\rightarrow$  Régime forcé seul (qu'on étudie)

L'expérience montre que le système oscille à la pulsation  $\omega$  imposée par le vibreur. On passe en représentation complexe (on peut utiliser le symbole  $i$  car il n'y a pas de conflits avec l'intensité)

$$(-\omega^2 + 2i\alpha\omega + \omega_0^2) X_m e^{i\omega t} = F e^{i\omega t} / m \quad \text{où } X_m = X_m e^{i\varphi}$$

$$X_m = \frac{F}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}} \quad \varphi \in [-\pi, 0]$$

$$\text{Si } \omega > \omega_0, \varphi = -\text{Arctan}((2\alpha\omega)/(\omega_0^2 - \omega^2))$$

$$\text{Si } \omega < \omega_0, \varphi = -\pi - \text{Arctan}((2\alpha\omega)/(\omega_0^2 - \omega^2))$$

## 3 – Variations de $X_m$ avec la pulsation excitatrice $\omega$

Soit  $D(\omega) = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2$ . En dérivant  $D$ , on trouve que  $dX_m/d\omega$  s'annule pour  $\omega = 0$  et pour  $\omega = \sqrt{(\omega_0^2 - 2\alpha^2)}$ , si la racine existe.  $\rightarrow$  Il existe 2 cas :

Si  $\alpha \leq \omega_0/\sqrt{2}$  :  $X_m$  passe par un maximum pour  $\omega = \omega_r < \omega_0$ . Il y a résonance d'amplitude de déplacement (Analogies avec la résonance de charge en électricité).

Si  $\alpha > \omega_0/\sqrt{2}$  :  $X_m$  décroît quand  $\omega$  augmente. (Cas du régime apériodique, critique, et pseudopériodique dont l'amortissement est élevé)

## 4 – Variations de $\varphi$ avec la pulsation excitatrice $\omega$

$\varphi$  décroît avec  $\omega$ .  $\varphi_0 \rightarrow 0$  ;  $\varphi_{+\infty} \rightarrow -\pi$ . La courbe passe toujours par le point  $(\omega = \omega_0, \varphi = -\pi/4)$ .

Dans les basses fréquences,  $x$  et  $F$  sont sensiblement en phase.

Dans les hautes fréquences, le dispositif n'arrive pas à suivre les variations de  $F \cos \omega t$ .

## 5 – Etude de la résonance

On est dans le cas où  $\alpha \leq \omega_0/\sqrt{2}$ . Résonance pour  $\omega = \omega_r = \sqrt{(\omega_0^2 - 2\alpha^2)}$ . On considère que  $\alpha \ll \omega_0$ .

[ développements limités à l'ordre 1 ]  $X_m(\omega_r) = F/2m\alpha\omega_0$ .

Bande passante à 3 dB :  $\omega_{12} = \omega_0 \pm \alpha$ .  $\Delta\omega = 2\alpha$ .  $\rightarrow$  Facteur de qualité  $Q = \omega_r/\Delta\omega = \omega_0/2\alpha$ .



⊗ Selon un examinateur de Mines-Pont, il peut s'appliquer aux systèmes ouverts (☹ se méfier).

## 2 – Cas d'un système isolé ( $\vec{R}_{\text{ext}} = \vec{0}$ )

Dans R,  $\vec{a}_G = \vec{0}$  donc  $\vec{v}_G = \vec{c}^e$ .

Le référentiel barycentrique d'un système isolé est galiléen.

## VI Théorème du moment cinétique

### 1 – Enoncé et démonstration

"Dans un référentiel galiléen,  $\frac{d\vec{\sigma}_O}{dt/R} = \vec{m}_{O \text{ ext}}$  si O point fixe de R."

Demo – On peut aussi appliquer le thmc à 1 seul point matériel.

### 2 – Cas d'un référentiel non galiléen

Alors on peut encore appliquer le thmc mais il faut ajouter au moment des forces extérieures le moment des forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis s'exerçant sur  $A_1$  et sur  $A_2$ .

### 3 – Cas d'un système isolé

Dans un référentiel galiléen, où O est un point fixe :  $\vec{m}_{O \text{ ext}} = \vec{0}$  car  $\vec{f}_{\text{ext } 1} = \vec{f}_{\text{ext } 2} = \vec{0} \rightarrow \vec{\sigma}_O$  est constant

## VII Théorème de l'énergie cinétique

$\mathcal{E}_K(t_2) - \mathcal{E}_K(t_1) = W_{\text{ext } t_1 \rightarrow t_2} + W_{\text{int } t_1 \rightarrow t_2}$ . [ demo : PFD à  $A_1$  et à  $A_2$  puis produit scalaire avec  $\vec{v}$ . dt puis somme ]

"Dans un référentiel galiléen, la variation de l'énergie cinétique d'un système de 2 points matériels entre 2 instants est égale au travail de toutes les forces, tant intérieures qu'extérieures qui s'exercent sur le système entre ces 2 instants."

Si R n'est pas galiléen il faut ajouter au travail des forces  $W_{\text{fe}}$  et  $W_{\text{fic}}$ .

Rem : toutes les définitions et théorèmes vus dans ce chapitre se généralisent à un système de n points matériels.

# 11 – Interaction de deux points matériels

Soit un système de 2 points matériels  $M_1$  et  $M_2$  de masses  $m_1$  et  $m_2$ , étudié dans le référentiel galiléen  $R$ .

## I Energie potentielle d'interaction

### 1 – Position du problème

Soit  $\vec{r}_1 = \vec{OM}_1$  et  $\vec{r}_2 = \vec{OM}_2$ , où  $O$  est un point fixe de  $R$ . On pose  $\vec{r} = \vec{M}_1M_2 = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ , et  $r = \|\vec{r}\|$ .

Hypothèses : le système est **isolé**, et les forces traduisant l'interaction entre  $M_1$  et  $M_2$  dérivent d'une énergie potentielle, et ne dépendent que de  $r$ .  $\mathcal{E}_P$  est appelé énergie potentielle d'interaction.

En coordonnées cartésiennes,  $\vec{f}_1$   $\left( \begin{array}{l} f_{1x} = -\frac{\partial \mathcal{E}_P}{\partial x_1} \\ f_{1y} = -\frac{\partial \mathcal{E}_P}{\partial y_1} \\ f_{1z} = -\frac{\partial \mathcal{E}_P}{\partial z_1} \end{array} \right)$  où  $\vec{r}_1 = x_1 \vec{u}_x + y_1 \vec{u}_y + z_1 \vec{u}_z$ .

Ce qu'on note  $\vec{f}_1 = -\text{grad}_{M_1} \mathcal{E}_P$   $\vec{f}_2 = -\text{grad}_{M_2} \mathcal{E}_P$

On a  $f_{1x} = -\frac{\partial \mathcal{E}_P}{\partial x_1} = -\frac{\partial \mathcal{E}_P}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_1} = -\frac{\partial \mathcal{E}_P}{\partial r} \frac{x_1 - x_2}{r} = +\frac{\partial \mathcal{E}_P}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_2} = -f_{2x}$

On retrouve le principe des interactions :  $\vec{f}_1 = -\vec{f}_2$ .

### 2 – Energie mécanique du système

$d\mathcal{E}_P = -\delta W_1 - \delta W_2 = -d(\mathcal{E}_{K1} + \mathcal{E}_{K2})$  donc  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_P + \mathcal{E}_{K1} + \mathcal{E}_{K2}$  est constante.

"Dans un référentiel galiléen, l'énergie mécanique d'un système isolé pour lequel les forces d'interaction dérivent d'une énergie potentielle est constante."

### 3 – Moment cinétique

$\vec{\sigma}_O$  est constant (thmc ;  $\vec{m}_{O \text{ ext}} = \vec{0}$  car le système est isolé)

## II Problème à deux corps

### 1 – Trajectoires dans le référentiel barycentrique du système

Thrc dans  $R_{\text{gal}}$  :  $\vec{R}_{\text{ext}} = (m_1 + m_2) \vec{a}_{G/\text{gal}}$  or  $\vec{R}_{\text{ext}} = \vec{0}$  car le système est isolé donc  $R_G$  est galiléen. On travaille dans  $R_G$ .

On note  $\vec{r}_1^* = \vec{GM}_1$ ,  $\vec{r}_2^* = \vec{GM}_2$ , avec  $m_1 \vec{r}_1^* + m_2 \vec{r}_2^* = \vec{0}$ .

Donc dans  $R_G$  les trajectoires de  $M_1$  et de  $M_2$  sont homothétiques. D'autre part,

$\mathcal{E}^* = c^{te}$   $\vec{\sigma}_O^* = \vec{c}^{te}$   $\forall A$  du plan,  $\vec{\sigma}_A = \vec{\sigma}_O$ .

### 2 – Réduction du problème

PFD à  $M_1$  et à  $M_2 \Rightarrow m \frac{d^2 \vec{r}^*}{dt^2} = \vec{f}_2$ , ce qui s'interprète comme le PFD qui serait appliqué à un point matériel  $M$  de

vecteur position  $\vec{GM} = \vec{r}^* = \vec{M}_1M_2$ , de masse  $m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ , soumis à la force  $\vec{f}_2$ .  $M$  appelé "point matériel fictif", et m "masse réduite du système".

Dans  $R_G$  galiléen, l'étude du système des 2 points se ramène à l'étude du mouvement du pt matériel fictif  $M$ .

Rem : Si  $m_1 \gg m_2$ ,  $G \approx M_1$  ;  $R_G \approx$  référentiel  $m_1$ centrique ;  $M \approx M_2$ .

### 3 – Caractéristique du mouvement du point matériel fictif

$M$  a un mouvement à accélération centrale (centre =  $G$ )  $\rightarrow$  le mouvement de  $M$  est plan, et obéit à la loi des aires. Calcul de l'énergie mécanique du système : l'énergie cinétique du système est égale à l'énergie cinétique du point matériel fictif, et l'énergie mécanique du système est égale à son énergie mécanique.

Moment cinétique du système : il est égal au moment cinétique du point matériel fictif. [ demos ]

#### 4 – Mouvement du point matériel fictif

$\vec{\sigma}_G^* = m r^2 \dot{\theta} \vec{u}_z$  en coordonnées polaires.

$$\mathcal{E}^* = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \frac{\vec{\sigma}_G^{*2}}{m r^2} + \mathcal{E}_P(r) = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \mathcal{E}_{P\text{eff}}(r)$$

Les positions accessibles au point matériel sont telles que  $\mathcal{E}_{P\text{eff}}(r) \leq \mathcal{E}^*$ .

Exemple de l'interaction gravitationnelle : Si initialement,  $\mathcal{E}^* = \mathcal{E}_1 \geq 0$ , M peut s'éloigner infiniment de G. Notion d'état de diffusion # états liés. Sinon, M doit rester entre 2 cercles.

## 12 – Interactions en 1/r<sup>2</sup>

Soit un système isolé de 2 points matériels ; les forces sont de type newtonien, en 1/r<sup>2</sup>. PFD :  $m\vec{a}^* = \vec{f}_2$ .

### I Généralités

$$\vec{f}_2 = \frac{k}{r^2} \vec{u}_r \text{ où } \vec{u}_r = \frac{\vec{r}^*}{r} \vec{f}_2 \text{ dérive de } \mathcal{E}_P = \frac{k}{r} + c^{te}.$$

$$\mathcal{E}^* = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 + \frac{k}{r} = c^{te} \text{ or } \vec{\sigma}_G^* = mC = mr^2 \dot{\theta} \text{ Donc } \dot{\theta} = \frac{\vec{\sigma}_G^*}{mr^2}$$

$$\mathcal{E}^* = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \frac{\vec{\sigma}_G^{*2}}{mr^2} + \frac{k}{r} = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \mathcal{E}_{P\text{eff}}(r) \text{ où } \mathcal{E}_{P\text{eff}}(r) = \frac{1}{2} \frac{\vec{\sigma}_G^{*2}}{mr^2} + \frac{k}{r}$$

Pour l'interaction électrostatique,  $k > 0$  ou  $k < 0$ . Pour l'interaction gravitationnelle,  $k < 0$ .

Si  $k < 0$  (attraction) : états de diffusion ou états liés suivant  $\mathcal{E}^*$

Si  $k > 0$  (répulsion) : états de diffusion toujours

### II Trajectoires dans un champ de force en 1/r<sup>2</sup>

On traite le cas  $k < 0$ .

#### 1 – Nature du mouvement

(introduction du point matériel fictif). Mouvement à accélération centrale → trajectoire contenue dans le plan contenant  $\vec{G}M_0$  et  $\vec{v}_0^*$ . Loi des aires : vitesse aréolaire =  $dS/dt = C/2$

$$\text{où } C = \vec{G}M \wedge \vec{v}^* = r^2(d\theta/dt) \vec{u}_z.$$

#### 2 – Formules de Binet

Coordonnées polaires – on exprime  $\vec{v}^*$  et  $\vec{a}^*$  en fonction de 1/r et de ses dérivées par rapport à  $\theta$ , en utilisant C.

$$\begin{cases} \vec{v}^* = -C \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{r} \right) \vec{u}_r + \frac{C}{r} \vec{u}_\theta \\ \vec{a}^* = -\frac{C^2}{r^2} \left( \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right) \vec{u}_r \end{cases} \quad \text{avec } C = r^2 \dot{\theta}$$

[ demos : il suffit de calculer  $d(1/r)/d\theta$  ]

⊗ Il faut connaître ces expressions. (Centrale1999)

#### 3 – Recherche de la trajectoire

$$\vec{f}_2 = \frac{\mathcal{G} m_1 m_2}{r^2} \vec{e}_r = \frac{\mathcal{G} m M_T}{r^2} \vec{e}_r, \text{ avec } M_T = m_1 + m_2.$$

PFD à M dans  $R_G \Rightarrow \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = \frac{\mathcal{G} M_T}{C^2}$  est une équation différentielle linéaire du 2<sup>e</sup> ordre à coefficients constants,

avec 2<sup>e</sup> membre constant ; la variable est  $\theta$  et la fonction est  $(1/r)$ .

$$\text{D'où } \frac{1}{r} = A \cos(\theta - \alpha) + \frac{\mathcal{G} M_T}{C^2} = \frac{e \cos(\theta - \alpha) + 1}{p}$$

$$\text{où } \boxed{p = \frac{C^2}{\mathcal{G} M_T}} \text{ et } e = Ap$$

$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \alpha)}$  est l'équation polaire d'une conique de paramètre p, d'excentricité e, dont l'un des foyers est occupé par G, origine des coordonnées polaires.

$\alpha$  est l'angle que fait l'axe de la conique avec l'axe polaire Gx.

e permet de déterminer le type de la conique.

#### 4 – Emploi du vecteur excentricité (HP)

On écrit :  $m \vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \frac{C}{r^2} \frac{d\vec{v}}{d\theta} = -\frac{\mathcal{G} m M_T}{r^2} \vec{e}_r$ , donc  $\frac{d\vec{v}}{d\theta} = \frac{\mathcal{G} M_T}{C} \frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta}$ .

D'où  $\vec{v} = \frac{C}{p}(\vec{e}_\theta + \vec{e})$  avec  $\vec{e}$  constant (déterminé par les conditions initiales).

$\vec{v} \cdot \vec{e}_\theta = r \dot{\theta} = \frac{C}{r} = \frac{C}{p}(1 + e \cos(\theta - \alpha))$ . On retrouve bien l'équation de la conique.

Ce vecteur a pour norme l'excentricité de la conique et a une direction orthogonale à son axe focal.

#### 5 – Troisième loi de Kepler

Sur les mesures de Tycho Brahé, Kepler a créé 3 lois (1604) :

1<sup>e</sup> loi : "les trajectoires des planètes sont des ellipses dont le soleil occupe l'un des foyers."

2<sup>e</sup> loi : "le rayon vecteur issu du soleil balaie des aires égales pendant des laps de temps égaux." (loi des aires)

3<sup>e</sup> loi : "les carrés des temps de révolution sont proportionnels aux cubes des demi-grands axes."

DEMO :  $dS/dt = C/2 \rightarrow S = CT/2 = \pi ab...$

$$4 \pi^2 a^3 = \mathcal{G} M_T T^2$$

On peut retrouver rapidement la 3<sup>e</sup> loi de Kepler avec le cas particulier du mouvement circulaire...

#### 6 – Expression générale de l'énergie mécanique

##### a – Calcul

$\mathcal{E}^* = \frac{1}{2} mv^2 - \mathcal{G} m M_T / r$  or  $r = p/(1+e \cos\theta)$ , Binet...

$$\text{d'où } \mathcal{E}^* = \frac{\mathcal{G} m M_T (e^2 - 1)}{2p}$$

Rem :  $m M_T = m_1 m_2$ .

##### b – Signe de $\mathcal{E}^*$ et trajectoire

On sait que les trajectoires sont des coniques. Le signe de  $\mathcal{E}^*$  donne le type de la conique.

$\mathcal{E}^* > 0 \rightarrow$  Hyperbole       $\mathcal{E}^* = 0 \rightarrow$  Parabole       $\mathcal{E}^* < 0 \rightarrow$  Ellipse

##### c – Autres expressions de $\mathcal{E}^*$ dans le cas d'un orbite elliptique

$\mathcal{E}^* = -\frac{\mathcal{G} m M_T}{2a} < 0$ .  $\mathcal{E}$  et T ne dépendent que de a.

On peut le retrouver en traitant le cas particulier du mouvement circulaire uniforme. (PFD)

### III Notions utiles en physique sur les coniques

#### 1 – Généralités

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \alpha)} \text{ où } e \geq 0 \quad \begin{array}{l} \text{si } e = 0, \text{ c'est un cercle} \\ \text{si } e = 1, \text{ c'est une parabole} \end{array}$$

si  $e \in ]0, 1[$ , c'est une ellipse  
si  $e > 1$ , c'est une hyperbole.

#### 3 – Cas de l'ellipse (s, t) = (2, 0)

$$\text{Ellipse} = \{ P \in \text{plan}, d(P, \text{Foyer}_1) + d(P, \text{Foyer}_2) = 2a \}$$

a : demi grand axe  
b : demi petit axe  
c : demi distance des foyers

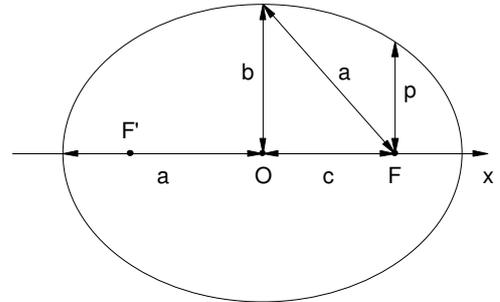
$$e = \frac{c}{a} \quad p = \frac{b^2}{a} \quad a = \frac{p}{1 - e^2}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad S = \pi a b$$

Périgée means r minimal ; Apogée means r maximal.  
F et F' sont des centres attracteurs.

$$\text{Cartésien : } x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1 \quad \text{si } \alpha = 0$$

La tangente en M est bissectrice extérieure de (MF) et (MF').  
On peut trouver F et F' avec a.



#### 4 – Cas de l'hyperbole (s, t) = (1, 1)

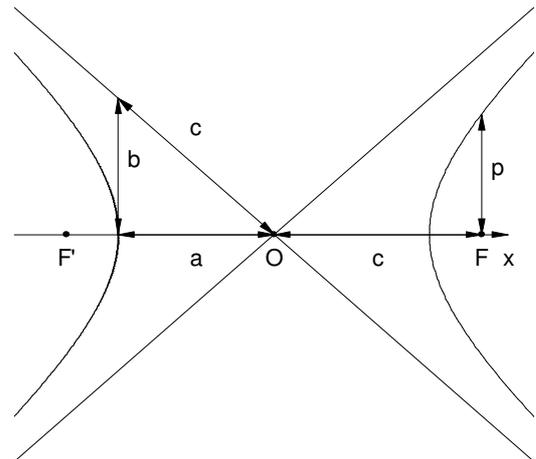
$$H = \{ P \in \text{plan} / |d(P, \text{Foyer}_1) - d(P, \text{Foyer}_2)| = 2a \}$$

a : 1/2 distance minimale entre les points des 2 branches  
b : 1/2 distance verticale entre les 2 asymptotes au niveau d'un sommet (si  $\alpha = 0$ )  
c : demi distance des foyers

$$\text{Cartésien : } x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$$

$$e = \frac{c}{a} \quad p = \frac{b^2}{a} \quad a^2 + b^2 = c^2$$

L'un des foyers est attracteur, l'autre est répulseur.  
On peut trouver F et F' avec c.  
La tangente en M est bissectrice intérieure à (MF) et (MF')



#### 5 – Cas de la parabole (s, t) = (1, 0)

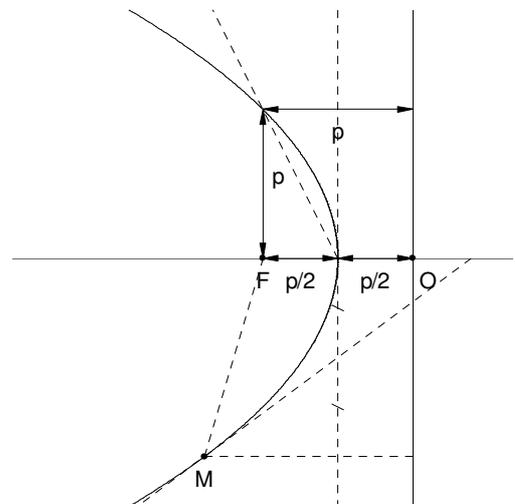
$$\text{Parabole} = \{ M \in \text{plan} / d(M, \text{Foyer}) = d(M, \text{axe}) \}$$

$$\text{Cartésien : } y^2 = -2 p (x - p/2)$$

$$r_{\text{minimal}} = 1/2 p, \text{ pour } \theta = 0 \text{ (sommet de la parabole).}$$

On peut trouver F avec la droite de pente -2 passant par le sommet.

La tangente en M est la bissectrice des droites (FM) et (Mx).



## IV Application aux mouvements des planètes & satellites

### 1 – Cas général

Etude du mouvement d'une planète autour du Soleil → étude du système { Soleil, Planète } supposé isolé ; les points matériels sont les centres d'inertie affectés des masses des astres.

Hyp : Les astres ont une répartition de masse à symétrie sphérique. On néglige l'influence des autres planètes etc.

### 2 – Utilisation de la 3<sup>e</sup> loi de Kepler

$4\pi^2 a^3 = \mathcal{G} M_i T^2$  → On peut trouver la masse d'un astre à partir des caractéristiques du mouvement de l'un de ses satellites. Ex : Masse du soleil =  $2,0 \cdot 10^{30}$  kg.

### 3 – Rôle des autres planètes

L'étude est en réalité beaucoup plus compliquée, les autres planètes ayant une influence qui n'est pas toujours négligeable. Il faudrait en principe étudier un système de 10 points matériels. A partir de 3 points matériels, on ne sait le faire que de manière numérique. C'est en faisant ce genre de traitement qu'on a découvert Neptune (Leverrier) puis Pluton, qui perturbaient respectivement les trajectoires d'Uranus et de Neptune.

## V Les satellites artificiels de la Terre

Hyp : La Terre est à répartition de masse à symétrie sphérique.  $\mathcal{G} M_T = g_0 R_T^2$  ( $\mathcal{G} M_{\text{Terre}} \approx M_{\text{Total}}$ )  
 $R_G$  est galiléen car le système est supposé isolé.  $M_T \gg m \rightarrow R_G \sim$  référentiel géocentrique, qui est donc galiléen.

### 1 – Satellisation sur une orbite circulaire

Energie mécanique du satellite sur sa trajectoire (dans réf. géoc) :  $\mathcal{E} = -\mathcal{G} m M_T / 2r$

Energie mécanique du satellite sur la Terre :  $\mathcal{E} = -\mathcal{G} m M_T / R_T + \frac{1}{2} m R_T^2 \omega^2 \cos^2 \lambda$ .

L'énergie à fournir est minimale lorsque  $\lambda \sim 0 \rightarrow$  bases de lancement proches de l'équateur.

Cas d'un satellite circulaire de basse altitude ( $r = R_T$ ).  $v_0 = \sqrt{g_0 R_T} = 7,92$  km/s.  $T = 1$  h 24 min.

C'est la 1<sup>ère</sup> vitesse cosmique. [ Kepler<sub>3</sub> ]

Satellite géostationnaire : il est nécessairement dans le plan de l'équateur ; son altitude est imposée :

$$h = \sqrt[3]{(\mathcal{G} M_T T^2 / 4\pi^2) - R_T} = 36\,000 \text{ km où } T = 1 \text{ jour.}$$

### 2 – Orbite elliptique

Le centre de la Terre T occupe l'un des foyers de l'ellipse.

Le périhélie et l'apogée sont les 2 seuls points de l'ellipse où  $\vec{v}$  est orthogonal à  $\vec{TM}$ .

$$C = r^2(d\theta/dt) = r_A v_A = r_P v_P.$$

$$\mathcal{E} = -\mathcal{G} m M_T / 2a \Rightarrow v^2 = 2 \mathcal{G} M_T (1/r - 1/2a) \text{ est donc indépendant de } m.$$

### 3 – Vitesse de libération

Quelle vitesse faut-il communiquer à un objet par rapport au référentiel géocentrique pour qu'il échappe à l'attraction gravitationnelle de la Terre :  $v_\ell = \sqrt{2 g_0 R_T} = 11,2$  km.s<sup>-1</sup> : vitesse de libération, ou 2<sup>e</sup> vitesse cosmique.

( il faut  $\mathcal{E}_K > |\mathcal{E}_P|$  )

### 4 – Problème de la satellisation

A quelles conditions pourrait-on satelliser un objet de masse m à partir du sol de la Terre ?

Soit  $v_0$  la 1<sup>e</sup> vitesse cosmique.  $v_i < v_0 \Rightarrow$  crash [  $\sim d$  ]  $v_i \geq v_\ell \Rightarrow$  satellisation impossible [  $\sim d$  ]

Concl : Il faut  $v_0 \leq v_i < v_\ell$ ,  $\mathcal{E} < 0 \rightarrow$  ellipse,  $a > R_T$ . Et il faut en plus que  $\vec{v}_i$  soit orthogonal à  $\vec{TM}_i$ . [ sinon périhélie crash ]

Remarque : en pratique, on ne fait pas comme ça.

### 5 – Conséquences des frottements sur l'atmosphère

$$\mathcal{E}_P = -2\mathcal{E}_K = -\mathcal{G} m M_T / r ; \mathcal{E} = -\mathcal{E}_K = \mathcal{E}_P / 2 \text{ (On exprime tout en fonction de } r \text{ uniquement)}$$

$\Delta \mathcal{E} < 0$  ;  $\mathcal{E}_K$  augmente, ce qui peut paraître paradoxal mais en valeur absolue,  $\Delta \mathcal{E}_P$  est 2 fois plus grande que  $\Delta \mathcal{E}_K$ .

## VI Cas d'une interaction répulsive en $1/r^2$

Mouvement plan ; obéit à la loi des aires. PFD  $\Rightarrow$  trajectoire conique.  $\vec{f}_2$  dérive d'une  $\mathcal{E}_P = k/r$ .

La trajectoire de M est une hyperbole dont l'un des foyers est occupé par G (car  $\mathcal{E} > 0$ ).

Le point matériel fictif de masse m est initialement à l'infini avec la vitesse  $\vec{v}_0$ , qui est portée par une droite (D), à la distance b du point G : c'est le paramètre d'impact.

Au sommet S de l'hyperbole, r prend sa valeur minimale  $r_m$ . Soit  $\varphi = (\vec{v}_0, \vec{v}_\infty)$ . On cherche  $r_m$  et  $\varphi$ .

Conservation de l'énergie mécanique et du moment cinétique total

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} m v^2 + k/r = \frac{1}{2} m v_0^2 \quad \text{et} \quad \|\vec{\sigma}_G\| = \sigma_0 = m v_0 b = m r_m v_S.$$

$$\rightarrow v_S = b v_0 / r_m.$$

$$\rightarrow r_m = k / m v_0^2 + \sqrt{(k^2 / m^2 v_0^4 + b^2)}$$

b n'est pas accessible à la mesure, mais  $\varphi$  l'est.

La racine négative de l'équation pour trouver  $r_m$  correspond au sommet S' de l'autre branche d'hyperbole.

$$\rightarrow b = k \tan(\varphi/2) / m v_0^2 \quad [ \text{Géométrie dans l'hyperbole} ]$$

$$\rightarrow r_m = (k / m v_0^2) \times (1 + 1/\sin(\varphi/2))$$

Expérience de Rutherford : mesure de la taille du noyau d'un atome d'or :  $\sim 46 \cdot 10^{-15} \text{ m}$ .

## 13 – Choc de 2 points

### I Définition du choc

Choc = discontinuité dans les vitesses lors de la traversée d'une petite région de l'espace où les 2 points matériels se trouvent simultanément et interagissent fortement (→ zone du choc)

Niveau macroscopique : l'interaction est due aux forces de contact qui apparaissent si les 2 corps entrent en collision.

Niveau microscopique : il peut y avoir interaction sans contact (cf chapitre précédent).

Hyp : les points matériels interagissent seulement dans la zone du choc.

$$\mathcal{E}_P \text{ interaction avant le choc} = \mathcal{E}_P \text{ interaction après le choc} = 0.$$

Connaissant  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  on cherche  $\vec{v}'_1$  et  $\vec{v}'_2$ . Mais résultats partiels car il manque des équations.

### II Propriétés des chocs

#### 1 – Conservation de la quantité de mouvement totale du système au cours du choc

Si le système des 2 points matériels est isolé  $\Rightarrow$  thrc ;  $d\vec{P}/dt = \vec{R}_{\text{ext}} = \vec{0} \rightarrow \vec{P} = \boxed{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2}$ .

Si le système n'est pas isolé,  $\Delta\vec{P} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{R}_{\text{ext}} dt$ , mais dans le modèle du choc,  $t_2 - t_1 \rightarrow 0$  donc  $\Delta\vec{P} \rightarrow 0$ .

#### 2 – Conservation de l'énergie

Hyp : l'énergie mécanique totale du système reste constante.

Dans le modèle du choc,  $\mathcal{E}_P \text{ avant} = \mathcal{E}_P \text{ après} = 0$ , et la région du choc a une étendue très faible  $\Rightarrow \mathcal{E}_P = 0$ .

Alors,  $\mathcal{E}_K \text{ avant} = \mathcal{E}_K \text{ après} \Rightarrow \boxed{m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 v'^2_1 + m_2 v'^2_2}$ .

Un choc dans lequel l'énergie cinétique totale est conservée est dit élastique.

Conditions de validité de la conservation de l'énergie :

niveau macroscopique : pas de frottement ni de déformations

niveau microscopique : pas de changements de niveau d'énergie (atome)

Un choc dans lequel l'énergie n'est pas conservée est dit inélastique.

Ex : choc avec déformations, réactions chimiques avec dégagement d'énergie...

#### 3 – Recherche des vitesses après le choc

Cas d'un choc élastique

Espace 3D : 6 inconnues ; 4 équations  $\rightarrow$  nécessité de choisir 2 paramètres

Plan 2D : 4 inconnues ; 3 équations  $\rightarrow$  nécessité de choisir un paramètre

Droite 1D : 2 inconnues ; 2 équations  $\rightarrow$  solution unique

### III Exemples de choc

#### 1 – Choc élastique direct, ou frontal

Les vitesses avant et après le choc sont portées par une même droite.

Conservation de la résultante cinétique et de l'énergie cinétique  $\Rightarrow \vec{v}_1 + \vec{v}'_1 = \vec{v}_2 + \vec{v}'_2$ .

$$\vec{v}'_1 = \frac{(m_1 - m_2) \vec{v}_1 + 2 m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} \text{ et } \vec{v}'_2 = \frac{(m_2 - m_1) \vec{v}_2 + 2 m_1 \vec{v}_1}{m_1 + m_2} \quad [ \text{demo} ]$$

Cas particuliers :

$m_1 = m_2, \vec{v}_2 = 0 : \vec{v}'_1 = 0 ; \vec{v}'_2 = \vec{v}_1$ . Les points matériels échangent leurs vitesses.

$m_1 = m_2, \vec{v}_2 = -\vec{v}_1 : \vec{v}'_1 = -\vec{v}_1 ; \vec{v}'_2 = -\vec{v}_2$ . Les points matériels repartent en sens inverse.

#### 2 – Choc inélastique direct, ou frontal

On introduit un coefficient de restitution  $e$  qui relie les vitesses relatives des 2 points matériels avant le choc et après le choc :  $\vec{v}'_2 - \vec{v}'_1 = -e (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$  où  $e \in [0, 1[$

La valeur  $e = 1$  correspond au choc élastique.

$$\vec{v}'_1 = \frac{(m_1 - m_2 e) \vec{v}_1 + (1 + e) m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} \text{ et } \vec{v}'_2 = \frac{(m_2 - m_1 e) \vec{v}_2 + (1 + e) m_1 \vec{v}_1}{m_1 + m_2}$$

#### 3 – Cas du choc mou

Après le choc, les 2 points matériels n'en forment plus qu'un, de masse  $m_1 + m_2$ .

$$\vec{v}' = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} \quad \text{C'est le cas du choc inélastique avec } e = 0.$$

$\mathcal{E}_K \text{ après} < \mathcal{E}_K \text{ avant}$  [ demo calculs ]

#### 4 – Choc élastique dans le plan

Un point matériel de masse  $m_1$ , de vitesse  $\vec{v}_1$ , vient heurter un point matériel de masse  $m_2$ , initialement immobile. On suppose le choc élastique, et que les trajectoires avant et après le choc sont rectilignes.

4 inconnues et 3 équations. On choisit comme paramètre  $\theta_2 = (\vec{v}'_2, \vec{v}_1)$ ; on peut exprimer  $v'_1, v'_2, \theta_1 = (\vec{v}'_1, \vec{v}_1)$  en

fonction des données et de  $\theta_2$ . 
$$v'_2 = \frac{2 m_1 v_1 \cos \theta_2}{m_1 + m_2} \quad \text{[ demo ]}$$

Cas particulier où  $m_1 = m_2$  : alors  $\vec{v}'_1 \cdot \vec{v}'_2 = 0$ .

#### 5 – Choc élastique sur une paroi plane

Un point matériel de masse  $m$ , de vitesse  $\vec{v}_1$ , vient percuter une paroi plane. Hyp : choc élastique.

Modèle de la paroi :  $M \rightarrow +\infty$  et  $\vec{v}_2 = \vec{0}$ .

$\Delta \vec{p} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$  ne tend pas vers 0  $\Rightarrow \vec{F}$  très intense.

Pas de frottement  $\Rightarrow \vec{F}$  orthogonale à la paroi.  $\vec{F} = F_x \vec{u}_x$  donc  $p_y$  et  $p_z$  se conservent.

On a donc  $p'_{1x} = -p_{1x}$ .  $\Delta \vec{p} = -2 p_{1x} \vec{u}_x$ .

Cas particulier :  $\vec{p}'_1 = \vec{p}'_{1x} \vec{u}_x + \vec{p}'_{1y} \vec{u}_y$ . Symétrie.

Remarque : on peut retrouver  $p'_{1x} = -p_{1x}$  en utilisant les résultats du choc frontal élastique :

$$\vec{v}'_1 = -\vec{v}_1 \quad \text{et} \quad \vec{v}_2 = \vec{0}.$$