

# [ MPSI – ELECTROMAGNETISME ]

## Sommaire

[ MPSI – ELECTROMAGNETISME ] .....	1
<b>ELECTRODYNAMIQUE.....</b>	<b>3</b>
1 – COMPLEMENTS MATHEMATIQUES.....	3
2 – CONDUCTIVITE – LOI D'OHM.....	4
3 – DIPOLES ELECTRODYNAMIQUES.....	6
4 – RESEAUX LINEAIRES EN REGIME CONTINU .....	8
5 – DIPOLES PASSIFS RC, RL, RLC EN REGIME VARIABLE.....	10
6 – DIPOLES LINEAIRES EN REGIME SINUSOÏDAL FORCE.....	12
7 – PUISSANCE EN REGIME SINUSOÏDAL FORCE .....	14
8 – REponse FREQUENTIELLE D'UN CIRCUIT R L C ET TRANSFERT D'UN SYSTEME LINEAIRE.....	15
9 – EXEMPLES DE REponses FREQUENTIELLES DE SYSTEMES LINEAIRES .....	17
10 – AMPLIFICATEUR OPERATIONNEL .....	20
11 – MONTAGES DE BASE AVEC AMPLIFICATEUR OPERATIONNEL .....	22
<b>ELECTROSTATIQUE.....</b>	<b>25</b>
1 – CHAMP ELECTROSTATIQUE .....	25
2 – POTENTIEL ELECTROSTATIQUE .....	27
3 – FLUX DES CHAMPS ELECTROSTATIQUES, THEOREME DE GAUSS .....	29
4 – CALCULS DE CHAMPS ET DE POTENTIELS ELECTROSTATIQUES.....	31
5 – LE DIPOLE ELECTROSTATIQUE .....	31
<b>MAGNETOSTATIQUE .....</b>	<b>33</b>
1 – LE CHAMP MAGNETOSTATIQUE .....	33
2 – TOPOGRAPHIE DU CHAMP MAGNETIQUE.....	35
3 – CIRCULATION ET FLUX DU CHAMP MAGNETOSTATIQUE .....	36
4 – CHAMP MAGNETOSTATIQUE DE QUELQUES DISTRIB. DE COURANTS .....	36
5 – DIPOLE MAGNETIQUE.....	37
<b>OPTIQUE GEOMETRIQUE.....</b>	<b>38</b>
1 – PROPAGATION DE LA LUMIERE .....	38
2 – LOIS DE SNELL–DESCARTES.....	40
3 – STIGMATISME ET APLANETISME .....	42
4 – LENTILLES MINCES SPHERIQUES .....	44

## Système International d'unités

$$\text{Temps} \sim RC \sim \frac{L}{R} \sim \sqrt{LC}$$

$$\text{Impédance} \sim L \omega \sim \frac{1}{C \omega}$$

$$I \sim RC \omega \sim LC \omega^2$$

## Notes de TP

### ○ Oscilloscope

Slope et level : lorsque le signal a la pente <slope> et atteint le potentiel <level>, l'affichage a lieu.

DC : signal brut ; AC : signal sans composante continue (Moyen mnémotechnique : Ablation de la C<sub>onstante</sub>)

Pour l'enregistrement d'un phénomène non périodique (oscillo. numérique), se placer en mode single et faire run (régler level et slope).

Pour comparer deux fréquences, on peut utiliser le mode XY.

Pour mesurer un déphasage, on peut le lire à l'écran ou le voir en mode XY :  $\sin \phi = AB/CD$  (sur la verticale).

Quand on a fini le TP, pour activer Tetris : touche printscreen puis 2–3.

○ **Mesure de fréquence** : on peut tracer le signal à mesurer en X avec un sinus de GBF en Y.

- **Boîtes AOIP** : le coin sans plot est à mettre en bas à gauche. Utiliser les 2 plots du haut. La précision des résistances avec ces boîtes est bien supérieure à celle des composants usuels.
- **Amplitude** =  $\frac{1}{2}$  grandeur pic à pic.
- **Conflit de masse** : utiliser un transformateur d'isolement. Mais en général, il vaut mieux l'éviter, en changeant de montage.
- ☒ Ne pas mesurer une résistance à l'ohmmètre dans un circuit sous tension. (Centrale2000)

# ELECTROCINETIQUE

## 1 – Compléments mathématiques

### I Dérivée et différentielle

#### 1 – Dérivée

#### 2 – Différentielle

$dy = f'(x) \cdot \delta x$   
 $\delta y = f(x+\delta x) - f(x)$   
 quand  $\delta x \rightarrow 0$ ,  $\delta y \rightarrow dy$

#### 3 – Notation de la dérivée

$\delta x = dx$  (d'après l'étude de la fonction  $x$ )  
 $f'(x) = dy / dx$ .

#### 4 – Applications

1. Calcul de la variation d'une fonction pour une "faible" variation de la variable (Force de gravitation)
2. Calcul du travail de la tension d'un ressort

### II Equations différentielles

Equations différentielles :

$y' + a y = 0$                       alors  $y = K \cdot e^{-a x}$   
 $y' \cdot f(y) = g(x)$                 alors  $f(y) = g(x)$                 (équation différentielle à variable séparable)  
 $y'' + a y' + b y = 0$                  $\Delta = a^2 - 4b$   
     $\Delta > 0$      $y = K \cdot e^{r_1 x} + Q \cdot e^{r_2 x}$   
     $\Delta = 0$      $y = (K + Q x) \cdot e^{r x}$   
     $\Delta < 0$      $y = e^{\lambda x} (A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)) = C \cdot e^{\lambda x} \cos(\omega x + \varphi)$   
    avec  $r = \lambda \pm j \omega$

Second membre :

Constante ou polynôme     $\rightarrow y$  polynôme (attention au degré)  
 $a \cos(c x) + b \sin(c x)$      $\rightarrow y = \alpha \cos(\chi x) + \beta \sin(\chi x)$  si  $\chi$  n'est pas racine de l'équation caractéristique  
     $\rightarrow y = x(\alpha \cos(\chi x) + \beta \sin(\chi x))$  sinon  
 $k e^{a x}$                                  $\rightarrow y = k e^{a x}$  si  $a$  n'est pas racine de l'équation caractéristique  
     $\rightarrow y = k x e^{a x}$  si  $a$  est racine simple,  $k x^2 e^{a x}$  si  $a$  est racine double

### III Dérivée logarithmique

Soit la relation  $\prod_{i=0}^n a_i^{\alpha_i} = K$ . Sa dérivée logarithmique est  $\sum_{k=0}^n \alpha_k \frac{da_k}{a_k} = 0$ .

Pour la voir apparaître dans le cas général, il faut composer par  $\ln$  puis dériver.

$$\text{Ex : } Q = \frac{27 x^4}{4 (1-x^2)^2} \left(\frac{P}{P_0}\right)^2 \frac{dQ}{Q} = 4 \frac{dx}{x} + 4 x \frac{dx}{1-x^2} + 2 \frac{dP}{P}$$

### IV Argument d'un complexe

$z = a + i b \in \mathbb{C}$ .  $\text{Arg } z = \text{Arctan}(y/x)$     si  $x > 0$

$\text{Arctan}(y/x) + \pi$  si  $x < 0$

Si  $|z| = 1$  et  $z \neq -1$ ,  $\text{Arg } z = 2 \text{Arctan}(y/(1+x))$

## 2 – Conductivité – Loi d'Ohm

### I Conducteurs et charges électriques

#### 1 – Rappels

Conducteur = corps à l'intérieur duquel des charges électriques peuvent se déplacer librement, sous l'action d'une force, si petite soit-elle. Il y a conservation de la charge totale.

#### 2 – Déplacements des porteurs de charge

En l'absence de champ électrique, la moyenne des mouvements désordonnés des porteurs de charges mobiles est nulle. Dans le cas contraire, ils sont entraînés dans le sens du champ pour les porteurs positifs, et en sens inverse pour les porteurs négatifs.

⊗ Les électrons ne se déplacent pas à la vitesse de la lumière dans les conducteurs.  $v \sim 1 \text{ m/s}$ . (X2001)

#### 3 – Densité volumique de charge mobile

$\rho_m = dq / d\tau$  où  $dq$  est la charge contenue dans l'espace  $d\tau$ .

Ordre de grandeur : Pour le cuivre,  $\rho_m = -1.4 \cdot 10^{-10} \text{ C.m}^{-3}$ .

$n_m = dN / d\tau$  où  $N$  est le nombre de charges mobiles contenues dans l'espace  $d\tau$ .

Pour un métal,  $\rho_m = -e \cdot n_m$

### II Courant électrique

#### 1 – Sens du courant et orientation d'un conducteur

Par convention, le sens du courant est le sens dans lequel se déplaceraient des charges positives. Orienter un conducteur c'est choisir arbitrairement un sens positif sur celui-ci.

#### 2 – Intensité du courant

$i = dq / dt$  où  $dq$  est la charge qui traverse une section du conducteur durant  $dt$  dans le sens positif d'orientation.  $i$  donne deux renseignements : le sens du courant et la quantité de charges qui traversent une section par unité de temps. Quand  $i$  ne dépend pas de  $t$ , le courant est dit continu.

#### 3 – Loi des nœuds

Un nœud  $N$  est un point du circuit relié au moins 3 à conducteurs.

Loi des nœuds :  $\sum \epsilon_k i_k = 0$  [ demo ]

$\epsilon_k = 1$  si l'orientation de la branche considérée arrive sur le nœud ; sinon  $\epsilon_k = -1$ ;

#### 4 – Vecteur densité de courant

$di = \rho_m \vec{v} d\vec{S}$ . Résulte de la géométrie [ demo ]

$di = \vec{j} d\vec{S}$  Définition du vecteur densité de courant

$\vec{j} = \sum \rho_{m i} \vec{v}_i$ . Expression du vecteur densité de courant

Le vecteur densité de courant  $\vec{j}$  est toujours dans le sens du courant.

AN : Cuivre,  $v = 0.07 \text{ mm / s}$ .

### III Conductivité – Loi d'Ohm locale

#### 1 – Vitesse limite

$V_{lim} = q E / k = \mu E$  où  $|\mu|$  : mobilité du porteur de charge considéré ( $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}$ ) [ demo ]

$\vec{j} = \sum \rho_{m i} \mu_i \vec{E} = \sigma \vec{E}$  où  $\sigma = \sum \rho_{m i} \mu_i$  : conductivité du conducteur ( $\Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ )

#### 2 – Forme locale de la loi d'Ohm

Un conducteur obéit à la loi d'Ohm si  $\mu_i$  sont indépendants du champ, c'est à dire si  $\sigma_i$  indépendants du champ.

### III Résistance

#### 1 – Cas d'un conducteur ohmique cylindrique

$$E = \frac{U_{AB}}{\ell} \text{ donc } U_{AB} = E \cdot \ell = \frac{j \ell}{\sigma} = \frac{i \ell}{\sigma S}$$

$$\text{On a : } \boxed{R = \frac{\ell}{\sigma S}}$$

[ demo ]

On note  $\rho = 1/\sigma$  : résistivité du conducteur, en  $\Omega \cdot m$

R = résistance du conducteur, en  $\Omega$

#### 2 – Généralisation

Pour tout conducteur ohmique, on a  $U_{AB} = R \cdot i_{AB}$ , ou  $i_{AB} = U_{AB} / R = G \cdot U_{AB}$ .

G : conductance du conducteur ohmique (Siemens)

#### 3 – Association de conducteurs ohmiques

##### a – Association en série

Des dipôles sont branchés en série  $\Leftrightarrow$  ils sont parcourus par le même courant.

Des conducteurs ohmiques en série sont équivalents à un conducteur ohmique de résistance  $\sum R_i$ . [ demo ]

##### b – Association en parallèle

Des dipôles sont branchés en parallèle  $\Leftrightarrow$  ils sont soumis à la même tension.

Des conducteurs ohmiques en parallèle sont équivalents à un conducteur ohmique de conductance  $\sum G_i$ . [ demo ]

Pour deux conducteurs ohmiques en parallèle, on a :  $R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ .

#### 4 – Calcul de la résistance équivalente

Principe : utiliser les symétries du réseau. Lorsque le réseau présente un plan de symétrie, aucun courant ne peut traverser ce plan. Les points symétriques au plan sont au même potentiel. On peut donc les relier. De plus, tous les points d'un plan d'antisymétrie sont au même potentiel.

Transformation d'un triangle en étoile : alors  $R_1 = \frac{R_{12} \cdot R_{13}}{\sum R_i}$

⊗ "Notons cependant que la recherche de circuits équivalents est facilitée lorsque l'on permet à son imagination de déplacer les points de contact du schéma initial, à condition de conserver la topologie." (X2000)

## 3 – Dipôles électrocinétiques

### I Approximation des régimes quasi permanents (ARQP)

La transmission de l'information dans les conducteurs se fait à la vitesse de la lumière, donc les variations de l'intensité en un point ne se répercutent pas instantanément en un autre point. L'intensité du courant dépend donc du temps et du point du circuit considéré. Si on peut négliger le temps que met l'information pour aller d'un point à un autre, devant un temps caractéristique du circuit (la période, la constante de temps par exemple), on pourra considérer que l'intensité du courant est la même en tout point du circuit à chaque instant. C'est l'ARQP.

Ex : Pour  $f = 50$  Hz, il faut longueur  $\ll 6\,000$  km. Pour  $f = 50$  MHz, il faut longueur  $\ll 6$  m.

### II Dipôles électrocinétiques

#### 1 – Notion de dipôle électrocinétique

Un dipôle électrocinétique = système électrique relié à l'extérieur par deux bornes, ou pôles. L'orientation de la tension et de l'intensité sont indépendantes l'une de l'autre.

- "Convention récepteur" si flèches dans le sens inverse.
- "Convention générateur" si flèches dans le même sens.

#### 2 – Caractéristique des dipôles

- Conducteur ohmique :  $i = u / r$
- Résistance dépendant de la tension = Varistance = VDR :  $i \sim k \cdot u^3$ .

On appelle : résistance statique :  $r_s = \frac{u}{i}$       résistance dynamique :  $r_d = \frac{du}{di}$

- Diode
- Diode idéale
- Diode Zéner (ou à effet de claquage).  $u_z < 0 < u_{seuil} < |u_z|$

Toutes ces caractéristiques passent par l'origine : les dipôles correspondants sont dits passifs.

Quand les caractéristiques sont symétriques par rapport à l'origine, les dipôles sont symétriques. Leur fonctionnement est inchangé lorsqu'on permute les bornes.

### III Puissance électrocinétique reçue par un dipôle

La charge  $dq = i_{AB} \cdot dt$  rentre et sort du dipôle pendant la durée  $dt$ .

Il reçoit donc  $\delta W = dq \cdot V_A - dq \cdot V_B = dq \cdot U_{AB} = i_{AB} \cdot U_{AB} \cdot dt$

La puissance électrocinétique reçue par le dipôle est donc  $\mathcal{P} = \delta W / dt = U_{AB} \cdot i_{AB}$ .

$\mathcal{P} > 0 \Leftrightarrow$  Le dipôle reçoit effectivement de la puissance.

### IV Conducteur ohmique

#### 1 – Effet joule

Le conducteur ohmique reçoit la puissance  $P = U I$

$P = R i^2 = U^2 / R$  ;  $P > 0$  donc il a toujours un comportement récepteur.

Toute la puissance électrique reçue est transformée en chaleur par effet joule.

#### 2 – Association

##### a – En série : diviseur de tension

$$u_i = \frac{R_i}{\sum_j R_j} U \quad [ \text{demo} ]$$

Attention, il ne faut bien vérifier que ces dipôles sont en série (traversés par le même courant).

##### b – En parallèle : diviseur d'intensité

$$i_i = \frac{G_i}{\sum_j G_j} I \quad [ \text{demo} ]$$

## V Sources de tension et de courant

### 1 – Sources de tension

#### a – idéales

La tension aux bornes d'une source idéale de tension est constante et indépendante de l'intensité du courant. Une source idéale de tension est caractérisée par sa force électromotrice  $e$ .

#### b – réelles : modèle de Thévenin d'une source de tension linéarisable

$$U_{AB} = R \cdot i_{AB} - e$$

$e$  est la tension à vide du générateur, et  $R$  sa résistance interne.

$i_0 = e / R$  est l'intensité de court-circuit.

On peut modéliser une source réelle de tension par l'association en série d'une source idéale de tension, de force électromotrice  $e$  et d'un conducteur ohmique de résistance égale à la résistance interne du générateur.

### 2 – Sources de courant

#### a – idéales

Une source idéale de courant débite un courant d'intensité constante,  $\eta$ , indépendante du reste du circuit.  $\eta$  est appelé courant électromoteur.

#### b – réelles : modèle de Newton d'une source de courant linéarisable

$$i_{AB} = \eta + U_{AB} / R$$

On peut modéliser une source réelle de courant par l'association en parallèle d'une source idéale de courant, de courant électromoteur  $\eta$ , et d'un conducteur ohmique de résistance égale à la résistance interne du générateur.

### 3 – Conclusion

On constate qu'une source réelle de courant et une source réelle de tension sont deux représentations d'une même réalité physique. Il y a équivalence entre les deux représentations (si  $\eta = e / R = i_0$ )

## VI Association de dipôles

Problème : déterminer l'intensité du courant qui circulerait dans un circuit fermé, et déterminer si elle est admissible par les dipôles reliés entre eux.

Méthode : tracer les caractéristiques des dipôles sur un même graphique, et si elles ont un point d'intersection, on peut les brancher. Ce point d'intersection s'appelle le point de fonctionnement du circuit. Ses coordonnées sont les valeurs de  $U_{AB}$  et  $i$  que l'on pourra mesurer lorsqu'on aura fermé l'interrupteur.

## 4 – Réseaux linéaires en régime continu

### I Définitions

Réseau électrique = Circuit électrique = ensemble de dipôles électrocinétiques reliés entre eux par des conducteurs filiforme de résistance négligeable, les fils de connexion.

Nœud = point du réseau relié à au moins 3 conducteurs.

Branche = ensemble de dipôles électrocinétiques branchés en série entre deux nœuds consécutifs.

Maille = ensemble de branches formant une boucle fermée ne passant qu'une fois par un nœud donné.

Régime continu : les tensions et les intensités sont des grandeurs indépendantes du temps.

Réseau "linéaire en régime continu" = réseau constitué uniquement de dipôles "linéaires en régime continu", c'est à dire dont la caractéristique est une droite (→ conducteurs ohmiques et sources linéaires de tension et de courant).

### II Résolution d'un réseau – Lois de Kirchhoff

#### 1 – Inconnues

Soit un RLRC comportant  $b$  branches. Pour déterminer le fonctionnement du réseau, il faut connaître les intensités dans chaque branches et les tensions aux bornes de chaque branches →  $2b$  inconnues ; mais les dipôles étant linéaires, il existe  $b$  relations liant intensité et tension →  $b$  inconnues.

#### 2 – Lois de Kirchhoff

##### a – Lois de nœuds

$$\sum \epsilon_k i_k = 0$$

##### b – Lois des mailles

"Lorsqu'on parcourt une maille dans un sens déterminé, la somme des différences de potentiels que l'on rencontre est nulle".

$$\sum \epsilon_k U_k = 0 \text{ [ demo ]}$$

##### c – Remarques

- Les lois de Kirchhoff sont valables en régime continu même pour des réseaux non linéaires.
- Elles sont également valables en régime variable à condition qu'on soit dans le cadre de l'ARQP.

#### 3 – Résolution pour un réseau linéaire

##### a – Méthode

Soit un RLRC comportant  $b$  branches et  $n$  nœuds. On a  $b$  inconnues à déterminer. En appliquant la loi des nœuds aux  $n$  nœuds, on obtient  $n$  équations qui ne sont pas indépendantes les unes des autres. Leur somme est nulle. On n'a que  $n - 1$  équations indépendantes. Les  $b - n + 1$  équations restantes se trouvent en appliquant la loi des mailles.

Méthode pour obtenir des équations de mailles indépendantes :

- Chaque branche du réseau doit être parcourue au moins une fois
- Chaque maille choisie doit comporter au moins une branche en propre

##### b – Exemple : le pont de Wheatstone

Galvanomètre = ampèremètre très sensible.

Le pont est dit équilibré si  $i = 0$ , c'est à dire  $R_4 R_2 = R_1 R_3$  → possibilité de mesurer une résistance inconnue. [ demo ]

### II Théorème de superposition de Helmholtz

"La réponse d'un réseau linéaire à une distribution de source peut être considérée comme la superposition des réponses à chaque sources supposées seules dans le réseau."

Eteindre une source idéale de tension = la remplacer par un court-circuit ( $U = 0$ ).

Eteindre une source idéale d'intensité = la remplacer par un coupe-circuit ( $I = 0$ ).

### IV Sources indépendantes et sources liées

Une source est dite indépendante (= autonome) si la grandeur qui la caractérise est indépendante des grandeurs électrique du reste du circuit. Dans le cas contraire, la source est dite liée (= commandée)

Ex : la tension de sortie d'un amplificateur est commandée par la tension d'entrée.



## V Théorème de Thévenin

### 1 – But

Le théorème de Thévenin permet de trouver une représentation simplifiée sur le dipôle D. Il faut que D soit linéaire, et qu'aucune des sources de D n'est commandée par une grandeur externe à D.

### 2 – Démonstration

La caractéristique externe de D est donc une droite. On réalise alors divers circuits constitués de D et de sources idéales de tension.

1<sup>er</sup> circuit : On cherche  $U_1$  tel que  $i_1 = 0$ . On trouve ainsi la tension à vide du dipôle  $e_{AB} = U_1$ .

2<sup>ème</sup> circuit : Les sources de D étant éteintes, D est équivalent à un conducteur ohmique. On mesure l'intensité  $i_2$ , et on en déduit la résistance  $R_{AB}$ .

3<sup>ème</sup> circuit : On relie le dipôle D, sources allumées, en série à  $U_1$  et à  $U_2$ . Le théorème de superposition de Helmholtz dit que  $i = i_1 + i_2$ , et que  $U_{AB} = e_{AB} - R_{AB} \cdot i_2$  ; Le dipôle D est donc équivalent à une source de tension de force électromotrice  $e_{AB}$  et de résistance interne  $R_{AB}$ .

### 3 – Énoncé

"Un réseau dipolaire linéaire D vu de deux points A et B est modélisable de l'extérieur par un générateur de tension linéaire, de force électromotrice  $e_{AB}$  et de résistance interne  $R_{AB}$ ."

$e_{AB}$  est la tension à vide du dipôle D.

$R_{AB}$  est la résistance équivalente vue des points A et B lorsque les sources autonomes de D sont éteintes.

### 4 – Exemples d'application

[ exemple – morale : utiliser le diviseur de tension ou d'intensité ]

[ exemple : Wheatstone – morale : attention aux résistances, et utiliser le diviseur de tension ]

## IV Théorème de Norton

C'est une réécriture du théorème de Thévenin en termes de générateurs de courant.

"Un réseau dipolaire linéaire D vu de 2 points A et B est modélisable de l'extérieur par une source de courant de courant électromoteur  $\eta_{AB}$ , et de résistance interne  $R_{AB}$ ."

$\eta_{AB}$  est l'intensité du courant de court-circuit de D

$R_{AB}$  est la résistance équivalente vue des points A et B lorsque les sources autonomes de D sont éteintes.

[ exemple très simple ]

Remarques :

- Si le dipôle D comporte des sources commandées, le calcul de  $R_{AB}$  ne peut pas se faire directement → on calcule  $e_{AB}$  et  $\eta_{AB}$  et on calcule  $R_{AB} = e_{AB} / \eta_{AB}$ .
- Pour le fonctionnement interne (par exemple énergies dépensées), on ne peut pas se servir des modèles de Norton ou de Thévenin.

## V Théorème de Millman

Il permet de calculer le potentiel d'un point par rapport à une référence commune (la masse, en général). C'est une réécriture de la loi des nœuds en terme de potentiels. Il s'applique en courant continu seulement sur des dipôles linéaires en régime continu.

$$V_n = \frac{\sum_{k=1}^n \frac{V_{A_k}}{R_k}}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k}}$$

- Si  $A_k$  est à la masse, il ne faut pas d'oublier la résistance de la branche n° k (au dénominateur).
  - Si  $i_k = 0$ , il faut éliminer la branche du calcul de  $V_n$ , la résistance comprise.
  - Si certaines branches comportent des sources idéales de courant, on les ajoute au numérateur de la formule ci-dessus, en mettant un moins devant si elles ne se dirigent pas vers le point considéré.
  - Le théorème de Millman est aussi valable pour des points qui ne sont pas des nœuds.
  - S'il y a des sources réelles de tension, il faut les transformer en sources de courant. [ exemple : Wheatstone ]
- ⊗ "Nous redisons encore ici que l'emploi immodéré du théorème de Millman dans les situations simples revient à les compliquer et masque une vision plus physique." (X2000)

## 5 – Dipôles passifs RC, RL, RLC en régime variable

Dans ce chapitre, on considère l'ARQP vérifiée.

### I Dipôles R, L, C

#### 1 – Conducteur ohmique de résistance R

Convention récepteur :  $U = R I$

#### 2 – Bobine d'inductance L

Convention récepteur :  $U = L di / dt$

$$W = \frac{1}{2} L i^2$$

$P = dW / dt$  fini donc W continu donc i continu

#### 3 – Condensateur de capacité C

Convention récepteur :  $q = C \cdot U$  ;  $i = dq / dt$  (i arrive vers +q) donc  $i = C \cdot dU / dt$

$$W = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} q^2 / C$$

$P = dW / dt$  fini donc W continu donc q et U continus

#### 4 – Conclusion

On généralise les relations linéaires ou affines précédentes par des relations différentielles linéaires. Les dipôles envisagés dans le 2 et le 3 sont des modèles ; dans la réalité, une bobine comporte toujours une résistance (celle de l'enroulement) → on ajoute en série un conducteur ohmique à une bobine idéale pour la modéliser. De même, on ajoute un conducteur ohmique en parallèle à un condensateur idéal pour modéliser un condensateur réel.

### II Régime libre des circuits RC et RL

Régime libre (= propre) : absence de générateurs de commande

#### 1 – Circuit RC série

$$\dot{q} + q / (RC) = 0$$

$$q = q_0 \cdot e^{-t/(RC)}$$

on pose  $\tau = RC$  (constante de temps, ou temps de relaxation du circuit)

"Circuit du 1<sup>er</sup> ordre"

#### 2 – Circuit RL série

$$di / dt + R i / L = 0$$

$$i = i_0 \cdot e^{-t.R/L}$$

on pose  $\tau = L/R$

"Circuit du 1<sup>er</sup> ordre"

#### 3 – Généralisation

Soit  $y(t)$  la grandeur électrique qui traduit l'évolution d'un système du 1<sup>er</sup> ordre en l'absence de générateur de commande. L'équation différentielle qui traduit le régime libre d'un système du 1<sup>er</sup> ordre est

$$\tau \dot{y}(t) + y(t) = 0$$

Solution :  $y(t) = y(0^+) \cdot e^{-t/\tau}$

### III Principe de l'étude générale des dipôles passifs en régime variable

De façon générale, les grandeurs cherchées répondent à une équation différentielle du type

$$a_0 y + a_1 y' + \dots + a_n y^{(n)} = f(t)$$

En notant  $p_k$  les racines de l'équation caractéristique de l'équation différentielle sans second membre, on a

$$y_{G-2} = \sum_{k=1}^n A_k \exp(p_k t) \quad \text{où } (A_k) \text{ sont } n \text{ constantes}$$

Mais l'expérience montre qu'au bout de peu de temps,  $y_{G-2}$  devient négligeable.

Pendant le régime transitoire, il y a superposition du régime libre et du régime forcé.

Pendant le régime permanent, seul le régime forcé subsiste.

### IV Réponse à un échelon de tension des circuits RC, RL

Echelon de tension signifie " $U = (t > 0 ? E : 0)$ " (notation langage C)

**1 – Circuit RC**

$$\dot{q} + q / (RC) = E \quad q = CE(1 - e^{-t/\tau}) \text{ pour } t > 0$$

Bilan énergétique : La moitié de l'énergie est perdue par effet joule.

**2 – Circuit RL**

$$di / dt + R i / L = E / L \quad i = E(1 - e^{-t/\tau})/R \text{ pour } t > 0$$

Bilan énergétique [ on la retrouve en multipliant l'équation différentielle par  $i \cdot dt$  ]

**V Etude du dipôle RLC série****1 – Equation différentielle**

$$L d^2q / dt^2 + R dq / dt + q / C = e$$

$$L d^2i / dt^2 + R di / dt + i / C = de / dt$$

On pose  $2\alpha = R / L$  et  $\omega_0 = (LC)^{-1/2}$

$$\boxed{\frac{d^2q}{dt^2} + 2\alpha \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0}$$

$$\Delta = 4(\alpha^2 - \omega_0^2)$$

$$\text{Soit } R_c = 2 (L / C)^{1/2}$$

$$\mathbf{a - \Delta < 0 \Leftrightarrow R < R_c}$$

C'est le régime pseudo périodique amorti.

$$\text{Posons } \omega = (\alpha^2 - \omega_0^2)^{1/2}$$

$$q(t) = A \cdot e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \varphi) = e^{-\alpha t} (\lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t))$$

Les extremums ne sont pas confondus avec les points de contact des enveloppes, ils se situent avant.

Intervalle de temps entre deux 0 consécutifs dans le même sens  $T = 2\pi/\omega$  c'est à dire la pseudo période du phénomène. Décrément logarithmique  $\delta = n^{-1} \cdot \ln (y(t) / y(t + n T)) = \alpha T$ .

$$\mathbf{b - \Delta = 0 \Leftrightarrow R = R_c}$$

C'est le régime critique.

$$q(t) = (A t + B) e^{-\alpha_0 t}$$

$$\mathbf{c - \Delta > 0 \Leftrightarrow R > R_c}$$

C'est le régime aperiodique.  $r_1$  et  $r_2$  sont les racines réelles négatives de l'équation caractéristique

$$q(t) = A e^{r_1 t} + B e^{r_2 t}$$

$q(t)$  apparaît comme la somme de deux exponentielles décroissantes, l'une décroît plus vite que  $e^{-\alpha_0 t}$ , et disparaît rapidement. L'autre décroît moins vite que  $e^{-\alpha_0 t}$ .

**3 – Réponse à un échelon de tension**

On peut prévoir a priori que  $q(\infty) = CE$ , et que  $i(\infty) = 0$ . En effet, lorsque le régime transitoire est terminé, seul subsiste le régime forcé, qui correspond à la solution particulière de l'équation complète.

Bilan énergétique : on compose par  $i \cdot dt$  la loi des mailles appliquée au circuit série.

## 6 – Dipôles linéaires en régime sinusoïdal forcé

Relation entre  $i$  et  $u$  : relation affine ou différentielle linéaire (c'est à dire R, L, C, sources linéaires).  
ARQP. Régime transitoire négligé.

### I Représentation d'une grandeur sinusoïdale

#### 1 – Rappels

#### 2 – Représentation par amplitude complexe

##### a – Rappels sur les complexes

##### b – Représentation complexe

$$\underline{U} = e^{j\varphi} \quad \underline{u}(t) = \underline{U} e^{j\omega t} \quad u(t) = \text{Re}(\underline{u}(t))$$

Intérêt : Pour dériver, il suffit de multiplier par  $j\omega$ .

### II Lois de Kirchhoff en représentation complexe

#### 1 – Lois des mailles

La loi des mailles est vérifiée par les représentations complexes instantanées des tensions, ainsi que pour les valeurs efficaces complexes des tensions.

$$\sum_k \varepsilon_k \cdot \underline{u}_k(t) = \sum_k \varepsilon_k \cdot \underline{U}_k = 0 \quad [\text{demo}]$$

#### 2 – Loi des nœuds

$$\text{De même, } \sum_k \varepsilon_k \cdot \underline{i}_k(t) = \sum_k \varepsilon_k \cdot \underline{I}_k = 0$$

### III Dipôles R, L, C en régime sinusoïdal forcé

Dans chaque cas, on a  $\underline{U} = \underline{Z} \underline{i}$  et  $u(t) = \underline{Z} i(t)$

#### 1 – Conducteur ohmique de résistance R

$$\underline{Z}_R = R$$

#### 2 – Bobine parfaite d'inductance L

$$\underline{Z}_L = jL\omega \quad [\text{demo}]$$

$\underline{Z}_L$  est l'impédance complexe de la bobine.  $U_L$  est en quadrature avance sur  $I_L$ .

#### 3 – Le condensateur de capacité C

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega} \quad [\text{demo}]$$

$\underline{Z}_C$  est l'impédance complexe du condensateur.  $U_C$  est en quadrature retard sur  $I_C$ .

### IV Association de dipôles

#### 1 – Association série des dipôles R L C

Les trois dipôles branchés en série sont équivalents à un seul dipôle d'impédance complexe égale à la somme des impédances complexes des 3 dipôles. [demo]

$$\underline{Z} = R + j(L\omega - 1/C\omega) = R + jX \quad (X \text{ est la réactance du circuit, en } \Omega)$$

On cherche  $\varphi = \arg \underline{Z}$  on utilise  $\tan \varphi = \text{Im}(\underline{Z}) / \text{Re}(\underline{Z})$  et le signe de  $\cos \varphi = \text{le signe de } \text{Re}(\underline{Z})$

Il faut repérer le quadrant dans lequel se situe  $e^{j\varphi}$ .

→ On ajoute ou on retranche des  $\pi$  à partir de  $\arctan(\text{Im}(\underline{Z}) / \text{Re}(\underline{Z}))$   
 Ici, le  $\cos \varphi > 0$  donc  $\varphi = \arctan(\text{Im}(\underline{Z}) / \text{Re}(\underline{Z}))$

## 2 – Association parallèle des dipôles R L C

Admittance = Impédance<sup>-1</sup>

Les trois dipôles branchés en parallèle sont équivalents à un seul dipôle d'admittance complexe égale à la somme des admittances des 3 dipôles. [ demo ]

$$Y = 1/R + j(C\omega - 1/L\omega)$$

$$I = YU$$

(Application)

Remarque : pour remplacer deux dipôles en parallèle, on a  $\underline{Z}_{\text{eq}} = \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$

## V Générateurs linéaires en régime sinusoïdal forcé

En régime sinusoïdal forcé, un générateur sera dit linéaire si la représentation complexe de la tension à ses bornes est une fonction affine de la représentation complexe du courant qui le traverse.

$$\text{c'est à dire si } \underline{u}(t) = \underline{E}_{AB} - \underline{Z}_{AB} \cdot \underline{i}(t)$$

## VI Réseaux électriques en régime sinusoïdal forcé

L'étude des réseaux linéaires en régime continu ne se servait que des lois de Kirchhoff et des relations affines entre tension et intensité, donc ici on peut également se servir des lois d'association des impédances complexes, les diviseurs, les théorèmes de Helmholtz, Thévenin, Norton, et Millman à condition de travailler sur des représentations complexes.

Exemple : un pont de dipôles linéaires en régime sinusoïdal forcé.

Il est équilibré si  $\underline{Z}_1 \underline{Z}_4 = \underline{Z}_2 \underline{Z}_3$ . [ demo avec le diviseur de tension et avec Millman ]

Exemple d'application : le pont de Maxwell (pour mesurer les caractéristiques d'une bobine)

Astuce : diviser par  $\underline{Z}_c$  quand un condensateur est associé en parallèle.

## 7 – Puissance en régime sinusoïdal forcé

### I Puissance instantanée

$$\mathcal{P}(t) = IU (\cos(2\omega t + \varphi) + \cos \varphi)$$

I et U sont les valeurs efficaces de l'intensité et de la tension.

$\mathcal{P}(t)$  est alternativement positif et négatif si  $|\cos \varphi| \neq 1$  donc le dipôle est tantôt récepteur, tantôt générateur.

### II Puissance moyenne

$$\mathcal{P} = \frac{W}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \mathcal{P}(t) dt = UI \cos \varphi \quad [\text{demo}]$$

UI : puissance apparente, en VA (U et I : valeurs efficaces)

$\cos \varphi$  : "facteur de puissance"

### III Autres expressions de la puissance moyenne reçue

On considère des dipôles passifs linéaires en régime sinusoïdal forcé (c'est à dire R, L, C, associations).

#### 1 – Le dipôle est caractérisé par son impédance complexe

$$\mathcal{P} = \operatorname{Re}(\underline{Z}) I^2 \quad \text{or } \mathcal{P} > 0 \text{ donc il faut } \operatorname{Re}(\underline{Z}) > 0 \quad [\text{demo}]$$

Exemple : Dans un circuit R L C série,  $\mathcal{P} = R I^2$  : toute la puissance consommée l'est par le conducteur ohmique.

#### 2 – Le dipôle est caractérisé par son admittance complexe

$$\mathcal{P} = \operatorname{Re}(\underline{Y}) U^2 \quad \text{or } \mathcal{P} > 0 \text{ donc il faut } \operatorname{Re}(\underline{Y}) > 0 \quad [\text{demo}]$$

Exemple : Dans un circuit R L C parallèle,  $\mathcal{P} = U^2 / R$  : toute la puissance consommée l'est par le conducteur ohmique.

### IV Le facteur de puissance : $\cos \varphi$

#### 1 – Point de vue de l'utilisateur

Dans une installation sont imposés la fréquence (50 Hz), la valeur efficace de la tension (220 V), la valeur efficace de l'intensité maximale que pourra fournir l'installation (ampérage). La puissance moyenne reçue par celle-ci est d'autant plus grande que le facteur de puissance est grand.

#### 2 – Point de vue du réseau de distribution : EDF

$$\mathcal{P}_{\text{pertes}} = r I^2 = \frac{r \mathcal{P}^2}{U^2 \cos^2 \varphi}$$

r : résistance de la ligne

$\mathcal{P}$  : puissance consommée par l'utilisateur

Si on cherche à minimiser  $r = \rho \ell / S$ ,

\* diminuer  $\rho$  : problème de coût (cuivre, argent, or sont les meilleurs conducteurs)

\* augmenter S : problème de poids du fil

Si on cherche à augmenter U, on peut transporter l'énergie sous très haute tension puis on la ramène à la valeur souhaitée avec les abaisseurs de tension.

On cherche ici aussi à avoir un grand facteur de puissance.

## 8 – Réponse fréquentielle d'un circuit R L C et transfert d'un système linéaire

### I Résonance d'intensité

#### 1 – Réponse en intensité d'un circuit R L C série

$$\underline{U} = \underline{Z} \underline{I} \text{ et } \underline{Z} = R + j \left( L \omega - \frac{1}{C \omega} \right)$$

$$\underline{I} = \underline{U} / \underline{Z} = \frac{U \cdot e^{j\varphi}}{R + j \left( L \omega - \frac{1}{C \omega} \right)} \quad \text{où} \quad \varphi = \varphi_{u/i}$$

$$|\underline{I}| = |\underline{U}| / |\underline{Z}| = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left( L \omega - \frac{1}{C \omega} \right)^2}}$$

$$\varphi = \varphi_{u/i} = \arg \underline{U} - \arg \underline{I} = \arg \underline{Z}$$

$$\text{Or } \operatorname{Re}(\underline{Z}) = R > 0 \Rightarrow \cos \varphi > 0 \Rightarrow \varphi = \arctan \frac{L \omega - \frac{1}{C \omega}}{R}$$

#### a – Etude de $I(\omega)$

$I(\omega)$  a au moins un maximum.  $I$  est maximum quand  $(L \omega - 1 / C \omega)$  est nul, donc quand  $\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ .

$\omega_0$  est la pulsation propre du circuit. Si  $\omega = \omega_0$ , on dit qu'il y a résonance d'intensité.

Bande passante :  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$  où  $I(\omega_1) = I(\omega_2) = I(\omega_0) / \sqrt{2}$ . Ce sont les pulsations de coupure.

$$\omega_2 = + R / 2L + \frac{1}{2} \sqrt{\left( R^2 / L^2 + 4 \omega_0^2 \right)} \quad [ \text{demo} ]$$

$$\omega_1 = - R / 2L + \frac{1}{2} \sqrt{\left( R^2 / L^2 + 4 \omega_0^2 \right)}$$

$$\Delta\omega = R / L$$

$$\omega_1 \omega_2 = \omega_0^2$$

Facteur de qualité :  $Q = \omega_0 / \Delta\omega = L \omega_0 / R = 1 / (RC \omega_0) = (1/R) \sqrt{L/C}$ .

Plus  $R$  est petit, plus  $Q$  est grand. On dit que le circuit est très sélectif.

$$P(\omega_1) = P(\omega_2) = P(\omega_0) / 2$$

#### b – Etude de $\varphi(\omega)$

On a  $d\varphi / d\omega > 0$  et  $\varphi(\omega_0) = 0$  [ demo ]

Pour  $\omega < \omega_0$ ,  $\varphi < 0$ ,  $u$  est en retard sur  $i$  : le dipôle est plutôt capacitif.

Pour  $\omega > \omega_0$ ,  $\varphi > 0$ ,  $u$  est en avance sur  $i$  : le dipôle est plutôt inductif.

### 2 – Notion de filtre

Fonction de transfert :  $H(j\omega) = \underline{U}_s / \underline{U}_e$

Gain en tension :  $|H| = U_s / U_e$

Cas du circuit RLC ( sortie :  $U_R$  )

C'est un filtre passe-bande : seule une bande de pulsation passe bien.

Modèle idéal.

⊗ Si le discriminant de l'équation caractéristique associée à un filtre est positif, cela n'implique pas qu'il ne peut exister de régime harmonique forcé. (Centrale2000)

## II Résonance de charge

Circuit RLC série ;  $U_s$  est la tension aux bornes du condensateur.

On pose  $x = \omega / \omega_0$ . (pulsation réduite)

#### 1 – Etude du gain en tension

2 cas : si  $Q > 1/\sqrt{2}$  alors il existe un maximum :  $x = x_r = \sqrt{1 - (2Q^2)^{-1}}$ . Résonance de charge. Filtre passe-bande.

si  $Q < 1/\sqrt{2}$  alors  $H$  décroît de 1 à 0 quand  $x$  évolue de 0 à l'infini. Filtre passe-bas. [ demos ]

**2 – Etude de  $\varphi_c(\omega) = \varphi_{uc/u}$** 

$\varphi_c(\omega)$  est toujours dans  $[-\pi, 0]$

**III Généralisation : fonction de transfert en régime sinusoïdal forcé****1 – Quadripôle**

C'est un réseau électrique dont on distingue 4 bornes : 2 bornes d'entrée et 2 bornes de sortie. En général les bornes d'entrées sont reliées à un générateur de commande, et les bornes de sortie peuvent être reliées à un circuit d'utilisation, ou circuit de charge.

**2 – Fonction de transfert**

$H(j\omega) = \underline{U}_s / \underline{U}_e$  : amplification complexe en tension.

$H(j\omega) = \underline{I}_s / \underline{I}_e$  : amplification complexe en intensité.

$H(j\omega) = \underline{U}_s / \underline{I}_e$  : transimpédance complexe.

$H(j\omega) = \underline{I}_s / \underline{U}_e$  : transadmittance complexe.

**3 – Gain en décibel**

$G_{dB} = 20 \log (x_s / x_e)$      $x$  : tension ou intensité

**4 – Bande passante d'un système linéaire**

Courbe de réponse en amplitude d'un système linéaire : Graphe de  $G_{dB}$  en fonction de  $\omega$ .

Bande passante à  $-3$  dB :     $B_{-3dB} = \omega_h - \omega_b$  où  $\omega_h > \omega_b$  et  $G_{dB}(\omega_h) = G_{dB}(\omega_b) = G_{max} - 3$

$H(\omega_h) = H(\omega_b) = H_{max} / \sqrt{2}$

**5 – Représentation fréquentielle d'un transfert**

Diagramme de Bode :

- Représentation de  $G_{dB}$  en fonction de  $\log \omega$ .
- Représentation de  $\varphi(\omega)$  en fonction de  $\log \omega$ .

⊗ Pour tracer un diagramme asymptotique de Bode d'un système quelconque, il suffit de mettre la fonction de transfert sous la forme d'un produit de 1<sup>er</sup> ordres, de tracer chaque Bode du 1<sup>er</sup> ordre et de sommer. (Centrale2000)



## 9 – Exemples de réponses fréquentielles de systèmes linéaires

### I Filtres du 1<sup>er</sup> ordre

#### 1 – Filtre du 1<sup>er</sup> ordre fondamental [ RC, U<sub>C</sub> ] (passe bas)

##### a – Définition

Un système du 1<sup>er</sup> ordre fondamental est un système linéaire dont la fonction de transfert peut se mettre sous la forme :

$$\underline{H}(jx) = \frac{H_0}{1 + j.x} \quad \text{où } H_0 \text{ est une constante ("transfert statique"), qui correspond à la fonction de transfert en}$$

régime continu.

$$H(0) = H_0 \quad H(\infty) = 0$$

Comportement : filtre passe bas

Exemple : Circuit RC série ; U<sub>s</sub> est la tension aux bornes du condensateur.

Etude de la fonction de transfert : H(ω) est une fonction décroissante. C'est donc un filtre passe-bas. La bande passante à - 3 dB est égale à ω<sub>0</sub>.

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= -\arctan x \text{ si } H_0 > 0 \\ &= \pi - \arctan x \text{ si } H_0 < 0 \end{aligned}$$

##### b – Diagramme de Bode

Courbes universelles de l'amplitude réduite :  $y = H/H_0 = 1/(1 + j x)$

Diagramme asymptotique : pour approcher la courbe par des segments de droite.

- Si  $x < 1$ ,  $G_{dB} \sim 0$
- Si  $x > 1$ ,  $G_{dB} \sim -20 \log(x)$

1 : valeur charnière

La pente de l'asymptote pour  $x > 1$  est de - 20 dB / décade.

#### 2 – Filtre du type [ RC, U<sub>R</sub> ] (passe haut)

La fonction de transfert d'un filtre passe-haut du 1<sup>er</sup> ordre peut se mettre sous la forme

$$\underline{H}(jx) = \frac{K.j.x}{1 + j.x} \quad \text{où } K \text{ est un nombre positif ou négatif.}$$

Comportement : filtre passe haut

$$H(0) = 0 \quad H(\infty) = K$$

$$\varphi(x) = \pi / 2 - \arctan x$$

$$G_{dB} = 20 \log H = -10 \log(1/x^2 + 1)$$

Exemple : Circuit RC série ; U<sub>s</sub> est la tension aux bornes de la résistance.

Diagramme asymptotique :

- Si  $x < 1$ ,  $G_{dB} \sim 20 \log x$
- Si  $x > 1$ ,  $G_{dB} \sim 0$

Pulsation de coupure basse : ω<sub>b</sub> = ω<sub>0</sub>.

### II Filtres du 2<sup>e</sup> ordre

#### 1 – Filtre du 2<sup>e</sup> ordre fondamental [ RLC, U<sub>C</sub> ] (passe bande / passe bas)

La fonction de transfert d'un filtre du 2<sup>e</sup> ordre fondamental peut toujours se mettre sous la forme :

$$\underline{H}(jx) = \frac{H_0}{1 - x^2 + \frac{jx}{Q}} \quad \text{où } Q \text{ est positif, et } H_0 \text{ le transfert statique.}$$

Comportement : Si  $Q > 1/\sqrt{2}$ , filtre passe bande.

Si  $Q < 1/\sqrt{2}$ , filtre passe bas.

$$H(0) = H_0 \quad H(\infty) = 0$$

Si  $Q = 1/\sqrt{2}$ , c'est le filtre de Butterworth.

Si  $Q = 1/\sqrt{2+}$ , c'est le filtre de Tchebychev.

Diagramme asymptotique

- Si  $x < 1$ ,  $G_{dB} \sim 0$
- Si  $x > 1$ ,  $G_{dB} \sim -40 \log x$

Pour  $Q > 1/\sqrt{2}$ , le diagramme asymptotique ne suffit pas. Il faut faire une étude plus poussée au niveau de  $x = x_r$  et de  $x = 1$  (calcul de  $G_{dB}$  pour ces deux valeurs de  $x$ ).

## 2 – Filtre du type [ RLC, $U_R$ ] (passe bande)

$$\underline{H}(jx) = K \frac{\frac{j \cdot x}{Q}}{1 - x^2 + \frac{j \cdot x}{Q}} = \frac{K}{1 + j \cdot Q \left( x - \frac{1}{x} \right)}$$

Comportement : H est maximal pour  $x = 1$ . C'est un filtre passe-bande.

$$H(0) = 0 \quad H(\infty) = 0$$

Diagramme asymptotique :

- Si  $x < 1$ ,  $G_{dB} \sim +20 \log x - 20 \log Q$
- Si  $x > 1$ ,  $G_{dB} \sim -20 \log x - 20 \log Q$

## 3 – Filtre du type [ RLC, $U_L$ ] (passe bande / passe haut)

$$\underline{H}(jx) = K \frac{-x^2}{1 - x^2 + \frac{j \cdot x}{Q}}$$

Comportement : Si  $Q > 1/\sqrt{2}$ , filtre passe bande.

Si  $Q < 1/\sqrt{2}$ , filtre passe haut.

$$H(0) = 0 \quad H(\infty) = K$$

Diagramme asymptotique :

- Si  $x < 1$ ,  $G_{dB} \sim 40 \log x$
- Si  $x > 1$ ,  $G_{dB} \sim 0$

## 4 – Filtre du type [ RLC, $U_L + U_C$ ] (coupe bande)

$$\underline{H}(jx) = K \frac{1 - x^2}{1 - x^2 + \frac{j \cdot x}{Q}}$$

Comportement : filtre coupe bande (ou rejecteur)

$$H(0) = K \quad H(\infty) = K$$

[ longue étude du gain en tension ]

Diagramme asymptotique :

- Si  $x < 1$ ,  $G_{dB} \sim 0$
- Si  $x > 1$ ,  $G_{dB} \sim 0$

## III Relation entre fonction de transfert et équation différentielle d'un système

Pour établir l'équation différentielle d'un réseau linéaire reliant une grandeur de sortie à une grandeur d'entrée, on dispose de deux méthodes :

- Ecrire les équations de nœuds et les équations de maille (en régime variable) puis éliminer toutes les variables intermédiaires.
- Se placer en régime sinusoïdal forcé, et calculer la fonction de transfert, et ensuite reconstituer l'équation différentielle.

[ Exemple ]

## IV Séries de Fourier

Toute fonction périodique est décomposable en somme de sinusoïdes ; en appelant  $\omega$  la pulsation de  $f$  :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(n \cdot \omega \cdot t) + b_n \cdot \sin(n \cdot \omega \cdot t)$$

$a_0$  est la composante continue de la fonction (c'est-à-dire sa valeur moyenne). On a les relations :

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t).dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t). \cos(n\omega t).dt \quad [ \text{demo} ]$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t). \sin(n\omega t).dt$$

Application : décomposition en séries de Fourier d'une tension carrée.

$$u(t) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p \cdot 4E}{(2p+1)\pi} \cos((2p+1)\omega t) \quad [ \text{demo} ]$$

Si on considère un quadripôle linéaire en sortie ouverte, en régime permanent,  $U_s$  est confondue avec la solution particulière de l'équation différentielle avec 2<sup>e</sup> membre qu'il vérifie. Le 2<sup>e</sup> membre est une somme de fonctions sinusoïdales. Pour calculer chacun des termes de la somme, on cherche la réponse du circuit en RSF à chacun des termes de la somme qui constitue  $u(t)$ .

Exemple : circuit RLC série ;  $U_s$  = tension aux bornes de la résistance. Seul le premier cosinus passe. Les autres harmoniques sont extrêmement amorties. [ demo ]

# 10 – Amplificateur opérationnel

## I Fonction amplification

### 1 – Rôle d'un amplificateur

Amplifier un signal c'est reproduire fidèlement ses variations tout en augmentant son amplitude.

Amplificateur = dispositif capable de transformer une partie de l'énergie qu'il reçoit d'une source en un signal de sortie de forte puissance, qui est une reproduction fidèle du signal d'entrée de faible puissance.

### 2 – Caractéristiques d'un amplificateur

#### a – Introduction

L'alimentation d'un amplificateur ne sera jamais représentée.  $\Rightarrow$  il est représenté par un quadripôle. La puissance de sortie est supérieure à la puissance reçue à l'entrée : le quadripôle est dit actif. S'il fonctionne de manière linéaire, on aura en régime sinusoïdal forcé :  $\underline{U}_s = \underline{A}(j\omega) \cdot \underline{U}_e$

Deux types d'amplificateurs : ceux qui laissent passer ou non un courant continu. Aucun d'entre eux laisse passer les hautes fréquences.

#### b – Impédances d'entrée et de sortie

Modèle d'un amplificateur de tension :

- Vu de l'entrée, il est modélisé par un dipôle d'impédance complexe  $\underline{Z}_e = \underline{U}_e / \underline{I}_e$ .
- Vu de la sortie, il est modélisé par le générateur de Thévenin équivalent de force électromotrice  $\underline{E}_g = \underline{U}_e$  et d'impédance interne  $\underline{Z}_s = \underline{U}_s / \underline{I}_s$  pour  $\underline{E}_g = \underline{U}_e = 0$

Si  $\underline{Z}_e$  ne dépend pas de  $\underline{Z}_u$  et que  $\underline{Z}_s$  ne dépend pas de  $\underline{Z}_g$ , l'amplificateur est dit unidirectionnel.

On admet que les amplificateurs étudiés seront unidirectionnels, que les impédances d'entrée et de sortie seront purement résistives.

#### c – Modèle de l'amplificateur de tension idéal

$$\underline{Z}_e = R_e = \infty \quad \text{et} \quad \underline{Z}_s = R_s = 0$$

Vue de la sortie, l'amplificateur se comporte comme une source idéale de tension :  $\underline{U}_s = \underline{A} \cdot \underline{U}_e$ .

## III Amplificateur opérationnel

### 1 – Description

L'amplificateur opérationnel, aka "amplificateur de différence intégré" car en fonctionnement linéaire, il délivre une tension de sortie proportionnelle à la différence de 2 tensions. On l'appelle aussi "amplificateur opérationnel" car certaines de leurs applications consistent à réaliser des opérations mathématiques (somme, différence, multiplication par une constante, dérivation, intégration).

Aspect extérieur : puce à 8 bornes. Deux d'entre elles sont celles d'alimentation, qui doivent être branchées en priorité.

### 2 – Symbole et fonction d'un amplificateur opérationnel

Symbole européen : rectangle

Symbole anglo-saxon : triangle

Dans la zone de fonctionnement linéaire de l'AO, on a

$$U_s(t) = A_d (V_+(t) - V_-(t)) = A_d e \quad \text{où } A_d \text{ est très grand (entre } 10^4 \text{ et } 10^6)$$

### 3 – Caractéristiques statiques de transfert de l'amplificateur opérationnel

La courbe présente 3 parties :

- Une partie linéaire d'équation  $U_s = A_d \cdot e$ . C'est le régime linéaire.
- Deux paliers horizontaux, d'équation  $U_s = +U_{sat}$  et  $U_s = -U_{sat}$  où  $U_{sat}$  et  $U'_{sat}$  sont deux tensions voisines, légèrement inférieures à la tension d'alimentation (15V en général). C'est le régime saturé.

⊗ Ne pas dire : "On évite les régimes de saturation, sinon l'amplificateur opérationnel est détruit." (Centrale2000)

Application numérique : l'AO ne fonctionne en régime linéaire que pour des tensions inférieures à 0,13 mV en valeur absolue. La moindre tension parasite recueillie à l'entrée va donc conduire l'AO à la saturation. On constate

cependant expérimentalement qu'il est possible de faire fonctionner l'AO dans sa zone linéaire seulement à l'aide de dipôles externes judicieusement branchés. Un AO tout seul ne peut pas fonctionner dans sa zone linéaire.

**4 – Modèle de l'amplificateur opérationnel en régime lentement variable**

Modèle variable en régime lentement variable pour un AO fonctionnant dans sa zone linéaire, et où l'intensité du courant qui rentre dans l'AO via la borne de sortie  $\mu_s < \mu_{smax} \sim$  quelques mA :

- Vu de l'entrée, il est modélisé par une résistance  $r_d (\sim 10^8 \Omega)$ , la résistance différentielle d'entrée.
- Vu de la sortie, il est modélisé par le générateur de Thévenin équivalent de force électromotrice  $Ad . e$  et de résistance interne  $R_s (\sim 10 \Omega)$ .

⊗ En régime non lentement variable, l'AO ne peut plus suivre :  $U_s$  est limité par  $\left| \frac{dU_s}{dt} \right| \leq 600 \text{ kV/s}$  environ.

**III L'amplificateur opérationnel idéal**

On considère  $Ad$  infini.

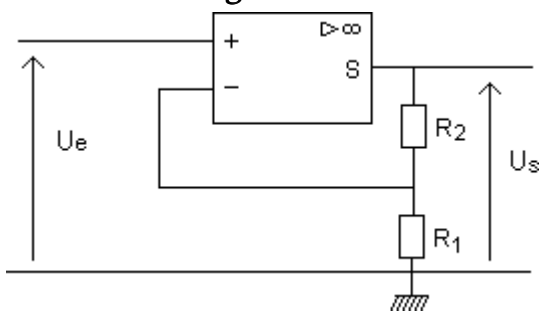
Conséquences du modèle:

- Vu de l'entrée, l'AO est équivalent à une résistance  $R_d$  très grande (infinie).
- Les intensités des courants d'entrée sont nulles.
- Pour un AO idéal fonctionnant dans sa zone linéaire :  $e = 0$ .

Intérêt : simplifier les calculs.

**IV Exemple : réalisation d'un amplificateur de tension à l'aide d'un AOIL**

**1 – Montage et calcul de  $U_s / U_e$**



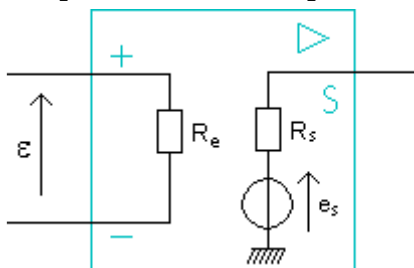
$A = U_s / U_e = 1 + R_2 / R_1$  [ demo ]  
 $R_e = \infty$   $R_s = 0$  Amplificateur idéal

- On ne peut pas choisir la résistance d'utilisation  $R_u$  trop petite car sinon on risque de dépasser  $i_{\mu s max}$ .
- La f.e.m. du générateur  $e_g$  ne doit pas avoir une amplitude supérieure à la tension d'alimentation de l'AO.
- Pour que l'AO fonctionne dans sa zone linéaire, on doit avoir  $-U'sat < U_s < U'sat$  c'est-à-dire  $-U'sat / A < e_g < U'sat / A$

**2 – Choix du branchement des entrées + et -**

On vérifie expérimentalement que le montage proposé fonctionne bien comme prévu. Il semble a priori que l'on pourrait intervertir le rôle des entrées + et -, mais si on le fait, on constate expérimentalement que l'AO sature. Pour que l'AO fonctionne dans sa zone linéaire, il faut qu'il existe une boucle de rétroaction entre la sortie et l'entrée inverseuse, cette boucle étant assurée par un dipôle (par exemple une résistance), ou un court-circuit.

**V [Spé] Modèle de l'amplification opérationnel réel**



avec  $e_s + \tau_0 \frac{de_s}{dt} = \mu_0 \epsilon$ .

En régime harmonique :  $e_s = \mu \epsilon$  avec  $\mu = \frac{\mu_0}{1 + j\omega\tau_0}$

En général,  $\mu_0 \approx 10^5$ ,  $\tau_0 \approx 0,1 \text{ s}$ ,  $R_e \approx 1 \text{ M}\Omega$ ,  $R_s \approx 100 \Omega$ .

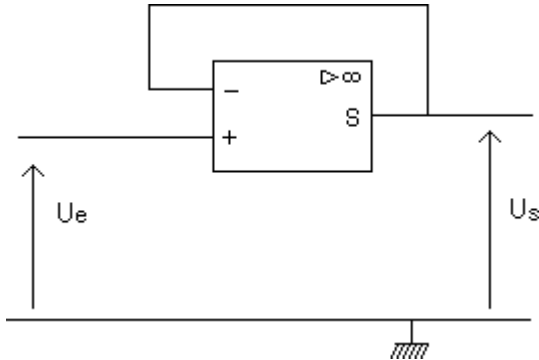
Lorsqu'on le considère idéal sans pour autant être en régime lentement variable, on considère juste que  $R_e = \infty$  et  $R_s = 0$ .

# 11 – Montages de base avec amplificateur opérationnel

L'AO est supposé idéal et travaillant dans sa zone linéaire. Ne jamais :

- Choisir  $i_s$  comme variable a priori car  $i_{\mu s}$  est inconnue. Du calcul de  $U_s$  on déduit  $i_s$  puis  $i_{\mu s}$ .
- Appliquer le théorème de Millman au point de sortie car  $i_{\mu s}$  est inconnue.

## I Montage suiveur non inverseur



$$A = U_s / U_e = 1 \quad [ \text{demo} ]$$

$$R_e = \infty \quad R_s = 0 \quad \text{Amplificateur idéal}$$

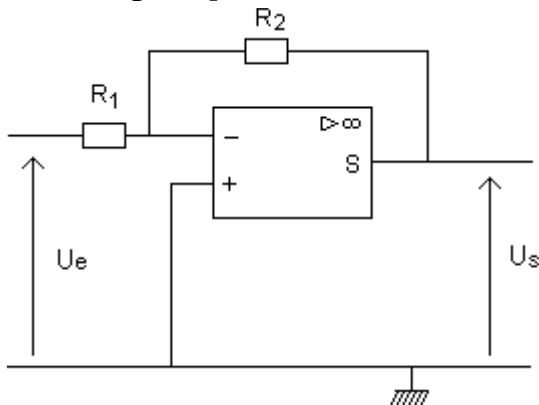
### Applications :

Utiliser un voltmètre de qualité médiocre pour mesurer une fem.  
 Etudier la résonance d'intensité dans un circuit RLC série sans subir l'écroulement de la tension fournie par le générateur au moment de cette résonance.

## II Montage amplificateur non inverseur

Voir chapitre précédent.

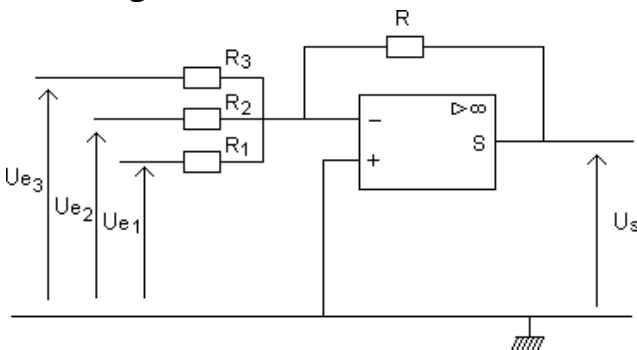
## III Montage amplificateur inverseur



$$A = U_s / U_e = - R_2 / R_1 \quad [ \text{demo} ]$$

$$R_e = R_1 \quad R_s = 0 \quad \text{Amplificateur idéal}$$

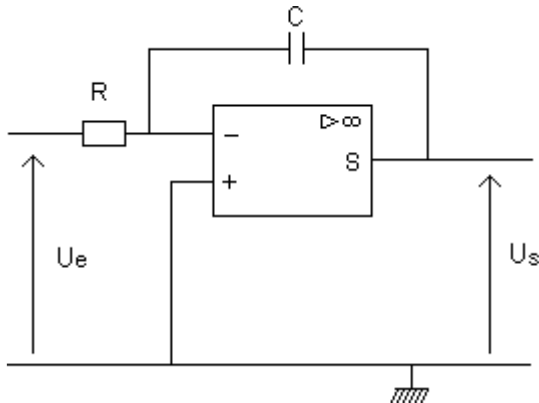
## IV Montage sommateur inverseur



$$U_s = - R \sum U_{e_i} / R_i \quad [ \text{demo} ]$$

**V Montage intégrateur inverseur**

**1 – Principe**



$$H(j\omega) = -\frac{1}{jRC\omega} \quad [ \text{demo} ]$$

$$U_s(t) - U_s(0) = (-1/RC) \int U_e(\theta) d\theta \quad [ 2 \text{ demos : Kirchoff + RSF} ]$$

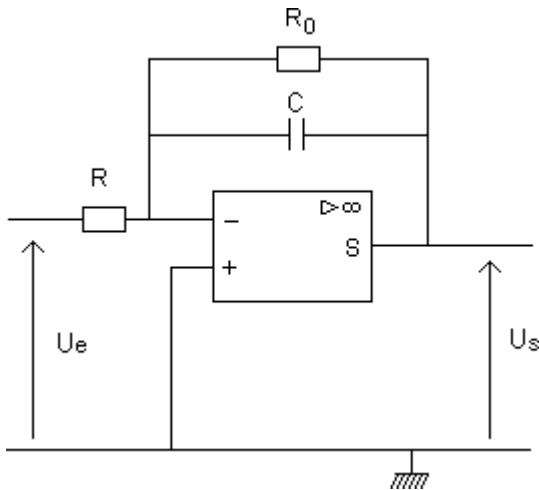
Pour avoir  $U_s(0) = 0$  on branche un interrupteur K aux bornes du condensateur.

$t < 0$  : K fermé

$t = 0$  : on ouvre K

Si  $U_e$  comporte une composante continue, le montage finit par saturer [ démo théorique ], et d'ailleurs, même sans composante continue, on constate expérimentalement que le montage sature au bout de quelques instants.

**2 – Montage intégrateur réellement utilisable**



$$H(j\omega) = -\frac{R_0}{R(1 + jR_0C\omega)} \quad [ \text{demo} ]$$

Choix de  $R_0$  : on veut que  $H$  soit le plus proche de son expression sans résistance  $R_0$  donc il faut que  $R_0C\omega \gg 1$ .

Même si  $U_e$  comporte une composante continue, l'AO peut fonctionner dans sa zone linéaire : pour  $U_e = U_0 + U_m \cos \omega t$ , la réponse en régime permanent est

$$U_s = -R_0 U_m / R - (U_m / RC\omega) \sin \omega t \quad [ \text{demo} ]$$

$R_0$  ne doit pas être trop grand pour que  $R_0 U_m / R$  n'atteigne pas la valeur de la tension de saturation.

La partie variable de  $U_s$  est obtenue par intégration de la partie variable de  $U_e$ . [ demo ]

**VI Exemple d'opérateur non linéaire : le comparateur**

**1 – Principe du comparateur de tension.**

Un comparateur idéal de tension est un système électronique à 2 entrées  $u_1$  et  $u_2$  tel que

$$U_s = V_H \quad \text{pour } u_1(t) > u_2(t)$$

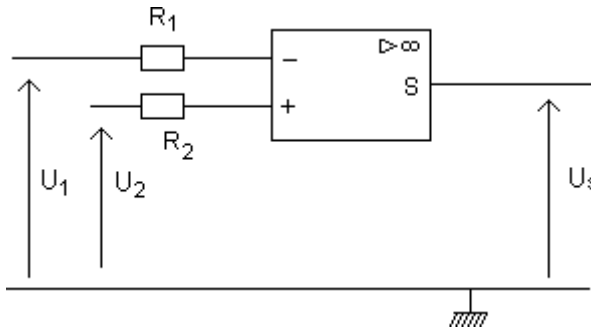
$$U_s = V_B \quad \text{pour } u_1(t) < u_2(t)$$

avec  $V_H \neq V_B$

La caractéristique de transfert est analogue à la caractéristique statique de transfert d'un AO idéal.

Puisque la borne - n'est pas reliée à la sortie, l'AO fonctionne en régime saturé.

**2 – Montage comparateur de base**



$$U_s = +U_{sat} \quad \text{pour } U_2 > U_1$$

$$U_s = -U_{sat} \quad \text{pour } U_2 < U_1$$

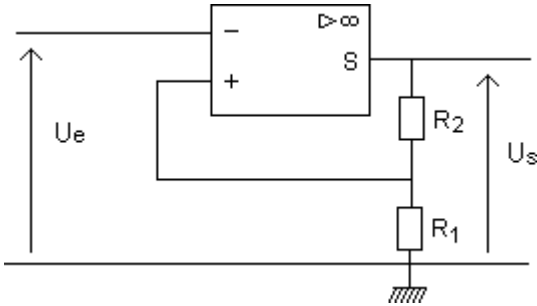
[ demo ]

Défauts :

La caractéristique de l'AO n'est pas vraiment verticale.

En régime rapidement variable, la commutation n'est pas instantanée ; l'AO réagit lentement.

**3 – Comparateur à hystérésis (ou comparateur/trigger de Schmitt)**



$$U_s = +U_{sat} \Rightarrow U_e < +R_1/(R_1+R_2) U_{sat}$$

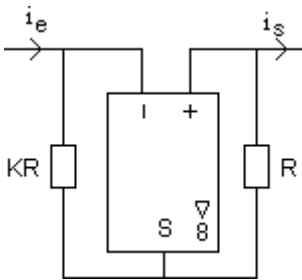
$$U_s = -U'_{sat} \Rightarrow U_e > -R_1/(R_1+R_2) U'_{sat}$$

[ demo comme diode ]

L'hystérésis correspond à la plage de variation de  $U_e$  pour laquelle il existe 2 états possibles de la sortie pour chaque valeur de  $U_e$ .

Le montage ne bascule que lorsque c'est nécessaire.

**VII [Spé] L'inverseur de courant**

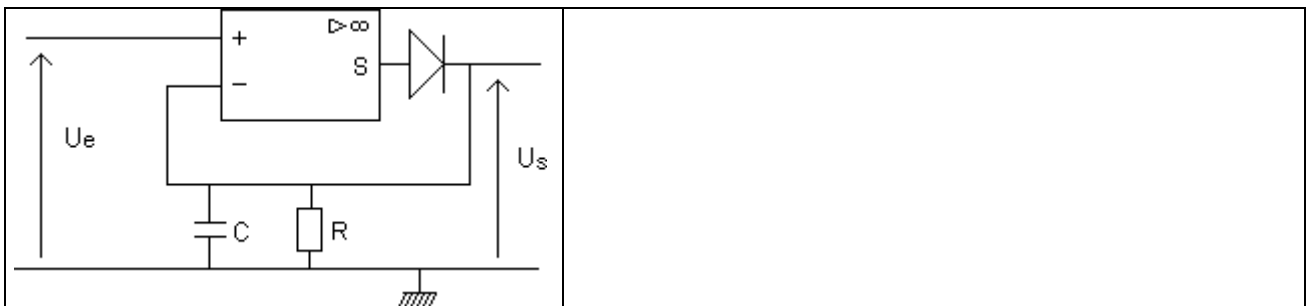


L'amplificateur est supposé fonctionner dans sa zone linéaire.

$$U_s = U_e$$

$$KR i_e = -R i_s \text{ donc } i_s = -K i_e.$$

**VIII [Spé] Détecteur d'enveloppe**





# ELECTROSTATIQUE

## 1 – Champ électrostatique

### I Interaction électrostatique – Charges

#### 1 – Rappels

Interaction électromagnétique = interaction entre particules ou corps chargés.

Interaction électrostatique = interaction entre particules chargées fixes dans le référentiel d'étude.

Portée : grande      Loi de force en  $1/r^2$  pour des particules chargées ponctuelles.  
A distances égales, elle est beaucoup plus intense que l'interaction gravitationnelle.

#### 2 – Charges

##### a – Généralités

La charge est la caractéristique d'un corps ou d'une particule qui fait que celui-ci (ou celle-ci) subit l'interaction électrostatique (tu parles d'une définition !)

On mettra dans une même classe deux corps chargés qui ont les mêmes effets sur un même 3<sup>e</sup> corps chargé.

On constate que 2 corps chargés de la même classe se repoussent toujours.

Particules chargées  $> 0$  se comportent comme un proton. Particules chargées  $< 0$  se comportent comme un électron.

##### b – La charge est quantifiée (ou discontinue)

Il existe une charge élémentaire  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  C (expérience de Millikan)

Toute charge est un nombre entier  $\times e$ .

Cette discontinuité n'apparaît pas au niveau macroscopique.

Corps macroscopique chargé = corps auquel on a apporté ou enlevé un certain nombre de particules chargées. Il a la propriété d'attirer des objets très légers. Il est impossible de dénombrer le nombre de particules élémentaires en excès ou en défaut portées par un tel corps.

Procédé expérimental pour comparer des charges : on mesure la norme de la force qu'exercent 2 charges sur une troisième. On définit le rapport de 2 charges comme le rapport des forces (en normes).

##### c – Conservation de la charge

Pour un système fermé, la charge totale reste constante.

## II Loi de Coulomb

#### 1 – Expression

Dans le vide,

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \frac{q_1 q_2}{4 \pi \epsilon_0 r^2} \vec{u}_{12} \quad \text{où } \epsilon_0 \text{ est la permittivité diélectrique du vide ; } 1 / 4 \pi \epsilon_0 = 9 \cdot 10^9 \text{ uSI}$$

Dans un milieu isolant, homogène et isotrope (pas de direction privilégiée), on remplace  $\epsilon_0$  par  $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ .

Ex :  $\epsilon_r(\text{eau}) = 80$ ;  $\epsilon_r(\text{air}) = 1,00058$

#### 2 – Principe de superposition

"L'effet d'un ensemble de charges sur une charge test est la somme des effets de chaque charge prise séparément. Il y a indépendance des effets." [ ~demo ]

## III Champ électrique

#### 1 – Champ électrostatique créé par une charge ponctuelle

On substitue à la notion d'interaction à distance entre les charges  $q_1$  et  $q_2$  la notion d'action locale du champ  $\vec{E}$  créé par la charge  $q_1$  sur la charge  $q_2$ .

$\vec{E}(M) = (q / 4 \pi \epsilon_0 r^2) \vec{u}_r$  en coordonnées sphériques.

## 2 – Champ créé par un ensemble de charges ponctuelles

Le principe de superposition s'applique également aux champs électrostatiques créés par des charges ponctuelles.  
[ ~demo ]

### IV Répartitions de charges

Pour caractériser la répartition de la charge dans le volume  $V$ , on utilise la densité volumique de charge mobile  $\rho$ .  
 $dq = \rho(M) d\tau$ , où  $d\tau$  est choisit petit devant  $V$  mais grand à l'échelle atomique.

Ex : La charge est répartie de façon homogène  $\Leftrightarrow$  la distribution de charge est uniforme. Alors  $\rho = Q / V$ .

Distribution de charge à symétrie sphérique :  $\rho(M) = f(OM)$

Expressions de  $d\tau$  :

Cartésien	Cylindrique	Sphérique
$dx dy dz$	$r dr d\theta dz$	$r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$

Expression de la charge totale portée par la distribution :  $Q = \iiint_V \rho d\tau$ .

Exemple : une sphère de centre  $O$  et de rayon  $R$ , uniformément chargée en volume avec la densité volumique de charge  $\rho$ . Calculer la charge totale de la distribution :  $(4/3) \pi R^3 \rho$  [ 2 méthodes : formule du volume et  $\iiint$  ]

#### Autres répartitions de charges :

Si l'épaisseur de la distribution est très inférieure aux autres dimensions de la distribution, on considère que les charges sont réparties sur une surface. Notion de densité surfacique de charge  $\sigma$ , où  $dq = \sigma(M) dS$ .

Si les charges sont réparties sur une ligne (non forcément droite), elle est caractérisée par la densité linéique de charges,  $\lambda$ , où  $dq = \lambda(M) d\ell$ .

### V Exercice d'application

Une charge  $+q$  est placée en B, d'abscisse  $+a$  et une charge  $-q$  est placée en A, d'abscisse  $-a$ .

Calcul du champ  $\vec{E}$  créé par la distribution de charges en tout point de l'axe, et tracé de  $\vec{E} \cdot \vec{u}_x$  en fonction de  $x$ .

## 2 – Potentiel électrostatique

### I Cas d'une charge ponctuelle

#### 1 – Circulation du champ créé

Circulation élémentaire du champ électrostatique est  $\delta C = \vec{E} \cdot d\vec{OM} = (q/4\pi\epsilon_0 r^2) dr$

$$C_{A \rightarrow B} = \int_{AB} \vec{E} \cdot d\vec{OM} \quad (\text{curviligne})$$

$C_{A \rightarrow B} = (q/4\pi\epsilon_0) (1/r_A - 1/r_B)$  pour un champ créé par une charge ponctuelle.

Indépendant du chemin suivi  $\rightarrow \delta C = dC$ .

#### 2 – Potentiel électrostatique

Il existe une fonction scalaire  $V$  telle que  $dV = -dC \Rightarrow V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + c^{te}$ .

On a donc  $\vec{E} = -\text{grad } V \quad [ \sim d ]$

### II Potentiel créé par une répartition quelconque de charges

#### 1 – Cas de $n$ charges ponctuelles

Le principe de superposition s'applique aussi aux potentiels ( car  $\text{grad}$  est linéaire )

$$V = \sum_{1 \leq i \leq n} q_i/4\pi\epsilon_0 r_i + c^{te}.$$

S'il n'y a pas de charges à l' $\infty$ , on peut envisager de placer que  $V_\infty = 0 = c^{te}$ .

Anyway, on ne peut pas mesurer un potentiel...

#### 2 – Distribution volumique de charge

$$dq = \rho(P) d\tau.$$

$$\vec{E}(M) = (1/4\pi\epsilon_0) \iiint_V (\rho(P) \cdot d\tau/PM^2) \vec{u}_{PM}. \quad (\text{principe de superposition})$$

$$V(M) = (1/4\pi\epsilon_0) \iiint_V (\rho(P) \cdot d\tau/PM). \quad (\text{s'il n'y a pas de charges à l}'\infty ; \text{sinon calcule } \vec{E} \text{ puis on en déduit } V)$$

#### 3 – Autres distributions de charges

$$\text{Surfacique : } \vec{E}(M) = (1/4\pi\epsilon_0) \iint_S (\sigma(P) \cdot dS/PM^2) \vec{u}_{PM}.$$

$$V(M) = (1/4\pi\epsilon_0) \iint_S (\sigma(P) \cdot dS/PM)$$

$$\text{Linéique : } \vec{E}(M) = (1/4\pi\epsilon_0) \int_\Gamma (\lambda(P) \cdot d\ell/PM^2) \vec{u}_{PM}.$$

$$V(M) = (1/4\pi\epsilon_0) \int_\Gamma (\lambda(P) \cdot d\ell/PM)$$

### III Opérateur gradient (révisions)

Rappel des expressions de  $\text{grad } V$  dans les coordonnées cartésiennes, cylindriques, sphériques.

### IV Différence de potentiel et travail de la force électrostatique

$$\delta W = \vec{f} \cdot d\vec{OM} = q \vec{E} \cdot d\vec{OM} = -q dV$$

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{f}) = q(V_A - V_B)$$

$$\vec{f} = q\vec{E} = -q \text{grad } V = -\text{grad}(qV) \text{ dérive d'une énergie potentielle } \mathcal{E}_P = qV.$$

### V Lignes de champ et surfaces équipotentielles

#### 1 – Lignes de champ

Ligne de champ = courbe de l'espace tangente en chacun de ses points au champ  $\vec{E}$ . Elles sont orientées dans le sens du champ. Equation des lignes de champ :

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z} \text{ en cartésien}$$

$$\frac{dr}{E_r} = r \frac{d\theta}{E_\theta} = \frac{dz}{E_z} \text{ en cylindrique}$$

$$\frac{dr}{E_r} = r \frac{d\theta}{E_\theta} = r \sin\theta \frac{d\phi}{E_\phi} \text{ en sphérique}$$

Propriétés des lignes de champ

- Par un point de l'espace passe une ligne de champ et une seule ; le seul cas où des lignes de champ peuvent se couper en un point est le cas où  $\vec{E} = \vec{0}$ .

- Une ligne de champ  $\vec{E}$  ne peut pas être une boucle fermée ; le champ électrostatique est dans le sens des potentiels décroissants.

Tube de champ = surface engendrée par les lignes de champ interceptant un contour fermé [ ex ]

## 2 – Surfaces équipotentielles

Surface équipotentielle = lieu des points de l'espace où le potentiel électrostatique garde une même valeur.

Les lignes de champ sont orthogonales aux surfaces équipotentielles. [  $\sim d$  ]

Ex : cas d'une charge ponctuelle.

## VI Considérations sur les symétries et les invariances

Vecteur vrai = Vecteur polaire = vecteur indépendant de l'orientation choisie (ex : vecteur position, vitesse,  $\vec{E}$ , forces)

Pseudo-vecteur = Vecteur axial = vecteur dont le sens dépend de l'orientation (produit vectoriel de vecteurs vrais, champ  $\vec{B}$ , vecteur rotation  $\vec{\Omega}$ )

Symétrie par rapport à un plan d'un pseudo-vecteur : il se transforme en l'opposé de son symétrique (=antisymétrique), alors qu'un vecteur vrai se transforme en son symétrique.

En un point M du plan de symétrie,  $\vec{E}$  est égal à son symétrique ;  $\vec{E}$  est donc contenu dans ce plan.

En un point M du plan de symétrie,  $\vec{B}$  est égal à son antisymétrique ;  $\vec{B}$  est donc orthogonal au plan.

Plan d'antisymétrie = C'est le cas où le système S' obtenu par symétrie ne coïncide avec S qu'à condition d'opérer une transformation physique comme : changement de sens du courant, changement du signe des charges.

Un vecteur vrai se transforme en son antisymétrique ; un pseudovecteur se transforme en son symétrique.

En un point M du plan d'antisymétrie,  $\vec{E}$  est égal à son antisymétrique ;  $\vec{E}$  est donc orthogonal au plan.

En un point M du plan d'antisymétrie,  $\vec{B}$  est égal à son symétrique ;  $\vec{B}$  est donc contenu dans le plan.

Invariances d'une distribution = transformations qui laissent la distribution inchangée.

$\vec{E}$  possède les mêmes propriétés d'invariance que la distribution de charges qui le crée.

## VII Exercice d'application

Soit un disque de centre O et de rayon R uniformément chargé en surface avec la densité surfacique constante  $\sigma$ . Calculer le potentiel électrostatique et le champ électrostatique créés par cette distribution sur son axe Ox.

$$V(M) = (\sigma/2\epsilon_0) (\sqrt{R^2 + x^2} - |x|)$$

Compte tenu des symétries,  $\vec{E}$  est nécessairement porté par Ox.

$$\vec{E} = -dV/dx \vec{u}_x \quad \text{discontinue pour } x = 0.$$

## VIII Continuité du potentiel

Le potentiel et le champ électrostatique créés par une distribution volumique de charges sont définis et continus en tous points de l'espace.

Le potentiel créé par une distribution surfacique de charges est défini et continu en tout point de l'espace. Le champ créé par ce type de distribution subit une discontinuité à la traversée de la surface chargée.

Le potentiel et le champ peuvent ne pas être définis en un point d'une distribution linéique. [ ça m'avance bcp ]

[ demo HP que V reste défini et continu sur une surface chargée ]

### 3 – Flux des champs électrostatiques, Théorème de Gauss

#### I Flux d'un champ de vecteurs

##### 1 – Élément de surface

Soit une surface ouverte  $\Sigma$  s'appuyant sur un contour fermé  $\Gamma$ , sur lequel on choisit un sens d'orientation.

Vecteur unitaire normal  $\vec{n}$  : orthogonal au plan tangent à la surface en M, sens donné par l'orientation de  $\Gamma$ .

Vecteur élément de surface  $d\vec{S} = dS \vec{n}$  où  $dS$  est l'aire d'un élément de surface entourant M.

Ces 2 vecteurs sont des pseudovecteurs.

Soit une surface fermée S. Par convention, le sens du vecteur unitaire normal N en un point quelconque de la surface est toujours de l'intérieur vers l'extérieur. On parle de normale sortante.

##### 2 – Définition du flux

Le flux élémentaire  $d\Phi$  d'un vecteur  $\vec{b}$  à travers un élément de surface  $dS$  est  $d\Phi = \vec{b} \cdot d\vec{S}$ .

Le flux  $\Phi$  de  $\vec{b}$  à travers une surface finie  $\Sigma$  est  $\Phi = \iint_{\Sigma} \vec{b} \cdot d\vec{S}$ .

$$\Phi(\vec{b}_1 + \vec{b}_2, \Sigma) = \Phi(\vec{b}_1, \Sigma) + \Phi(\vec{b}_2, \Sigma)$$

$$\Phi(\vec{b}, \Sigma_1 \cup \Sigma_2) = \Phi(\vec{b}, \Sigma_1) + \Phi(\vec{b}, \Sigma_2)$$

Le flux de  $\vec{b}$  à travers une surface fermée S est  $\Phi = \oiint_S \vec{b} \cdot d\vec{S}$ .

$d\vec{S}$  est sortant  $\Rightarrow$  on parle de flux sortant.

Pour certains vecteurs, le flux à travers n'importe quelle surface fermée est nul. Alors leur flux à travers une surface ouverte ne dépend que du contour sur lequel s'appuie cette surface. (indep de la surface) [ demo ]

Le champ magnétostatique vérifie cette propriété. CNS :  $\partial b_x / \partial x + \partial b_y / \partial y + \partial b_z / \partial z = \text{div } \vec{B} = 0$

#### III Angle solide

##### 1 – Introduction

Angle dans le plan :  $\alpha = s/R$  où s est la longueur de l'arc intercepté sur le cercle de centre O et de rayon R. On peut ensuite algébriser  $\alpha$ , en choisissant un axe de référence et un sens positif pour les angles.

Angle solide :  $\Omega = \pm S/R^2$  où S est l'aire de la surface interceptée par le faisceau de demi-droites sur une sphère de centre R.  $R \geq 0 \Leftrightarrow \vec{OS}$  dans le même sens que  $\vec{n}$  (il faut donc orienter la surface). Unité : stéradian, sr

##### 2 – Exemples de calculs

On veut calculer l'angle solide défini par un cône de révolution de  $\frac{1}{2}$  angle au sommet  $\alpha$ .

$$\boxed{\Omega = 2\pi(1 - \cos\alpha)}$$
 [ demo géométrie ]

L'angle solide de l'espace tout entier est  $4\pi$  sr.

##### 3 – Angle solide élémentaire

$$d\Omega = \frac{d\vec{S} \cdot \vec{e}_r}{r^2} \quad \text{où } d\vec{S} \text{ est un petit contour, } \vec{e}_r = \vec{OM}/r, \text{ et } r = \|\vec{OM}\|.$$

(définition d'après  $dS_0/r^2$  et produits scalaires ... minidemo)

##### 4 – Expression générale de l'angle solide

$$\boxed{\Omega = \iint_{\Sigma} \frac{\vec{e}_r \cdot d\vec{S}}{r^2}}$$
 Par définition...

#### III Flux du champ électrostatique créé par une charge ponctuelle

##### 1 – Flux élémentaire

$d\Phi = (q/4\pi\epsilon_0)d\Omega$ . est le flux élémentaire de  $\vec{E}$  à travers  $dS$ .

## 2 – Flux sortant d'une surface fermée

### a – La charge q est à l'intérieur de S

$d\Phi = (q/4\pi\epsilon_0)d\Omega$  car tout faisceau issu de la charge coupe la surface un nombre impair de fois.  
 $\Rightarrow \Phi = q/\epsilon_0 = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$ .

### b – La charge q est à l'extérieur de S

Alors  $\Phi = 0$ .

## IV Flux du champ créé par une répartition de charges – Théorème de Gauss

"Soit une surface fermée S quelconque. Le flux sortant de la surface fermée S est de

$$\Phi = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = Q_{\text{int}} / \epsilon_0, \text{ où } Q_{\text{int}} \text{ est la charge électrique totale intérieure à la surface S.}$$

[ ~demo ]

## V Exemple d'application

Le théorème de Gauss permet de calculer le champ créé par une distribution de charges lorsqu'elle présente beaucoup de symétries et d'invariants.

Soit une sphère creuse de centre O et de rayon R uniformément chargée en surface avec la densité surfacique  $\sigma$ .

On veut calculer le champ  $\vec{E}$  créé par cette distribution.  $\vec{E}(M) = E_r(r, \theta, \varphi) \vec{u}_r + E_\theta(r, \theta, \varphi) \vec{u}_\theta + E_\varphi(r, \theta, \varphi) \vec{u}_\varphi$ .

Symétries et invariants  $\Rightarrow \vec{E}(M) = E(r) \vec{u}_r$ .

Choix de la surface fermée de Gauss : elle doit porter le point M, et doit respecter la symétrie.  $\rightarrow$  sphère de centre O.

[ ... ]  $\vec{E} = (Q/4\pi\epsilon_0) \vec{u}_r = (\sigma R^2/\epsilon_0 r^2) \vec{u}_r$  : le champ créé à l'extérieur de la distribution a la même expression que celui qui serait créé par une charge ponctuelle égale à la charge totale de la distribution Q, placée au point O.

A l'intérieur, le champ est nul.  $\vec{E}$  subit une discontinuité à la traversée de la surface chargée égale à  $\sigma/\epsilon_0$ .

Potentiel électrostatique :  $\vec{E} = -\text{grad } V$ ... Pour  $r < R$ ,  $V = c^te = V(R)$  car V est continu.

## IV Analogies avec le champ de gravitation

$$\vec{E} \leftrightarrow \vec{G} \quad q \leftrightarrow m \quad 1/4\pi\epsilon_0 \leftrightarrow -\mathcal{G} \quad 1/\epsilon_0 \leftrightarrow -4\pi \mathcal{G}$$

"On peut appliquer au champ de gravitation les mêmes résultats qu'au champ électrostatique ( $\rightarrow$  théorème de Gauss). Le flux du champ de gravitation à travers une surface fermée est égal au produit de la masse totale intérieure

à la surface par  $-4\pi \mathcal{G}$ ."  $\Phi_\Sigma(\vec{G}) = \iint_\Sigma \vec{G} \cdot d\vec{S} = -4\pi \mathcal{G} M_{\text{int}}$ .

Application à la Terre, considérée comme une distribution de masse à symétrie sphérique, caractérisée par  $\rho(r)$  :

$$\vec{G}(M) = -\frac{4\pi \mathcal{G}}{r^2} \int_0^r \rho(u) u^2 du \vec{e}_r.$$

## 4 – Calculs de champs et de potentiels électrostatiques

Méthodes :

- Rechercher les symétries et les invariants de la distrib. puisque  $\vec{E}$  possède les mêmes.
- Voir s'il est possible d'appliquer le principe de superposition.
- Si la distribution possède suffisamment de symétries et d'invariants, calculer  $\vec{E}$  avec le th. de Gauss puis calculer V par la relation  $E = -\text{grad } V$ . Comme surface de Gauss, on prend en général des surface équipotentielles fermées par des surfaces où  $\vec{E}$  est normal à  $d\vec{S}$ .
- Si le théorème de Gauss n'est pas applicable simplement, et s'il n'y a pas de charges à l'infini, calculer V directement et en déduire  $\vec{E}$ .
- Si aucune méthode n'est utilisable, calculer directement  $\vec{E}$  puis en déduire V.

### I Plan uniformément chargé

Soit un plan uniformément chargé en surface avec la densité surfacique  $\sigma$ .

$$[ \dots \text{ Th Gauss } \dots ] \quad \begin{aligned} \vec{E} &= +(\sigma/2\epsilon_0) \vec{u}_z \text{ si } z > 0 \\ \vec{E} &= -(\sigma/2\epsilon_0) \vec{u}_z \text{ si } z < 0 \end{aligned}$$

Le champ est uniforme dans chaque demi-espace. Il subit une continuité à la traversée du plan égale à  $\sigma/\epsilon_0$ .

Potentiel électrostatique :  $V = -\sigma |z| / 2\epsilon_0 + c^te$ .

### II Sphère uniformément chargée en volume

Soit une sphère de rayon R uniformément chargée en volume, avec la densité volumique  $\rho$ .

$$[ \dots ] \quad \begin{aligned} \text{Si } r > R : \quad \vec{E} &= (Q/4\pi r^2 \epsilon_0) \vec{u}_r = (\rho R^3/3\epsilon_0 r^2) \vec{u}_r. & V &= Q/4\pi \epsilon_0 r = \rho R^3/3\epsilon_0 r. \\ \text{Si } r < R : \quad \vec{E} &= (Qr/4\pi \epsilon_0 R^3) \vec{u}_r = (\rho r/3\epsilon_0) \vec{u}_r. & V &= (\rho/6\epsilon_0)(3R^2 - r^2) = (Q/8\pi \epsilon_0 R^3)(3R^2 - r^2) \end{aligned}$$

$\vec{E}$  est continu ; V est donc dérivable (pour  $r = R$  en particulier)

### III Ligne uniformément chargée

Soit une droite uniformément chargée en longueur avec la densité linéique  $\lambda$ . Coord cyl.

$$[ \dots ] \quad \vec{E} = (\lambda/2\pi \epsilon_0 r) \vec{u}_r, \quad V = -(\lambda/2\pi \epsilon_0) \ln r + c^te = (\lambda/2\pi \epsilon_0) \ln(r_0/r)$$

## 5 – Le dipôle électrostatique

### I Potentiel et champ électrostatique créé par un dipôle électrostatique

#### 1 – Définition

Dipôle électrostatique = système de 2 charges ponctuelles opposées  $-q$  et  $+q$  ( $q > 0$ ) placées respectivement en 2 points N et P telle que  $NP = 2a$  est très petit devant toutes les autres distances que l'on considèrera.

Moment du dipôle :  $\vec{p} = q \vec{NP}$  (en C.m)

#### 2 – Potentiel électrostatique créé par le dipôle à grande distance

O est le milieu de [NP]. Soit  $\theta = (\vec{OP}, \vec{OM})$

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{PM} - \frac{1}{NM} \right) = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{e}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad [ \text{d1 ordre 1 de } a/r ]$$

#### 3 – Champ électrostatique créé à grande distance

$$\vec{E} = -\text{grad } V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p \cos \theta}{r^3} \vec{u}_r + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin \theta}{r^3} \vec{u}_\theta = \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{e}_r) \vec{e}_r - \vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

Champs pour  $\theta = 0, \theta = \pi/2, \theta = \pi$  : ce sont des positions dites de Gauss, car  $E_r$  ou  $E_\theta$  est nul en ces points.

#### 4 – Lignes de champ et surfaces équipotentielles

Equation des lignes de champ :  $r = \lambda \sin^2 \theta$ .

Equation des surfaces équipotentielles :  $r^2 = \beta \cos \theta$ . (à grande distance)

## II Le dipôle électrostatique dans une champ électrostatique uniforme

Soit un dipôle rigide placé dans un champ électrostatique uniforme  $\vec{E}_0$ . On s'intéresse aux effets de  $\vec{E}_0$  sur le dipôle.

$\vec{R} = q\vec{E}_0 - q\vec{E}_0 = \vec{0} \Rightarrow$  Le centre du dipôle a une vitesse constante.

Couple = ensemble de 2 forces opposées qui n'ont pas la même droite d'action.

$$\vec{m}_{O \text{ ext}} = \vec{p} \wedge \vec{E}_0 \quad [ \text{demo rapide} ]$$

A l'équilibre,  $\vec{m}_{O \text{ ext}} = \vec{0}$ . 2 positions d'équilibre...

Energie potentielle du dipôle :  $\mathcal{E}_P = -\vec{p} \cdot \vec{E}_0$ . [ demo rapide ]

A l'échelle du dipôle, on pourra considérer la plupart du temps et en 1<sup>e</sup> approximation qu'un champ externe quelconque est uniforme. Lorsqu'il n'est pas uniforme, et qu'on en tient compte, la résultante des forces exercées sur le dipôle n'est plus nulle. Il y a donc orientation et déplacement du centre d'inertie du dipôle.

Un dipôle est caractérisé par son moment dipolaire  $\vec{p}$ .

## III Applications

### 1 – Moment dipolaire des molécules

#### a – Moment dipolaire permanent

Une molécule possède un moment dipolaire permanent, ou est polaire, lorsque le barycentre des charges négatives n'est pas confondu avec le barycentre des charges positives.

Contex : molécules symétriques (H<sub>2</sub>, CH<sub>4</sub>) Ex : HCl (car Cl est plus électronégatif que H), H<sub>2</sub>O...

$\|\vec{p}_{\text{HCl}}\| = 1,03 \text{ D}$  où 1 D = 1 debaye =  $1/3 \cdot 10^{-29} \text{ C.m}$

#### b – Moment dipolaire induit, polarisabilité

Si on place une molécule non polaire dans un champ électrostatique extérieur, les charges positives subissent des forces dans le sens du champ, tandis que les charges négatives subissent des forces en sens inverse. Les barycentres des charges + et - ne seront plus confondus. La molécule se polarise. Il apparaît un moment dipolaire induit :

$$\vec{p} = \alpha \epsilon_0 \vec{E} \quad (\text{formule empirique}) \quad \alpha \text{ (m}^3\text{) est de l'ordre du volume d'une molécule}$$

### 2 – Hydratation d'un ion (solvation)

Si on place un ion dans un solvant polaire, cet ion s'entoure des molécules du solvant. On dit qu'il se solvate. Si le solvant est l'eau, on dit qu'il s'hydrate. Dans le champ créé par l'ion, les molécules d'un solvant polaire tendent à s'aligner le long des lignes de champ et à se déplacer vers les lignes de champ plus intenses lorsqu'elles sont convenablement orientés.



# MAGNETOSTATIQUE

## 1 – Le champ magnétostatique

On s'intéresse aux phénomènes indépendants du temps. Le champ magnétique est appelé champ magnétostatique.

### I Faits expérimentaux

#### **1 – Action magnétique subie par un aimant**

Aimant naturel = magnétite ou oxyde magnétique de fer ( $\text{Fe}_3\text{O}_4$ ).

Un aimant attire le fer, le cobalt, le nickel et certains de leurs alliages (par ex : acier (Fe, C, ~Ni) oui ; pas  $\text{Fe}_2\text{O}_3$ ).

Les aimants interagissent, l'interaction pouvant être soit attractive, soit répulsive. Tous ces phénomènes sont dits magnétiques.

Boussole = aimant allongé libre de ses rotations. Loin de tout aimant, elle s'oriente dans une direction privilégiée, proche de la direction du pôle nord géographique. Cette orientation indique que la Terre est à l'origine de phénomènes magnétiques. On peut considérer la Terre comme un aimant qui crée un champ magnétostatique. L'extrémité de l'aiguille qui pointe dans la direction voisine de celle du pôle Nord est appelée pôle Nord de l'aimant. L'autre est appelée pôle Sud. 2 pôles identiques se repoussent toujours ; 2 pôles opposés s'attirent toujours.

ATTENTION : Le pôle Nord géographique de la Terre correspond à son pôle Sud magnétique.

La boussole permet de caractériser en tout point de l'espace la direction et l'intensité des phénomènes magnétiques qui se produisent en ces points. On dit qu'en ces points règne un champ magnétostatique  $\vec{B}$ , de direction = celle de l'aiguille. Sens : SN. Intensité  $\nearrow$  quand la fréquence d'oscillation de l'aiguille aimantée  $\nearrow$ .

Un conducteur parcouru par un courant continu crée un champ  $\vec{B}$  dont le sens dépend du sens du courant (Oersted).

#### **2 – Actions magnétiques subies par un circuit parcouru par un courant continu**

##### **a – Action d'un aimant sur un tronçon de circuit**

Expérience de Laplace. Aimant en U. Rails. Le barreau se met en mouvement, orthogonalement à sa propre direction. Le sens de déplacement dépend du sens du courant et du sens de  $\vec{B}$ .

##### **b – Action d'un circuit parcouru par un courant sur un tronçon de circuit parcouru par un courant**

Deux conducteurs filiformes parcourus par des courants de même sens s'attirent.

Le conducteur parcouru par  $i_1$  crée un champ magnétostatique  $\vec{B}_1$  qui exerce ses effets sur le conducteur parcouru par  $i_2$ , et inversement.

Loi de Laplace : *Un tronçon élémentaire de circuit filiforme orienté caractérisé par le vecteur  $d\vec{l}$  orienté arbitrairement comme le circuit, parcouru par un courant d'intensité  $i$ , et placé dans un champ magnétostatique  $B$  subit la forme élémentaire :*

$$d\vec{F} = i d\vec{l} \wedge \vec{B}.$$

Rem :  $i d\vec{l}$ , comme  $\vec{j}$ , est toujours dans le sens du courant (indep. conventions).

#### **3 – Actions magnétiques subies par un faisceau de particules chargées en mouvement**

Un faisceau de particules chargées en mouvement est dévié par un aimant. On a  $\vec{f} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$ ,  
où  $\vec{v}$  est la vitesse de la particule dans un référentiel lié aux sources du champ.

### II Définition du champ magnétostatique

En présence d'aimants, ou de circuits parcourus par des courants continus, l'espace environnant acquiert de nouvelles propriétés qui sont mises en évidence par des boussoles ou des tronçons de circuits parcourus par des courants. Ces effets sont décrits par une grandeur vectorielle, le champ magnétostatique  $\vec{B}$  ;

direction = celle d'une aiguille aimantée, placée au point considéré

sens = S-N de l'aiguille

L'expérience montre que la connaissance locale du champ  $B$  dans une région de l'espace suffit pour décrire les effets magnétiques qui s'y produisent. On n'a pas besoin dans ce cas-là de décrire les sources de façon détaillée.

Le champ magnétique  $\vec{B}$  est défini à partir de l'expression de la force de Lorentz :  $\vec{f} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$ .

Rem : Le vecteur  $\vec{B}$  est un pseudo-vecteur.  $\|\vec{B}\|$  est en teslas (T).

Les champs usuels ont des intensités qui vont de  $2 \cdot 10^{-5}$  T (~ champ terrestre) à quelques teslas.

Le théorème de superposition s'applique aux champs magnétostatiques.

### III Les sources du champ magnétostatique

- ♦ aimants (peu étudiés car on ne connaît pas d'expression de  $\vec{B}$ ).
- ♦ circuits parcourus par des courants continus. Dorénavant, on ne s'intéresse qu'aux champs magnétostatiques créés par des circuits parcourus par des courants continus.

#### 1 – Le courant électrique

$$di = \vec{j} d\vec{S} = d^2q/dt \quad \vec{j} = \rho_m \vec{v}. \quad (\text{revoir cours électrocinétique})$$

#### 2 – Intensité du courant

L'intensité du courant à travers une section S du conducteur est la charge algébrique qui traverse S dans le sens positif d'orientation par unité de temps.

$$i = \iint_S \vec{j} d\vec{S} \text{ est donc le flux de } \vec{j} \text{ à travers S.}$$

#### 3 – Autre distribution de courant

Si le volume qui contient les charges mobiles est de très faible épaisseur, on peut être amené à décrire la distribution de courant comme une distribution surfacique de courant. On définit alors le vecteur densité de courant surfacique :

$$\vec{j}_s = \sigma_m \vec{v}, \quad \text{où } \sigma_m \text{ est la densité surfacique de charges mobiles}$$

On a  $\vec{j}_s = e \vec{J}$ , où e est l'épaisseur de la distribution de courant (très faible).

Soit i l'intensité du courant à travers une section du conducteur.

$$i = \iint_S \vec{j} d\vec{S} = \int_{\Gamma} \vec{j}_s d\vec{r} \vec{n}.$$

### IV Loi de Biot et Savart

#### 1 – Cas d'un circuit filiforme

Soit un circuit filiforme (C) orienté, parcouru par un courant continu d'intensité i. Soit un élément de circuit au point P, de longueur  $d\ell$ , orienté dans le même sens que le circuit. Le circuit filiforme crée en un point M le champ :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_C \frac{i d\vec{\ell} \wedge \vec{u}_{PM}}{r^2}$$

où  $\mu_0$  est la perméabilité magnétique du vide.  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H m}^{-1}$ .

Rem :  $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$ .

Rem :  $d\vec{B} = (\mu_0 i / 4\pi) d\vec{\ell} \wedge \vec{P}M / PM^3$  est la contribution mathématique de l'élément de circuit  $d\ell$  au champ global  $\vec{B}$ .

On ne peut pas considérer  $d\vec{B}$  comme le champ magnétostatique créé par l'élément de circuit  $d\ell$  car cet élément de circuit n'existe pas indépendamment du reste du circuit.

#### 2 – Cas d'une distribution volumique de courants continus

Ligne de courant = courbe tangente en chacun de ses points à  $\vec{j}$  (lignes de champ de  $\vec{j}$ ). En régime établi, ce sont les trajectoires moyennes des porteurs de charge mobile.

Tube de courant = surface engendrée par les lignes de courant s'appuyant sur un contour fermé.

Soit un tube de courant élémentaire. Les lignes de courant s'appuient sur le contour fermé d'une surface élémentaire  $dS$ . Soit  $d\vec{S}$ , dans le sens d'orientation du conducteur.

[...]  $\vec{j} d\tau = i d\vec{\ell}$  où  $d\tau = d\vec{S} d\vec{\ell}$  est un volume élémentaire.

On considère un tube de champ élémentaire comme un circuit filiforme. [...]

$$\text{Bref, on a : } \vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{j}(P) d\tau \wedge \vec{u}_{PM}}{r^2}$$

### V Exemples de calculs de champs magnétostatiques

#### 1 – Cas du fil rectiligne infini

On commence par calculer le champ magnétostatique créé par un fil rectiligne de longueur finie parcouru par un courant continu d'intensité i. [ considérations de sym ; calculs ]. Concl :  $\vec{B}(M) = \mu_0 i (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) \vec{u}_\theta / (4 \pi r)$ , en notant  $\alpha_1 = (-\vec{u}_r, \vec{MP}_{\text{haut}})$  et  $\alpha_2 = (-\vec{u}_r, \vec{MP}_{\text{bas}})$ . Pour un fil infini,  $\vec{B}(M) = \mu_0 i \vec{u}_\theta / (2 \pi r)$ .

Les lignes de champ sont des cercles centrés sur le fil et dans des plans  $\perp$  au fil.

Si  $i > 0$  : règle de la main droite qui se ferme.

## 2 – Définition de l'ampère

L'ampère est l'intensité d'un courant continu qui est maintenu dans 2 conducteurs rectilignes infinis, parallèles, distants de 1 m dans le vide, qui produit entre eux une force de  $2 \cdot 10^{-7}$  N par mètre de longueur.  
[ demo que c'est correct ]

## 3 – Champ créé par une spire circulaire sur son axe

[...]  $\vec{B}(M) = (\mu_0 i / 2R) \sin^3\alpha \vec{u}_z$  où  $\alpha = (\vec{M}z', \vec{MP})$

Pour une bobine plate comportant N spires circulaires de rayon R, on aura sur l'axe de la bobine

$$\vec{B}(M) = (\mu_0 N i / 2R) \sin^3\alpha \vec{u}_z.$$

## 4 – Champ créé sur l'axe d'un solénoïde circulaire

[...]  $\vec{B}(M) = (\mu_0 N i / 2\ell) (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2)$  où  $\alpha_1 = (\vec{M}z', \vec{MP}_1)$  et  $\alpha_2 = (\vec{M}z', \vec{MP}_2)$

Très souvent, on pose  $n = N / \ell$

$$\vec{B}(M) = (\mu_0 n i / 2) (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2)$$

Cas du solénoïde long : Si M est loin des extrémités et à l'intérieur,  $\vec{B}(M) = \mu_0 n i \vec{u}_z$ .

## 5 – Modèle du solénoïde infini

[ Symétries + Invariants ]  $\rightarrow \forall M$  à l'intérieur,  $\vec{B}(M) = B_z(r) \vec{u}_r$ .

On montrera que en fait,  $\vec{B}$  est uniforme à l'intérieur du solénoïde infini :  $\vec{B}(M) = \mu_0 n i \vec{u}_z$ .

Le modèle du solénoïde infini décrit la structure du champ créé par un solénoïde allongé réel loin de ses extrémités.

# 2 – Topographie du champ magnétique

## I Spectres magnétiques

On saupoudre de la limaille de fer sur plaque plane. On la place dans le champ  $\vec{B}$  créé par un aimant ou un circuit parcouru par un courant continu. Les grains de limaille dessinent une figure appelée spectre magnétique. Ce spectre est constitué de lignes qui sont les lignes du champ  $\vec{B}$  matérialisée par les grains de limaille.

On ne matérialise que quelques lignes dans un plan particulier. Les grains de limaille s'orientent dans le champ  $\vec{B}$  : ils s'aimantent et se comportent comme des petites boussoles.

## II Spectres de quelques aimants

◆ Aimant droit : ( || )

◆ Aimant en U : dans l'entrefer de l'aimant, les lignes de champ sont //, ce qui indique un champ uniforme.

## III Spectres créés par des circuits parcourus par des courants continus

◆ Fil rectiligne : les lignes de champ sont des cercles centrés sur le fil. Contrairement aux lignes du champ électrostatique qui divergent à partir des sources du champ et qui ne sont jamais des courbes fermées, les lignes du champ magnétostatique sont des courbes fermées qui s'enroulent autour des sources du champ.

◆ Spire circulaire.

◆ Bobine longue ou solénoïde.

◆ Bobine de Helmholtz ( les 2 bobines sont parcourues par des courants de même sens et de même intensité).

## 3 – Circulation et flux du champ magnétostatique

### I Circulation du champ magnétostatique

#### 1 – Exemple de calcul

Fil rectiligne.

#### 2 – Théorème d'Ampère

La circulation du champ magnétostatique le long d'une courbe fermée  $\Gamma$  est égale au produit de  $\mu_0$  par l'intensité totale traversant toute surface s'appuyant sur  $\Gamma$ .  $\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{\text{int}}$ .

$i_{\text{int}}$  est égal à la différence des intensités intérieures à  $\Gamma$  (enlacées par  $\Gamma$ ) qui traversent  $S$  dans le sens positif et de celles qui traversent  $S$  dans le sens négatif.

Le théorème d'Ampère relie  $\vec{B}$  à ses sources (les courants) ; il joue le même rôle que le théorème de Gauss en électrostatique. Il permet de calculer  $\vec{B}$  lorsque la distribution présente beaucoup de symétries.

Dans le cas d'une distribution volumique de courant :  $\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$ , où  $S$  est une surface quelconque s'appuyant sur  $\Gamma$ .

Remarque : en électrostatique,  $\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_{\Gamma} dV = 0 \Rightarrow \vec{E}$  est un champ conservatif.  $\vec{B}$  n'en est pas un.

### II Flux du champ magnétostatique

#### 1 – Introduction

Spire circulaire. Soit un tube de champ d'axe Oz, de section circulaire de rayon  $r(z)$ .

L'expérience montre que  $\pi r^2(z) B(z) = c^{\text{te}}$ .

#### 2 – Le flux du champ $\vec{B}$ est conservatif

Soit une surface  $S$  s'appuyant sur un contour orienté  $\Gamma$ . Le flux de  $\vec{B}$  à travers  $S$  est

$$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \text{ (en Weber, Wb)}$$

On admettra que  $\vec{B}$  est un champ à flux conservatif, ie. le flux de  $\vec{B}$  à travers toute surface fermée est nul.

Il en découle que le flux du champ  $\vec{B}$  à travers une surface ouverte ne dépend que du contour sur lequel s'appuie cette surface. Soit un tube de champ quelconque  $T$ . Soient 2 contours  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ .

[...] On a :  $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi$  : flux le long du tube de champ.

Pour un champ à flux conservatif, un tube de champ transporte un même flux tout au long du tube ( $\rightarrow$  nom).

## 4 – Champ magnétostatique de quelques distrib. de courants

### I Les méthodes de calcul

\* Si la distrib. de courant présente beaucoup de symétries et d'invariants, on utilisera le théorème d'Ampère.

\* Sinon, on utilise la loi de Biot & Savart, et on essaiera toujours de déterminer la direction de  $\vec{B}$  par des considérations de symétrie, ce qui permettra d'éviter le calcul des 3 coordonnées.

### II Exemples de calcul

#### 1 – Conducteurs cylindriques infinis

##### a – Cas du fil infini

$$[...] \vec{B}(M) = (\mu_0 i / 2 \pi r) \vec{u}_{\theta}$$

##### b – Cas du conducteur cylindrique infini plein

$$[...] \quad r \geq R \quad \vec{B}(M) = (\mu_0 i / 2 \pi r) \vec{u}_{\theta}, \quad r \leq R \quad \vec{B}(M) = (\mu_0 i r / 2 \pi R^2) \vec{u}_{\theta}.$$

$\vec{B}$  est continu.

**c – Cas du conducteur cylindrique infini creux**

$$[...]\quad r > R \quad \vec{B}(M) = (\mu_0 i / 2 \pi r) \vec{u}_\theta, \quad r < R \quad \vec{B}(M) = 0.$$

$\vec{B}$  subit une discontinuité à la traversée de la surface conductrice, égale à  $\mu_0 \vec{j}_s$  en norme.

**2 – Nappe de courant plane**

$$[...]\quad \vec{B}(M) = -\text{sig}(z) \mu_0 j_s \vec{u}_y / 2, \quad \vec{j}_s = j_s \vec{u}_x. \text{ Distrib} = \text{plan } xOy.$$

La discontinuité est de  $\mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{u}_z$ .

**3 – Solénoïde infini**

$$[...]\quad \vec{B}(M) = \mu_0 n i \vec{u}_z \text{ à l'intérieur.} \quad \vec{B}(M) = \vec{0} \quad \text{à l'extérieur.}$$

**5 – Dipôle magnétique****I Moment dipolaire magnétique ou moment magnétique**

Soit un circuit électrique plan parcouru par un courant continu d'intensité  $i$  et d'aire  $S$ .

Le moment magnétique de ce circuit est  $\vec{M} = i \vec{S}$ .

Le sens de  $\vec{M}$  ne dépend pas de l'orientation du conducteur, il ne dépend que du sens du courant

**II Dipôle magnétique**

Dipôle magnétique = distrib. de courant continu de moment magnétique  $\vec{M} \neq \vec{0}$ , dont les dim. sont supposées petites.

**III Champ magnétique créé à grande distance par un dipôle magnétique**

Comparaison des lignes de champ  $\vec{B}$  et  $\vec{E}$  pour des dipôles électrostatiques et magnétiques : à faible distance, les lignes de champ sont très différentes, mais à grande distance, elles se ressemblent beaucoup : on pourrait démontrer qu'elles sont identiques.

$$\vec{B}(M) = B_r \vec{u}_r + B_\theta \vec{u}_\theta \quad \text{où} \quad B_r = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2M \cos \theta}{r^3}$$

$$\text{et} \quad B_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{M \sin \theta}{r^3}$$

Le dipôle est dans le plan  $yOz$ , et son orientation indique  $x$ .

Sur l'axe de la spire ( $\theta = 0$ ), on retrouve la relation trouvée à partir de la loi de Biot & Savart :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\vec{M}}{z^3}$$

**IV Actions subies par un dipôle magnétique**

Le dipôle magnétique est placé dans un champ  $\vec{B}$  extérieur uniforme à l'échelle du dipôle.

Résultante des forces de Laplace : nulle.

Moment des forces de Laplace :  $\vec{m} = \vec{M} \wedge \vec{B}$ . [ demo ]

Energie potentielle :  $\mathcal{E}_P = -\vec{M} \cdot \vec{B}$ .

# OPTIQUE GEOMETRIQUE

## 1 – Propagation de la lumière

### I Lumière et objets lumineux

Opposition : sources de lumière/corps éclairés.

### II Les milieux de propagation

Un milieu transparent laisse passer la lumière (vide, air, eau au repos, verre...) Un milieu opaque ne laisse pas traverser la lumière. Un milieu translucide absorbe une partie de la lumière qu'il reçoit et laisse passer l'autre partie en la diffusant dans toutes les directions (verre dépoli, papier calque).

### III La propagation rectiligne de la lumière

#### 1 – Expérience

Une cuve contenant de l'eau avec de la fluorescéine permet d'observer un rayon laser. Dans l'air, la poussière de craie en suspension permet de remplacer la fluorescéine.

#### 2 – Principe

Dans le vide et dans les milieux transparents et homogènes, la lumière se propage en ligne droite.

#### 3 – Notion de rayon lumineux

Les droites qui correspondent à la trajectoire de la lumière sont appelées rayons lumineux.

### IV Les faisceaux lumineux

#### 1 – Définition

Un faisceau lumineux est un ensemble de rayons lumineux.

#### 2 – Les faisceaux lumineux

On distingue 3 types de faisceaux lumineux : faisceau divergent, faisceau parallèle (ou cylindrique), et faisceau convergent.

### V Compléments

#### 1 – Aspect ondulatoire de la lumière

##### a – Généralités

Un faisceau lumineux est caractérisé par la puissance lumineuse qu'il transporte et par sa nature spectrale. Cette 2<sup>e</sup> caractéristique s'interprète bien à partir d'une description ondulatoire de la lumière.

Onde mécanique : propagation d'un signal dans un milieu matériel (corde).  $y(t,x) = y(t - x/c, 0)$  Si le signal est entretenu, c'est-à-dire s'il se reproduit périodiquement, il y a établissement dans le milieu de propagation d'une onde.

$$\lambda = c T = c / \nu.$$

La lumière monochromatique peut s'interpréter comme une onde électromagnétique de période déterminée. Elle n'a pas besoin d'un milieu matériel pour se propager. Les grandeurs qui se propagent sont les champs  $\vec{B}$  et  $\vec{E}$ . Pour une onde monochromatique se propageant suivant l'axe des x, leur amplitude se met sous la forme :

$$s(t,0) = S_m \cos(\omega t) \quad \rightarrow \quad s(t,x) = S_m \cos(\omega t - 2\pi x/\lambda) \quad \text{où } c = 3 \cdot 10^8 \text{ m. s}^{-1}.$$

Lumière visible :  $400 \text{ nm} \leq \lambda \leq 800 \text{ nm}$ .

Le maximum de perception de l'œil est autour de 560 nm. Les zones de détections R, V, B se chevauchent largement.

BF : UV puis X puis  $\gamma$ .      HF : IR puis radio.

**b – Nature des sources**

Sources à spectres de raies ou de bandes = vapeurs atomiques (raies) ou moléculaires (bandes) sous basses pressions, excitées soit par chauffage soit par décharge. Ex : Hg (4 raies), Na (1 raie)

Sources à spectres continus = solide ou liquide porté à très haute température (incandescent). D'après le modèle du rayonnement du corps noir (Cf. cours de spé), un corps porté à une température donnée émet une lumière constituée d'une superposition monochromatique comportant toutes les longueurs d'onde.

Le LASER = sources quasiment monochromatiques. Ex : He – Ne. 633 nm

**c – Indice (optique) d'un milieu transparent**

Dans un milieu d'indice  $n$  ( $n \geq 1$ ),  $v = c / n$ .

Mais  $n$  décroît quand  $\lambda$  croît.  $\rightarrow v$  croît quand  $\lambda$  croît.  $v_{\text{violet}} < v_{\text{rouge}}$

C'est à l'origine du phénomène de dispersion par un prisme.  $n = 1,0$  pour l'air et  $n = 2,42$  pour le diamant.

Plus  $n$  est grand, plus le milieu est dit réfringent.

**2 – Limite de validité de la propagation rectiligne****a – Milieu non homogène**

Dans un milieu transparent non homogène la lumière s'incurve et tourne sa concavité vers les zones d'indice croissant. Application : mirages.

**b – Phénomène de diffraction**

Lorsqu'on cherche à isoler un rayon lumineux en diminuant la largeur de la fente, on obtient après la fente un faisceau qui diverge ; cette divergence est due au phénomène de diffraction, qui apparaît lorsque la largeur de la fente est de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde des lumières monochromatiques utilisées.

Optique géométrique = étude de la marche de rayons lumineux dans des milieux homogènes et transparents (les rayons lumineux s'y propagent en ligne droite).

## 2 – Lois de Snell–Descartes

Les surfaces envisagées sont polies.

dioptré = surface de séparation entre 2 milieux homogènes et transparents (plan, sphérique...)

miroir = surface polie, recouverte d'un mince dépôt métallique réfléchissant.

système dioptrique = système constitué uniquement de dioptrés.

système catadioptrique = système constitué de miroirs, et éventuellement de dioptrés.

Dans les raisonnements, l'indice optique  $n$  est constant. On travaille donc avec une lumière monochromatique.

### I Phénomène de réflexion

réflexion = changement de direction que subit la lumière quand elle rencontre une surface polie.

Lois de Descartes :

1<sup>e</sup> loi : IR, IN et IS sont coplanaires                      2<sup>e</sup> loi : l'angle d'incidence  $i$  = l'angle de réflexion  $r$

Expérience des 2 bougies → Notion d'objet réel et d'image virtuelle :

Un miroir plan donne d'un objet réel une image virtuelle symétrique de l'objet par rapport au plan du miroir.

Rayons convergents en un point B. On intercale un miroir :

Un miroir plan donne d'un objet virtuel une image réelle symétrique de l'objet par rapport au plan du miroir.

Objet réelle = objet par lequel passent effectivement les rayons incidents

Objet virtuel = objet par lequel les prolongements des rayons lumineux passent

Point image réel = point réellement atteint par les rayons sortant du système optique.

Point image virtuel = point atteint par les prolongements des rayons émergents.

Principe du retour inverse de la lumière : *Le trajet géométrique suivi par la lumière est indépendant du sens de propagation.*

### II Phénomène de réfraction

#### **1 – Le phénomène de réfraction**

Expérience ...

#### **2 – Les lois de Snell – Descartes**

##### **a – Définitions**

Si  $n_2 > n_1$ , le milieu 2 est dit plus réfringent que le milieu 1.  $i_1$  : angle d'incidence.  $i_2$  : angle de réfraction.

$D$  : angle de déviation =  $i_2 - i_1$ .

##### **b – Lois de Snell – Descartes**

1<sup>e</sup> loi : IR, IN, IS sont coplanaires                      2<sup>e</sup> loi :  $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$ .

Quand la lumière pénètre dans un milieu plus réfringent, elle se rapproche de la normale, et inversement.

#### **3 – Réfraction limite et réflexion totale**

##### **a – Réfraction limite**

$n_2 > n_1 \rightarrow i_2 < i_1$ .

Pour  $i_1 = i_{1 \max} = \pi/2 \rightarrow i_2 = i_{2 \max} = \Lambda$  : angle de réfraction limite

De manière générale,  $\sin \Lambda = n_{\min}/n_{\max}$ .

##### **b – Réflexion totale**

$n_2 < n_1 \rightarrow i_2 > i_1$ .

Pour  $i_2 = i_{2 \max} = \pi/2 \rightarrow i_1 = i_{1 \max} = \Lambda$ .

L'expérience montre que si  $i_1 > \Lambda$ , toute la lumière est entièrement réfléchi. On dit qu'il y a réflexion totale.

#### **4 – Construction des rayons réfléchi et réfracté**

Rayon réfléchi : on trace un demi-cercle  $\mathcal{C}_{1,r}$  (r quelconque) orienté vers IN ; Soit  $\{A\} = \mathcal{C}_{1,r} \cap IS$ .

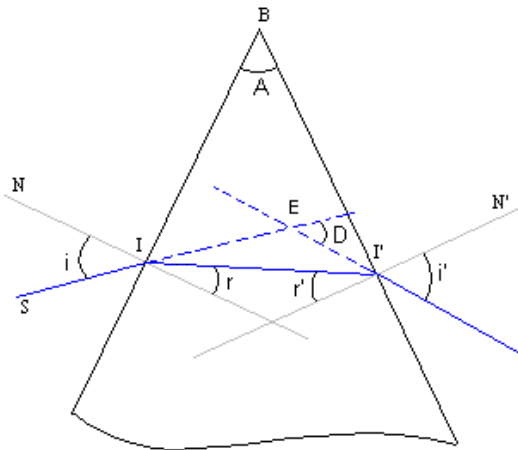
$\{A'\} = \mathcal{C}_{1,r} \cap$  la perpendiculaire à IN passant par A. Alors, IR = IA'.

Rayon réfracté : on trace deux demi-cercles  $\mathcal{C}_{1,r,n1}$  et  $\mathcal{C}_{1,r,n2}$  (r quelconque) orientés vers IN ; on prolonge IS.

$\{P\} = \mathcal{C}_{1,r,n1} \cap IS$ .  $\{Q\} = \mathcal{C}_{1,r,n2} \cap$  la parallèle à IN passant par P. Alors, IR = IQ.



### III Application : le prisme



#### 1 – Définition

Prisme = dièdre d'angle A formé de l'association de 2 dioptries plans air-verre et verre-air qui constituent les faces utiles du prisme.

#### 2 – Déviation

L'angle de déviation D est l'angle que fait le rayon émergent avec le rayon incident.

Lorsque le rayon émergent existe, la déviation se fait toujours vers la base.

#### 3 – Relations fondamentales du prisme

$\begin{aligned} \sin i &= n \sin r \\ \sin i' &= n \sin r' \\ A &= r + r' \\ D &= i + i' - A \end{aligned}$
--

[ ~demos ]

Pour les petits angles,  $D = A(n - 1)$ .

#### 4 – Variations de D avec n

Pour un prisme donné, i fixé, n dépend de  $\lambda$ . Si  $\lambda$  augmente, n diminue, r augmente, r' diminue, i' diminue, D diminue. Concl : la déviation augmente si  $\lambda$  diminue. Les radiations violettes seront plus déviées que les radiations rouges. Phénomène de dispersion.

#### 5 – Condition d'émergence

Il faut  $r \in [-\Lambda, \Lambda] \cap [A - \Lambda, A + \Lambda]$ , si  $\Lambda$  est l'angle de réfraction limite :  $\Lambda = \text{Arcsin}\left(\frac{1}{n}\right)$ .

\* Si  $A > 2\Lambda$ , il y a réflexion totale.

\* Pour qu'un rayon ressorte, il faut que  $r \in [A - \Lambda, \Lambda]$  (et  $A < 2\Lambda$ ).

Conclusion : Rayon émergent pour  $i_0 \leq i \leq 90^\circ$  avec  $\sin i_0 = n \sin(A - \Lambda)$ .

#### 6 – Variation de D avec i

$$\frac{dD}{di} = 1 + \frac{di'}{di} = 1 - \frac{\cos i \cos r'}{\cos i' \cos r} \quad \text{[ il suffit de différencier 3 relations ]}$$

D est extrémal pour  $i = i' = \frac{D_m + A}{2}$  [ élever au carré, mettre des  $\sin^2$ , développer, factoriser ].

C'est un minimum [ demo en étudiant les 2 cas limites  $r = A - \Lambda$  et  $r = \Lambda$  ]

On a alors  $r = r' = \frac{A}{2}$  et  $n = \frac{\sin\left(\frac{D_m + A}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}$  donc on peut mesurer n de cette façon.

### IV Utilisation des lois de Descartes dans les milieux d'incidence variable

Trajet d'un rayon lumineux dans un milieu stratifié : le rayon oblique peu à peu vers les zones d'indices plus élevées. Si on a un milieu transparent tel que  $n(z)$  est une fonction décroissante (milieu non homogène, le rayon lumineux se courbe et tourne sa concavité vers les zones d'indices plus élevées). Ça explique la formation des mirages. A pression constante, quand T augmente, l'air se dilue ( $PV = NRT$ ) donc tend vers le comportement du vide donc n décroît. En gros, la lumière reste dans  $n_{\text{fort}}$  (elle a peur du vide ; elle préfère aller lentement).

## 3 – Stigmatisme et aplanétisme

### I Images et objets réels ou virtuels

Objet réelle = objet par lequel passent effectivement les rayons incidents

Objet virtuel = objet par lequel les prolongements des rayons lumineux passent

Point image réel = point réellement atteint par les rayons sortant du système optique.

Point image virtuel = point atteint par les prolongements des rayons émergents.

Cas d'un système dioptrique : images virtuelles et objets réels sont du même côté

Cas d'un système catadioptrique : images réelles et objets réels sont du même côté

Un système optique est rigoureusement stigmatique si tout rayon passant par un point objet A, réel ou virtuel, passe, après avoir traversé le système, par un point A', réel ou virtuel. A' est alors appelé l'image de A. A et A' sont conjugués.

Pour un système optique rigoureusement stigmatique possédant un axe de symétrie (l'axe optique), on dira qu'il est aplanétique si l'image de tout objet AB plan et orthogonal à l'axe optique est plane et orthogonale à l'axe.

☒ Les rayons lumineux ne sont ni arrêtés, ni réfractés lorsqu'ils traversent l'image d'un objet. (Centrale2000)

### II Miroir plan

L'image d'un point objet par un miroir plan existe : elle est symétrique du point par rapport au plan du miroir.

Le miroir est rigoureusement stigmatique, et aplanétique.

### III Cas du dioptrique plan

Le dioptrique plan n'est pas stigmatique, mais si l'angle d'incidence est suffisamment petit, on peut considérer qu'il y a

stigmatisme approché. Relation de conjugaison :  $\frac{HA'}{n'} = \frac{HA}{n}$ .

Les conditions de validité de cette relation (rayons peu inclinés sur l'axe + rayons proches de l'axe) sont appelés "conditions de Gauss" ; et dans ces conditions, il y a également aplanétisme approché.

### IV Miroirs sphériques

#### **1 – Définition**

Un miroir sphérique est une calotte sphérique réfléchissante.

→ Miroir creux, ou concave # Miroir bombé ou convexe

Définition du centre du miroir C (= centre de la sphère), de l'axe optique, et du sommet S.

#### **2 – Astigmatisme du miroir sphérique**

Après réflexion sur le miroir des rayons incidents issus d'un point objet P qq, il n'y a pas convergence en un point unique → le miroir sphérique n'est pas stigmatique.

#### **3 – Stigmatisme rigoureux au centre et au sommet**

Si les rayons incidents passent par les points C ou S, les rayons repassent par C ou S. C et S sont deux leur propre image.

#### **4 – Stigmatisme approché sur l'axe optique**

Relation des sinus →  $\frac{1}{CA'} + \frac{1}{CA} = \frac{2}{CS} \cos \alpha$  où  $\alpha = (\vec{CS}, \vec{CI})$

Si on se limite à des rayons peu inclinés, on peut faire l'approximation  $\cos \alpha = 1$ .

En pratique, il faut que les rayons incidents frappent le miroir près de S ⇒ diaphragme.

La relation de conjugaison est valable pour les 2 miroirs sphériques.

#### **5 – Foyer et distance focale**

Tout rayon incident passant par le foyer principal objet, défini par  $CF = CS/2$ , est réfléchi parallèlement à l'axe.

Tout faisceau de rayons incidents parallèles à l'axe optique passe par F après réflexion. C'est donc aussi le foyer principal image (= image d'un point à l'infini sur l'axe).

Distance focale :  $f = \vec{SF} = \pm R/2$       Vergence =  $1/f$  en  $m^{-1}$  ou dioptrie  $\delta$ .

V et f sont des grandeurs algébriques (négatifs pour un miroir concave).

## 6 – Aplanétisme

Le miroir sphérique étant approximativement stigmatique pour les points de l'axe, il l'est également pour les points au voisinage de l'axe. [ rotation C,  $\vec{z}$  ]... Bref, en approximant, il y a aussi aplanétisme approché.

Cas des objets dans le plan orthogonal à l'axe optique passant par F : le plan focal. B' est un foyer secondaire image (image d'un point situé à l'infini) ; inversement, tout faisceau de rayons parallèles, inclinés d'un angle  $\theta$  par rapport à l'axe optique, convergent au foyer secondaire image d'inclinaison  $\theta$ , où  $\tan \theta = FB' / (R/2)$ .

(Mais il faut aussi que  $\theta$  soit petit : rayon peu incliné)

## 7 – Construction des images dans l'approximation de Gauss

Hypothèses : Conditions de Gauss ( rayons peu inclinés sur l'axe, et proches de l'axe) ; Stigmatisme approché pour les points de l'axe et au voisinage de l'axe, et également aplanétisme approche ( $\Rightarrow$  diaphragme).

Représentation des miroirs sphériques dans les conditions de Gauss : ] et [.

Règles :

- Tout rayon incident passant par le centre C revient sur lui-même après réflexion.
- Tout rayon frappant le miroir sur le sommet se réfléchit symétriquement par rapport à l'axe optique.
- Tout rayon incident, parallèle à l'axe optique, passe par le foyer après réflexion, et réciproquement.

Construction de l'image A' d'un point A de l'axe optique : pour trouver la position de l'image de A sans passer par la relation de conjugaison, on utilise la propriété de l'aplanétisme approché. On choisit un objet AB plan  $\perp$  à l'axe optique. On construit l'image de B à l'aide des rayons particuliers.

Cas particulier d'un objet AB dans le plan focal : les rayons réfléchis sont parallèles entre eux ; l'image de B est à l'infini.

Cas d'un objet à l'infini : A'B' est dans le plan focal ; B' est le foyer secondaire image.

Tracé du rayon réfléchi correspondant à un incident quelconque : 2 méthodes

- Le rayon coupe le plan focal au foyer secondaire objet B. Tous les rayons incidents passant par B se réfléchissent parallèlement entre eux  $\rightarrow$  rayon BC.
- Tout faisceau de rayons parallèles entre eux se réfléchit en passant par le même foyer secondaire image  $\rightarrow$  CB'

## 8 – Relations de conjugaison et grandissement dans l'approximation de Gauss

### a – Relations de conjugaison

Avec origine au centre :  $\frac{1}{CA'} + \frac{1}{CA} = \frac{2}{CS}$  orientation dans le sens de la propagation de la lumière incidente

Avec origine au sommet :  $\frac{1}{SA'} + \frac{1}{SA} = \frac{2}{SC}$  [ demos ]

Avec origine au foyer :  $FA' FA = f^2$  Formule de Newton  
(donc A et A' sont du même côté de F).

### b – Le grandissement

Le grandissement  $\gamma$  est par définition  $\frac{A'B'}{AB}$

$\gamma > 0$  : image droite par rapport à l'objet

$|\gamma| > 1$  : image plus grande que l'objet

$\gamma < 0$  : image renversée par rapport à l'objet

$|\gamma| < 1$  : image plus petite que l'objet

$$\gamma = \frac{CA'}{CA} = -\frac{SA'}{SA} = -\frac{FA'}{f} = -\frac{f}{FA}$$

Les relations établies sont valables  $\forall$  la position de l'objet par rapport au miroir et  $\forall$  le type de miroir (concave ou convexe).

## 9 – Miroir plan comme cas particulier du miroir sphérique

On retrouve  $\gamma = +1$ ... C et F sont rejetés à l' $\infty$ . On raisonne sur le sommet S.

## 4 – Lentilles minces sphériques

### I Définition

Une lentille sphérique est un bloc de matière homogène et transparente limitée par 2 dioptries dont l'une au moins est sphérique.

Lentilles à bords minces (convergentes) : biconvexe ; plan–convexe ; ménisque convergent

Lentilles à bords épais (divergentes) : biconcave ; plan–concave ; ménisque divergent

Pour une lentille plan–convexe, il est préférable que la lumière frappe du côté convexe. [ TP Optique 2 ]

Soient  $C_1$  et  $C_2$  les centres des sphères,  $R_1$  et  $R_2$  leurs rayons, et  $S_1$  et  $S_2$  leurs sommets, et  $e = S_1S_2$ .

Une lentille sphérique est dite mince si  $e \ll R_1$ ,  $e \ll R_2$  et  $e \ll C_1C_2$ . Alors  $S_1 \sim S_2 = O$  : centre optique de la lentille.

Avantages d'un miroir sur une lentille :

- pas d'aberrations chromatiques
- poids plus faible

### II Stigmatisme et aplanétisme

On observe par l'expérience qu'il y a stigmatisme approché et aplanétisme approché dans les conditions de Gauss...  
L'image est renversée.

### III Propriétés des lentilles minces dans les conditions de Gauss

#### 1 – Centre optique

Pour toute lentille, il existe un point de l'axe optique tel qu'un rayon passant par ce point ne soit pas dévié. Dans le cas des lentilles minces, ce rayon n'est pas décalé. Ce point est appelé le centre optique de la lentille.

#### 2 – Foyer image et objet

Foyer principal image = image par une lentille d'un point à l'infini sur l'axe.

Foyer principal objet = point de l'axe optique qui a pour image un point à l'infini sur l'axe.

Les lentilles ont en comportement symétrique par rapport au centre optique  $O$  donc les 2 foyers principaux sont symétriques. La lentille est convergente  $\Leftrightarrow$  Les 2 foyers sont réels.

Distance focale image :  $f' = \overline{OF'}$  (m)  $f' > 0 \Leftrightarrow$  lentille convergente

Vergence :  $V = 1/f'$  (en  $m^{-1}$  ou dioptrie  $\delta$ )

Plan focal image (image/objet) : plan orthogonal à l'axe passant par le foyer principal (image/objet). Les points de ces plans, autres que  $F$  et  $F'$ , sont appelés foyers secondaires.

### IV Construction des images dans les conditions de Gauss

#### 1 – Règles de construction

- Tout rayon passant par  $O$  traverse la lentille sans déviation ni décalage.
  - Tout rayon incident parallèle à l'axe optique "passe" par  $F'$ .
  - Tout rayon incident passant par  $F$  ressort parallèle à l'axe optique.
- [ exemple de construction : utilisation de la propriété d'aplanétisme approché ]

#### 2 – Cas particuliers

L'image d'un objet dans le plan focal objet est à l'infini. L'image d'un objet à l'infini est dans le plan focal image.

#### 3 – Construction du rayon transmis pour un rayon incident quelconque

1<sup>o</sup> méthode : Le rayon coupe le plan focal objet en  $B$ .  $BO$  donne la direction du rayon émergent

2<sup>o</sup> méthode : Le rayon parallèle passant par  $O$  coupe le plan focal image en  $B'$ . Le rayon émergent passe par  $B'$ .

### V Relations de conjugaison et grandissement

#### 1 – Avec origine au centre optique

$$-\frac{1}{OA} + \frac{1}{OA'} = \frac{1}{f'} \quad \gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} \quad [ \text{demos triangles homothétiques} ]$$

2 – Avec origines aux foyers

$\overline{F'A'}.FA = -f^2$  (relation de Newton)

$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{AB} = -\frac{\overline{F'A'}}{f'} = -\frac{f}{FA}$

VI Caractéristiques de l'image en fonction de la position de l'objet

	$-\infty < x < -2 f $	$-2 f  < x < - f $	$- f  < x < 0$	$0 < x <  f $	$ f  < x < 2 f $	$2 f  < x < +\infty$
<b>Lentille/Miroir convergent</b>	Réelle <u>renversée</u> petite	Réelle <u>renversée</u> <b>grande</b>	Virtuelle droite <b>grande</b>	Réelle droite petite	Réelle droite petite	Réelle droite petite
<b>Lentille/Miroir divergent</b>	Virtuelle droite petite	Virtuelle droite petite	Virtuelle droite petite	Réelle droite <b>grande</b>	Virtuelle <u>renversée</u> <b>grande</b>	Virtuelle <u>renversée</u> petite

où  $x = \overline{OA}$  ou  $\overline{SA}$ .

- Les seules positions pour avoir une image plus grande que l'objet correspondent aux zones proches du foyer objet.
- Les seules positions pour avoir une image renversée est d'être, par rapport au foyer objet, dans le domaine qui ne contient pas la lentille/miroir.
- Un système convergent ne peut donner une image virtuelle que si l'objet est juste avant celui-ci.
- Un système divergent ne peut donner une image réelle que si l'objet se trouve juste après celui-ci.

VII Résumé des formules à savoir

Tout est en mesure algébrique, orienté dans le sens de la propagation de la lumière incidente

Réfraction	Miroir (f = SF)		Lentille (f = OF ; f' = OF')	
$\frac{HA'}{n'} = \frac{HA}{n}$	$\frac{1}{SA'} + \frac{1}{SA} = \frac{2}{SC}$	$\gamma = -\frac{SA'}{SA}$	$\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA} = \frac{1}{f'}$	$\gamma = \frac{OA'}{OA}$
	$FA' FA = f^2$	$\gamma = -\frac{FA'}{f} = -\frac{f}{FA}$	$F'A' FA = -f^2$	$\gamma = -\frac{F'A'}{f'} = -\frac{f}{FA}$
	$\frac{1}{CA'} + \frac{1}{CA} = \frac{2}{CS}$	$\gamma = \frac{CA'}{CA}$		