

[MPSI – Mathématiques 3]

Sommaire

[MPSI – MATHÉMATIQUES 3].....	1
SOMMAIRE	1
ISOMETRIES EN DIMENSION 1, 2, 3.....	2
15 – INTEGRATION SUR UN INTERVALLE QUELCONQUE.....	3
I FONCTIONS CONTINUES INTEGRABLES A VALEURS POSITIVES.....	3
II OPERATIONS, METHODES DE CALCUL.....	3
III CRITERES D'INTEGRABILITE	4
IV FONCTIONS A VALEURS COMPLEXES.....	4
16 – MATRICES.....	5
I MATRICE D'UNE APPLICATION LINEAIRE.....	5
II OPERATIONS SUR LES MATRICES.....	5
III MATRICES CARREES	6
IV MATRICES CARREES INVERSIBLES ET CHANGEMENT DE BASES.....	7
17 – DETERMINANTS	9
I GROUPES SYMETRIQUES.....	9
II FORMES MULTILINEAIRES SUR UN ESPACE VECTORIEL.....	9
III DETERMINANT D'UN SYSTEME DE N VECTEURS DANS UN ESPACE VECTORIEL DE DIMENSION N	10
IV CALCULS DE DETERMINANTS	11
18 – SYSTEMES LINEAIRES	12
I DEFINITIONS.....	12
II INTERPRETATIONS D'UN SYSTEME LINEAIRE.....	12
II SYSTEME HOMOGENE.....	12
IV SYSTEME DE CRAMER	12
IV CAS GENERAL D'UN SYSTEME DE N EQUATIONS A P INCONNUES	13
V METHODE DU PIVOT DE GAUSS	13
19 – ESPACES EUCLIDIENS.....	14
I PRODUIT SCALAIRE	14
II ESPACE EUCLIDIEN	15
III GROUPE ORTHOGONAL D'UN ESPACE EUCLIDIEN	16
20 – ESPACES AFFINES	19
I STRUCTURE AFFINE.....	19
II VARIETES AFFINES.....	20
III APPLICATIONS AFFINES	21
IV BARYCENTRES	22
V CONVEXITE.....	23
21 – GEOMETRIE EUCLIDIENNE.....	25
I ORTHOGONALITE ET DISTANCE.....	25
II PLAN AFFINE EUCLIDIEN ORIENTE.....	25
III ESPACE AFFINE EUCLIDIEN ORIENTE DE DIMENSION 3.....	26
IV ISOMETRIES AFFINES	27
V CONIQUES.....	28
22 – ESPACES VECTORIELS NORMES.....	30
I ESPACE \mathbb{R}^2	30
II FONCTIONS D'UNE VARIABLE REELLE A VALEURS DANS \mathbb{R}^N	31

III LIMITE ET CONTINUITÉ D'UNE FONCTION DE \mathbb{R}^2 DANS \mathbb{R} 31

IV CALCUL DIFFÉRENTIEL 32

23 – COURBES DU PLAN 35

I REPRÉSENTATIONS CARTESIENNES D'UNE COURBE PLANE 35

II ARC 35

III ÉTUDE D'UNE COURBE PLANE EN COORDONNÉES CARTESIENNES..... 36

IV COURBES ALGÈBRIQUES 37

V COURBES EN COORDONNÉES POLAIRES 37

V PROPRIÉTÉS MÉTRIQUES 39

24 – INTÉGRALE DOUBLE OU TRIPLE 41

I INTÉGRALE D'UNE FONCTION EN ESCALIER 41

II INTÉGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE PAR MORCEAUX..... 41

III CHANGEMENT DE VARIABLE 41

IV INTÉGRALE TRIPLE 41

Isométries en dimension 1, 2, 3

Dimension		Droite	Plan	Espace
		1	2	3
Automorphismes orthogonaux, ou isométries vectorielles $O(E)$	Positives (dét > 0)	• Id	• Rotation $\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$	• Rotation (par rapport à une droite vectorielle)
	Négatives (dét < 0)	• - Id	• Réflexion $\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}$	• Réflexion • Rotation \circ réflexion de plan orthogonal à l'axe de la rotation
Isométries affines	Déplac.	• Translation	• Rotation • Translation	• Rotation \circ translation de même axe (vissage)
	Antidépl.	• Réflexion (symétries centrales)	• Réflexion • Composée de 3 réflexions	• Réflexion • Composée de 3 réflexions • Composée de 5 réflexions

15 – Intégration sur un intervalle quelconque

I Fonctions continues intégrables à valeurs positives

I est un intervalle quelconque de \mathbb{R} et $f \in C^0(I, \mathbb{R}_+)$

1 – Extension de la notion d'intégrale

Si $\{ \int_J f, J \text{ segment } \subset I \}$ est majorée, f est intégrable sur I , et $\int_I f = \text{Sup} \{ \int_J f, J \text{ segment } \subset I \}$.

Ex : $t \rightarrow 1/t^2$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, mais pas sur $]0, 1]$

Rem : la nouvelle définition est compatible avec la définition de l'intégrale sur un segment.

Interprétation géométrique : Aire sous la courbe.

Ex : $t \rightarrow 1/t$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$.

2 – Caractérisation et calcul pratique

S'il existe une suite de segments $(J_n) = (a_n, b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, croissante (au sens de \subset), telle que $\cup J_n = I$ et $(\int_{J_n} f)$ est majorée, alors f est intégrable sur I , et $\int_I f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{J_n} f$

[DEMO : $\forall J$ segment $\subset I, \exists n \in \mathbb{N}, J \subset J_n$; égalité des intégrales déduite de 2 inégalités]

Rem : Si f est intégrable sur I et (J_n) est une suite de segments croissante telle que $\cup J_n = I$,

alors $(\int_{J_n} f)$ est majorée par $\int_I f$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{J_n} f = \int_I f$.

Ex : $\int_1^{+\infty} dt/t^2 = 1$; $\int_0^1 dt/\sqrt{t} = 2$

3 – Nature de l'intervalle d'intégration

Séparation des problèmes : $\forall a \in I, (f \text{ intégrable sur } I) \Leftrightarrow (f \text{ intégrable sur } I \cap]-\infty, a] \text{ et sur } I \cap [a, +\infty[)$, et en cas d'intégrabilité, $\int_I f = \int_{I \cap]-\infty, a]} f + \int_{I \cap [a, +\infty[} f$ (extension de Chasles) [demo \Leftrightarrow]

Ex : $\int_0^{+\infty} dt/(1+t^2)\sqrt{t} = \pi\sqrt{2}/2$ [long !]

Intégrabilité de $f \in C^0([a, b[, \mathbb{R}_+)$ $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

$\forall c \in [a, b[, f$ intégrable sur $[a, b[\Leftrightarrow f$ intégrable sur $[c, b[$, et alors $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

On définit $F : x \in [a, b[\rightarrow \int_a^x f$ (qui est croissante). Les 3 énoncés sont équivalents :

- f intégrable sur $[a, b[$
- F majorée sur $[a, b[$
- $F(x)$ a une limite lorsque $x \rightarrow b^-$, et si f intégrable, $\int_a^b f = \lim_{x \rightarrow b^-} F(x)$

et si f intégrable, $\int_a^b f = \lim_{x \rightarrow b^-} F(x)$ [demo facile]

Ex : $\int_0^{+\infty} dt/(1+t^2) = \pi/2$.

Cas d'un intervalle borné : f majorée sur $[a, b[\Rightarrow f$ intégrable sur $[a, b[$ [demo rapide]

Cas particulier : $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ intégrable sur $[a, b[$ (prolongement par continuité en b)

Cas d'un intervalle non borné : Pour que f soit intégrable sur $[a, +\infty[$, il n'est ni nécessaire ni suffisant que f ait une limite en $+\infty$ [contrexemples : non suffisant : $t \rightarrow 1/t$; nécessaire : triangles ...]

En fait il existe des fonctions non bornées et intégrables sur des intervalles non bornés (triangles).

Intégrabilité sur $[a, b]$: mêmes résultats. Ex : $\int_0^1 dt/\sqrt{t} = 2$

II Opérations, méthodes de calcul

1 – Addition

f et $g \in C^0(I, \mathbb{R}_+)$

f et g intégrables sur $I \Rightarrow f + g$ intégrable sur I et $\int_I (f+g) = \int_I f + \int_I g$. [demo facile]

2 – Produit par un scalaire positif

$f \in C^0(I, \mathbb{R}_+)$. $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*$, f intégrable sur $I \Leftrightarrow \lambda f$ intégrable sur I , et $\int_I \lambda f = \lambda \int_I f$.

3 – Ordre

Théorème de comparaison : f et $g \in C^0(I, \mathbb{R}_+)$ telles que $f \leq g$. g intégrable $\Rightarrow f$ intégrable, et $\int_I f \leq \int_I g$. [demo facile]

Ex : e^{-t^2} est intégrable sur $[0, +\infty[$

4 – Changement de variable, intégration par parties

On se ramène à une intégrale sur un segment (appelées intégrales définies)

$$\text{Ex : } \int_1^{+\infty} dt/t^2 = 1 \quad (\text{changement : } u = 1/t)$$

$$\text{Ex : } \int_0^{+\infty} t e^{-\sqrt{t}} dt = \dots \quad (\text{changement : } u = \sqrt{t} \text{ puis IPPs})$$

III Critères d'intégrabilité

1 – Fonctions de références

$t \rightarrow 1/t^\alpha$ est intégrable sur $[1, +\infty[\Leftrightarrow \alpha > 1$

$t \rightarrow 1/t^\alpha$ est intégrable sur $]0, 1] \Leftrightarrow \alpha < 1$ [demo rapide]

2 – Utilisation des relations de comparaison

f et $g \in C^0([a, b], \mathbb{R}_+)$; $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$; $f \sim O(g)$.

g intégrable $\Rightarrow f$ intégrable, et $\int_a^b f \sim O(\int_a^b g)$

f non intégrable $\Rightarrow g$ non intégrable, et $\int_a^b f \sim O(\int_a^b g)$ [demo simple]

Mêmes résultats avec la relation o et \sim .

Ex : $f(t) = P(t)/Q(t) = (a_0 + \dots + a_n t^n)/(b_0 + \dots + b_n t^n)$ est intégrable sur $[0, +\infty[\Leftrightarrow p - n \geq 2$.

Intégrale de Bertrand : $\int dt/t^\alpha |\ln t|^\beta$ est définie en 0 ou $+\infty$ pour des valeurs particulières de α et de β [EXOS 19]

Lemme de Riemann–Lebergue : $\forall f \in C^0PM([a, b], \mathbb{C})$, $(\int_a^b f \cdot e^{int} \cdot dt)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow 0$ [EXOS 19]

Calcul de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ par encadrements et intégrales de Wallis... $\rightarrow \sqrt{\pi}/2$ [EXOS 19]

IV Fonctions à valeurs complexes

1 – Intégrabilité

$f \in C^0(I, \mathbb{C})$ est intégrable sur I si $|f|$ est intégrable sur I .

Ex : $x \rightarrow \sin x/x^2$ est intégrable sur $[1, +\infty[$

2 – Structure

On note $\mathcal{L}_1(I, J)$ l'ensemble des fonctions continues intégrables de I dans J .

$\mathcal{L}_1(I, \mathbb{C})$ est un \mathbb{C} – espace vectoriel. $\mathcal{L}_1(I, \mathbb{R})$ est un \mathbb{R} – espace vectoriel. [demo rapide]

3 – Fonctions à valeurs réelles

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. f est intégrable $\Leftrightarrow f^+$ et f^- sont intégrables, et dans ce cas, $\int_I f = \int_I f^+ - \int_I f^-$.

Si $f \in \mathcal{L}_1(I, \mathbb{R})$,

Soit $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de segments telle que $\cup J_n = I$. Alors $\int_I f = \lim \int_{J_n} f$. [~demo]

Si $I = [a, b]$: soit $F : x \in [a, b] \rightarrow \int_a^x f \in \mathbb{R}$; alors, $\lim_{x \rightarrow b^-} F(x) = \int_I f$.

Mais $\lim_{x \rightarrow b^-} F(x)$ existe n'implique pas que F soit intégrale sur $[a, b]$: $x \rightarrow \sin(x)/x$ [EXOS 19]

4 – Fonctions à valeur complexe

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{C})$. f est intégrable $\Leftrightarrow \text{Re}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont intégrables, et dans ce cas, $\int_I f = \int_I \text{Re}(f) + i \int_I \text{Im}(f)$

Si $f \in \mathcal{L}_1(I, \mathbb{C})$,

Soit $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de segments telle que $\cup J_n = I$. Alors $\int_I f = \lim \int_{J_n} f$.

Si $I = [a, b]$: soit $F : x \in [a, b] \rightarrow \int_a^x f \in \mathbb{C}$; alors, $\lim_{x \rightarrow b^-} F(x) = \int_I f$.

5 – Opérations

L'application $f \in \mathcal{L}_1(I, \mathbb{C}) \rightarrow \int_I f \in \mathbb{C}$ est une forme linéaire.

$\forall f \in \mathcal{L}_1(I, \mathbb{C})$, $|\int_I f| \leq \int_I |f|$. [~demo]

16 – Matrices

I Matrice d'une application linéaire

E et F sont des \mathbf{K} – espaces vectoriels de dimension finie. Soit $n = \dim E$; $p = \dim F$.
 $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$: base de E ; $C = (c_1, c_2, \dots, c_p)$: base de F.

1 – Exemple

On considère $P \in \mathbb{R}_4[X] \rightarrow P' + P'' \in \mathbb{R}_3[X]$.

On peut caractériser cette application par la donnée d'un tableau de coefficients qui correspondent aux coordonnées des images de la base choisie de $\mathbb{R}_4[X]$, dans la base choisie de $\mathbb{R}_3[X]$.

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} f(b_0) & f(b_1) & f(b_2) & f(b_3) & f(b_4) \end{matrix} \\ \begin{matrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

2 – Cas général

$\forall (n, p) \in \mathbb{N}^{*2}$, une matrice de type (p, n) à coefficients dans \mathbf{K} est une application $(i, j) \in \mathbb{N}_p \times \mathbb{N}_n \rightarrow \alpha_{ij} \in \mathbf{K}$. C'est une famille de scalaires indexée par $\mathbb{N}_p \times \mathbb{N}_n$. On a l'habitude de représenter les coefficients dans un tableau à p lignes et à n colonnes.

Notations : $M = [\alpha_{ij}]$ $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$ désigne l'ensemble des matrices de type (p, n) à coefficients dans \mathbf{K} .

3 – Théorème fondamental

L'application $\Phi : f \in \mathcal{L}(E, F) \rightarrow M = [\alpha_{ij}] = \text{Mat}(f, B, C) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$ est une bijection. [demo]

On a $\forall j \in \mathbb{N}_n, f(b_j) = \sum \alpha_{ij} c_i$. Cette bijection dépend des bases

4 – Matrices particulières

Si $\dim E = \dim F = n$, on parle de matrice carrée. Notation : $\mathcal{M}_n(\mathbf{K}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbf{K})$

Si f est une forme linéaire, $\text{Mat}(f, B, (1))$ est une matrice ligne.

Si y est un vecteur, on peut construire la matrice colonne Y qui est constituée des coordonnées de y dans B.

5 – Vecteurs lignes, vecteurs colonnes

i^{ème} vecteur ligne de A : vecteur de E

j^{ème} vecteur colonne de A : vecteur de F

Notion de matrice extraite...

II Opérations sur les matrices

1 – Structure d'espace vectoriel de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$

Définition de l'addition d'après l'addition de 2 applications linéaires :

$$\forall (A = [\alpha_{ij}], B = [\beta_{ij}]) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})^2, A+B = [\alpha_{ij} + \beta_{ij}]$$

Φ est donc un isomorphisme de groupe additif. $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$ devient un groupe additif abélien.

Élément neutre : [0]. Symétrique : $-(\alpha_{ij}) = [-\alpha_{ij}]$

Définition de la loi externe d'après la loi externe de $\mathcal{L}(E, F)$: $\forall A = [\alpha_{ij}] \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K}), \forall \lambda \in \mathbf{K}, \lambda A = [\lambda \alpha_{ij}]$

Φ est un isomorphisme d'espace vectoriel. $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$ est isomorphe à $\mathcal{L}(E, F)$.

Base de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$: $(E_{k \ell} = [\delta_{ik} \delta_{j \ell}])$ est une base de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$.

2 – Produit de matrices

Définition du produit d'après la composition dans $\mathcal{L}(E, F)$: $\forall A = [\alpha_{ij}] \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K}), \forall B = [\beta_{ki}] \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbf{K})$,

$$\text{on définit } B \times A = [\gamma_{kj}] = \left[\sum_{i=1}^p \beta_{ki} \alpha_{ij} \right] \quad (\sim \text{Chasles}) \quad \text{Ce n'est pas une LCI.}$$

Disposition pratique : on place B en bas à gauche, A en haut à droite. On place BA en bas à droite.

$\forall f \in \mathcal{L}(E, F), \forall g \in \mathcal{L}(F, G), \text{Mat}(g \circ f, E_{\text{base}}) = \text{Mat}(g, F_{\text{base}}, G_{\text{base}}) \times \text{Mat}(f, E_{\text{base}}, F_{\text{base}}).$
 $\forall A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbf{K}), \forall C \in \mathcal{M}_{r,q}(\mathbf{K}), C \times (B \times A) = (C \times B) \times A$ (sorte d'associativité)
 $\forall (A_1, A_2, B) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})^2 \times \mathcal{M}_{q,p}(\mathbf{K}), \forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{K}^2, B(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2) = \lambda_1 B A_1 + \lambda_2 B A_2$ (sorte de distributivité)
 $\forall (A, B_1, B_2) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K}) \times \mathcal{M}_{q,p}(\mathbf{K})^2, \forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{K}^2, (\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2)A = \lambda_1 B_1 A + \lambda_2 B_2 A.$
 [~demo : on passe par des applications linéaires]

3 – Ecriture matricielle d'une application linéaire

$y = f(x) \Leftrightarrow \forall i \in \mathbb{N}_p, y_i = \sum a_{ij} x_j.$
 $\Leftrightarrow Y = AX$ si X est la matrice colonne des coordonnées du vecteur x dans B, Y la matrice colonne des coordonnées du vecteur y dans C, et $A = \text{Mat}(f, B, C).$ [demo rapide]

4 – Produits de matrices par blocs

Si les matrices à multiplier présentent des zones de 0, il peut être avantageux de les multiplier par blocs. On traite alors chaque sous-matrice comme un scalaire.

5 – Produits de matrices de bases

$F_{k\ell} \times E_{ij} = \delta_{\ell i} \cdot G_{kj}$ [demo]
 $F_{k\ell} \times A$ est la recopie de la ligne ℓ de la matrice A, dans la ligne k. (Attention aux dimensions des matrices)
 $A \times F_{k\ell}$ est la recopie de la colonne k de la matrice A, dans la colonne $\ell.$
 Opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes d'une matrice :
 Echanger 2 lignes ou 2 colonnes
 Multiplier une ligne ou une colonne par un scalaire non nul
 Ajouter à une ligne ou une colonne le produit d'une autre ligne ou d'une autre colonne par un scalaire
 Matrice identité d'ordre n, notée $I_n.$

III Matrices carrées

1 – L'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$

$\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est une algèbre non commutative (si $n \geq 2$) : $E_{12} E_{21} = E_{11} \neq E_{22} = E_{21} E_{12}.$
 $\boxtimes \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ n'est pas intègre. (Centrale2000) $E_{12} E_{11} = [0]$
 Remarque : de toutes façons, intègre \Rightarrow commutatif.
Trace d'une matrice : somme des éléments diagonaux. $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ [EXOS 20]

2 – Sous-algèbres

a – Matrices triangulaires

Une matrice $A = [\alpha_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est triangulaire supérieure si $\forall (i, j) \in \mathbb{N}_n^2, i > j \Rightarrow \alpha_{ij} = 0.$
 Une matrice $A = [\alpha_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est triangulaire inférieure si $\forall (i, j) \in \mathbb{N}_n^2, i < j \Rightarrow \alpha_{ij} = 0.$
 L'ensemble des matrices triangulaires supérieures et l'ensemble des matrices triangulaires inférieures sont deux sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K}).$ [demo : stable pour + évident, stable pour $\times.$]
 Si $A = [\alpha_{ij}]$ et $B = [\beta_{ij}]$ sont triangulaires inférieures ou supérieures, alors si $BA = [\gamma_{ij}]$ alors $\forall i \in \mathbb{N}_n, \gamma_{ii} = \alpha_{ii} \beta_{ii}.$

b – Matrices diagonales

Une matrice est diagonale si elle est à la fois triangulaire inférieure et triangulaire supérieure.
 Notation : $\text{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ C'est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ (intersection de 2 sous-algèbres)
 $\text{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \times \text{Diag}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) = \text{Diag}(\lambda_1 \mu_1, \lambda_2 \mu_2, \dots, \lambda_n \mu_n) \rightarrow$ Cette sous-algèbre est commutative.
 $\forall k \in \mathbb{N}^*, (\text{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n))^k = \text{Diag}(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k)$ (utilité pour la composition k fois d'app. linéaires)
 Notion d'endomorphisme diagonalisable.

c – Matrices scalaires

Une matrice scalaire est une matrice diagonale dont tous les éléments diagonaux sont égaux.
 Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est telle que $\text{Mat}(u, B) = \lambda I_n,$ alors u est une homothétie vectorielle de rapport $\lambda.$
 $\{ A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}), \forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}), AB = BA \}$ est l'ensemble des matrices scalaires. [demo]

3 – Matrices nilpotentes

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est nilpotente si $\exists p \in \mathbb{N}, A^p = [0]$.

Si $A \neq 0$, alors A est un diviseur de zéro. [demo rapide]

4 – Utilisation de la formule du binôme

$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})^2, AB = BA$, alors $\forall p \in \mathbb{N}, (A + B)^p = \sum C_p^k A^k B^{p-k}$.

5 – Transposition

Cas général : $\forall A = [\alpha_{ij}] \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$, on appelle matrice transposée de A , ${}^tA = [\beta_{ji}] \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ où $\beta_{ji} = \alpha_{ij}$.

L'application $A \rightarrow {}^tA$ est un isomorphisme d'espace vectoriel [demo : bijection puis morphisme]

$\forall A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbf{K}), {}^t(BA) = {}^tA {}^tB$. [demo rapide]

Cas particulier des matrices carrées :

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est symétrique si ${}^tA = A$. $\mathcal{S}_n(\mathbf{K})$ désigne l'ensemble des matrices symétriques.

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est antisymétrique si ${}^tA = -A$. $\mathcal{A}_n(\mathbf{K})$ désigne l'ensemble des matrices antisymétriques.

$\mathcal{S}_n(\mathbf{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbf{K})$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ [interprétés comme le noyau d'une app. linr.]

$\mathcal{M}_n(\mathbf{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbf{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbf{K})$ [demo]

Bases : $(E_{ij} + E_{ji})_{1 \leq i < j \leq n} \cup (E_{ii})_{1 \leq i \leq n}$ est une base de $\mathcal{S}_n(\mathbf{K}) \rightarrow$ qui est donc de dimension $n(n+1)/2$

$(E_{ij} - E_{ji})_{1 \leq i < j \leq n}$ est une base de $\mathcal{A}_n(\mathbf{K}) \rightarrow$ qui est donc de dimension $n(n-1)/2$

$\forall A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R}), \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), AX[0] \Leftrightarrow {}^tAAX = [0]$ et $\text{rg}(A) = \text{rg}({}^tAA)$ [EXOS 23]

IV Matrices carrées inversibles et changement de bases

1 – Matrices carrées inversibles

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est inversible si $\exists A' \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}), AA' = A'A = I_n$.

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est la matrice de $f \in \mathcal{L}(E, F)$ où $\dim E = \dim F = n$, dans les bases B et C resp., alors

A inversible $\Leftrightarrow f$ isomorphisme d'espace vectoriel,
et dans ce cas, $\text{Mat}(f^{-1}, C, B) = A^{-1} = (\text{Mat}(f, B, C))^{-1}$.

$\text{GL}_n(\mathbf{K}) = \{ A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}), A \text{ inversible} \}$ est un groupe multiplicatif isomorphe au groupe des automorphismes de E .
(ce n'est pas un sous-groupe multiplicatif car dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ il existe des éléments non inversibles).

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ inversible à gauche $\Rightarrow A$ inversible ; A inversible à droite $\Rightarrow A$ inversible [demo app linr + th. rang]

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ inversible $\Leftrightarrow (f(b_1), f(b_2), \dots, f(b_n))$ sont linéairement indépendants.

\Leftrightarrow ses vecteurs colonnes forment une famille libre.

Les matrices qui interviennent dans les opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes sont inversibles.

2 – Transposition et matrices inversibles

$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}), A$ inversible $\Leftrightarrow {}^tA$ inversible, et dans ce cas, $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$ [demo rapide]

Corollaire : A inversible \Leftrightarrow ses vecteurs lignes forment une famille libre.

3 – Matrices de passage

Dans E ev de dim n , on donne l'ancienne base $B = (b_1, \dots, b_n)$ et la nouvelle base $B' = (b'_1, \dots, b'_n)$.

La matrice de passage de l'ancienne base B vers la nouvelle base B' est la matrice d'ordre n dont les colonnes comportent les coordonnées des vecteurs de la base B' dans la base B . C'est $\text{Mat}(\text{Id}_E, B', B)$.

P^{-1} est la matrice de passage de la base B' à la base B .

Application pratique : recherche de l'inverse d'une matrice. Si A est inversible, on peut la considérer comme une matrice de changement de base.

Ex :
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Attention : **dénominations difficiles à retenir**. La conversion possible avec la matrice se fait en fait de la nouvelle base vers l'ancienne base.

4 – Formules de changement de bases

Soit E un ev de dim n , B et B' deux bases de E , x un vecteur de E .

Soit X la matrice colonne des coordonnées de x dans B . Soit X' la matrice colonne des coordonnées de x dans B' .

Soit $P = \text{Mat}(\text{Id}_E, B', B)$: matrice de passage de B vers B' .

Alors $X = P \cdot X'$ et $X' = P^{-1} X$ [demo rapide]

X : anciennes coordonnées X' : nouvelles coordonnées (CONNUES)

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $A' = \text{Mat}(f, B', C)$, $A = \text{Mat}(f, B, C)$, $P = \text{Mat}(\text{Id}_E, B', B)$, $Q = \text{Mat}(\text{Id}_F, C', C)$, alors $A' = Q^{-1} A P$.

Cas particulier : Si $f \in \mathcal{L}(E)$, $A' = P^{-1} A P$.

⊗ Il faut savoir effectuer des changements de base sans se tromper. (Centrale2000)

5 – Rang d'une matrice

Le rang de $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$ est le rang du système de ses vecteurs colonnes.

Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est telle que $A = \text{Mat}(f, B, C)$ alors $\text{rg}(A) = \text{rg}(f)$.

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$ de rang r . Alors :

- $r \leq p$ et $r \leq n$ [analogies avec applications linéaires]

- $\exists R \in \text{GL}_p(\mathbf{K}), \exists S \in \text{GL}_n(\mathbf{K}), R A S = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

[DEMO : app linr associée, construction de bases telles que $R A S$ puisse avoir cet aspect...]

Si $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$, $\text{rg}(A) = r$ et $U \in \text{GL}_p(\mathbf{K})$. Alors $UA \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$ et $\text{rg}(UA) = r$.

Si $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$, $\text{rg}(A) = r$ et $V \in \text{GL}_n(\mathbf{K})$. Alors $AV \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$ et $\text{rg}(AV) = r$.

[demo app. linr]

Application : les opérations élémentaires ne changent pas le rang des matrices.

$\forall A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K}), \text{rg}(A) = \text{rg}(^t A)$ [demo d'après le théorème ci-dessus]

Corollaire : Le rang d'une matrice est aussi le rang du système de ses vecteurs lignes.

Exemples de calculs de rang...

17 – Déterminants

I Groupes symétriques

1 – Rappels

Le cardinal d'un sous-groupe divise le cardinal du groupe.
 L'ordre d'un élément a est $\#(\text{gr}(a)) = \text{Min} \{ n \in \mathbb{N}, a^n = e \}$

2 – Généralités

Soit E un ensemble non vide. $S_E = \{ \sigma \in E^E, \sigma \text{ bijective} \}$. S_E est un groupe fini pour \circ . $\#(S_E) = n!$.
 Soit S_n le groupe dit symétrique des permutations sur \mathbb{N}_n . $\#(S_n) = n!$
 Exemples : tables de groupe, sous-groupe, ordre des éléments de S_2 et S_3 .

3 – Etude du groupe S_n

Notation : $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix} \in S_n$.

$\forall n \geq 3$, S_n est non commutatif [demo : $\sigma_1 = (2, 3)$, $\sigma_2 = (1, 3)$]
 $\Rightarrow S_n$ non cyclique (car cyclique \Rightarrow commutatif)

Si $n \geq 2$, $t \in S_n$ est une transposition si $\exists (i, j) \in \mathbb{N}_n, i \neq j$ et $t(i) = j$ et $t(j) = i$, et $\forall k \in \mathbb{N}_n, (k \neq i \text{ et } k \neq j) \Rightarrow t(k) = k$.
 Notation : $t = (i, j)$.

$\forall n \geq 2$, S_n est engendré par les transpositions [DEMO par récurrence sur n]
 Exemple de décomposition en transpositions. Le centre de S_n est $\{ I_n \}$ [EXOS 21]

4 – Signature d'une permutation

$\forall \sigma \in S_n$, le nombre d'inversions de σ est $N_\sigma = \# \{ (i, j) \in \mathbb{N}_n^2, i < j \text{ et } \sigma(i) > \sigma(j) \}$.
 La signature de σ est $\epsilon_\sigma = (-1)^{N_\sigma}$.

L'application : $\sigma \in S_n \rightarrow \epsilon_\sigma \in \{-1, 1\}$ est un morphisme de groupe. [demo : $\epsilon_\sigma = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (\sigma(j) - \sigma(i))}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (j - i)}$]

Une transposition est toujours impaire [demo : on compte les inversions]
 Corollaire : $\forall \sigma \in S_n, \exists (t_1, t_2, \dots, t_p)$ p transpositions, $\sigma = t_p \circ \dots \circ t_1$; alors $\epsilon_\sigma = (-1)^p$.

Sous-groupe alterné : $\mathcal{A}_n = \{ \sigma \in S_n, \epsilon_\sigma = 1 \}$ est le sous-groupe noyau de l'application $\sigma \rightarrow \epsilon_\sigma$.

$$\#(\mathcal{A}_n) = n!/2 = \#(S_n)/2 \quad [\text{demo bijection : } \sigma \rightarrow t \circ \sigma, \text{ où } t \text{ est une transposition}]$$

II Formes multilinéaires sur un espace vectoriel

E est un \mathbf{K} -espace vectoriel, où \mathbf{K} est un sous-espace vectoriel de \mathbb{C} .

1 – Formes p-linéaires sur E

$f : (u_1, \dots, u_p) \in E^p \rightarrow f(u_1, \dots, u_p)$ est une forme p-linéaire sur E si
 $\forall i \in \mathbb{N}_p, \forall (u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_p) \in E^{p-1}$, l'application $x \in E \rightarrow f(u_1, \dots, u_{i-1}, x, u_{i+1}, \dots, u_p)$ appartient à E^* .
 $\mathcal{L}_p(E, \mathbf{K})$ désigne l'ensemble des formes p-linéaires sur E .
 $\forall (u_1, \dots, u_p) \in E^p, \exists i \in \mathbb{N}_p, u_i = 0_E$, alors $f(u_1, \dots, u_p) = 0_{\mathbf{K}}$.
 $\forall (u_1, \dots, u_p) \in E^p, \forall i \in \mathbb{N}_p, f(u_1, \dots, -u_i, \dots, u_p) = -f(u_1, \dots, u_p)$.

2 – Structure de l'ensemble des formes p-linéaires sur E

$\mathcal{L}_p(E, \mathbf{K})$ est un \mathbf{K} -espace vectoriel [$\sim d$] Soit $f \in \mathcal{L}_p(E, \mathbf{K})$.
 f est symétrique si $\forall (i, j) \in \mathbb{N}_p^2, i < j, \forall (u_1, \dots, u_p) \in E^p, f(u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_p) = f(u_1, \dots, u_j, \dots, u_i, \dots, u_p)$.

L'ensemble des formes p-linéaires symétriques sur E est notée $\mathcal{S}_p(E, \mathbf{K})$.

f est antisymétrique si $\forall (i, j) \in \mathbb{N}_p^2, i < j, \forall (u_1, \dots, u_p) \in E^p, f(u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_p) = -f(u_1, \dots, u_j, \dots, u_i, \dots, u_p)$.

L'ensemble des formes p -linéaires antisymétriques sur E est notée $\mathcal{A}_p(E, \mathbf{K})$.

f est alternée si $\forall (i, j) \in \mathbb{N}_p^2, i < j, \forall (u_1, \dots, u_p) \in E^p, u_i = u_j \Rightarrow f(u_1, \dots, u_p) = 0$.

L'ensemble des formes p -linéaires alternées sur E est notée $\Lambda_p(E, \mathbf{K})$.

$$\mathcal{A}_p(E, \mathbf{K}) = \Lambda_p(E, \mathbf{K}) \quad [\text{demo} \Leftrightarrow \text{facile}]$$

III Déterminant d'un système de n vecteurs dans un espace vectoriel de dimension n

1 – Espace vectoriel $\Lambda_n(E, \mathbf{K})$

$\dim \Lambda_n(E, \mathbf{K}) = 1$ où E est un espace vectoriel de dimension n

[DEMO : $\forall f \in \Lambda_n(E, \mathbf{K}), \forall \sigma \in S_n, \forall (u_1, \dots, u_n) \in E^n, f(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(n)}) = \varepsilon_\sigma f(u_1, \dots, u_n)$.

Introduction de $g : (u_1, \dots, u_n) \in E^n \rightarrow \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon_\sigma \lambda_{\sigma(1),1} \lambda_{\sigma(2),2} \dots \lambda_{\sigma(n),n} \in \mathbf{K}$,

où $\lambda_{j,i}$ est la coordonnée $n^o j$ du vecteur u_i dans une base préalablement choisie

$\forall f \in \Lambda_n(E, \mathbf{K}), f = f(b_1, \dots, b_n) \times g$. Puis demo que $g \in \Lambda_n(E, \mathbf{K})$ et $g \neq 0$]

Si $B = (b_1, \dots, b_n)$ est la base d'un \mathbf{K} – espace vectoriel de dimension n , E , on appelle \det_B la forme n -linéaire alternée sur E Telle que $\det_B(b_1, \dots, b_n) = 1$.

$$\text{Autrement dit, } \det_B(u_1, \dots, u_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon_\sigma \lambda_{\sigma(1),1} \lambda_{\sigma(2),2} \dots \lambda_{\sigma(n),n} \quad \text{si } \forall j \in \mathbb{N}_n, u_j = \sum \lambda_{i,j} b_i.$$

\det_B engendre $\Lambda_n(E, \mathbf{K}) : \forall f \in \Lambda_n(E, \mathbf{K}), f = f(b_1, \dots, b_n) \det_B$.

2 – Cas particuliers

$$n = 2 : \begin{vmatrix} \lambda_{1,1} & \lambda_{1,2} \\ \lambda_{2,1} & \lambda_{2,2} \end{vmatrix} = \lambda_{1,1} \lambda_{2,2} - \lambda_{2,1} \lambda_{1,2}$$

$n = 3$: Règle de Sarrus : somme des "diagonales paires" – somme des "diagonales impaires".

3 – Notations

$$\det_B(u_1, \dots, u_n) = \begin{vmatrix} \lambda_{1,1} & \dots & \lambda_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{n,1} & \dots & \lambda_{n,n} \end{vmatrix} \quad \text{si } \forall j \in \mathbb{N}_n, u_j = \sum \lambda_{i,j} b_i.$$

Le déterminant d'une matrice carrée est le déterminant du système de ses vecteurs colonnes.

4 – Propriétés fondamentales d'un déterminant

$\dim E = n, b = (b_1, \dots, b_n)$ base de $E, \forall (u_1, \dots, u_n) \in E^n$,

- $\det_B(u_1, \dots, u_n)$ dépend linéairement de chacun des vecteurs
- Si on effectue une permutation $\sigma \in S_n$ sur les indices des vecteurs, le déterminant associé est multiplié par ε_σ .
- Si l'un des vecteurs est nul, le déterminant est nul.
- Un déterminant est inchangé si on ajoute à l'un des vecteurs qui le constituent une combinaison linéaire des autres. [demo rapide]
- $\det(u_1, \dots, u_n) = 0 \Leftrightarrow u_1, \dots, u_n$ sont linéairement dépendants [demo \Leftarrow et contraposée de \Rightarrow]

Corollaire : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}), \det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A \in \text{GL}_n(\mathbf{K})$

Remarque : $\forall \lambda \in \mathbf{K}, \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}), \det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$

5 – Changement de base, déterminant d'un endomorphisme

Soit B et B' deux bases de $E, \forall (u_1, \dots, u_n) \in E^n, \det_{B'}(u_1, \dots, u_n) = \det_{B'}(B) \cdot \det_B(u_1, \dots, u_n)$. [Chasles ; $\sim d$]

$\forall f \in \mathcal{L}(E), \exists \lambda \in \mathbf{K}, \forall B$ base de $E, \forall (u_1, \dots, u_n), \det_B(f(u_1), \dots, f(u_n)) = \lambda \det_B(u_1, \dots, u_n)$. [demo]

λ est alors appelé le déterminant de l'endomorphisme f .

Remarques : $\forall B$ base de $E, \det_B(f(b_1), \dots, f(b_n)) = \det(f)$ $\det(\text{Mat}(f, B)) = \det(f)$

$\forall f \in \mathcal{L}(E), \det(f) \neq 0 \Leftrightarrow f$ automorphisme d'espace vectoriel.

6 – Opérations sur les déterminants

$\forall (f, g) \in \mathcal{L}(E)^2, \det(g \circ f) = \det(f) \times \det(g)$ [demo rapide]

Corollaire : $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})^2, \det(BA) = \det(A) \times \det(B)$

Remarques : Si $f \in \mathcal{L}(E)$ est bijective, alors $\det(f^{-1}) = (\det(f))^{-1}$. Si $A \in GL_n(\mathbf{K}), \det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$.

$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}), \det({}^tA) = \det(A)$ [demo kaf]

Corollaire : toute propriété d'un déterminant par rapport à ses colonnes est valable également vis à vis de ses lignes.

$$\text{Ex : } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

IV Calculs de déterminants

1 – Développement d'un déterminant par rapport aux éléments d'une ligne ou d'une colonne

Soit $S_{n,i} = \{ \sigma \in S_n, \sigma(i) = j \}$

$\forall i \in \mathbb{N}_n, (S_{n,i})_{j \in \mathbb{N}_n}$ est une partition de S_n .

$\forall j \in \mathbb{N}_n, (S_{n,i})_{i \in \mathbb{N}_n}$ est une partition de S_n . [demo : non vide, intersection de deux vide, union = S_n]

Soit $j \in \mathbb{N}_n; \Delta = \det(A) = \sum_{i \in \mathbb{N}_n} \alpha_{ji} A_{ji}$: dével. du dét. Δ par rapport à sa $j^{\text{ème}}$ ligne où $A = [\alpha_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$

Soit $i \in \mathbb{N}_n; \Delta = \det(A) = \sum_{j \in \mathbb{N}_n} \alpha_{ji} A_{ji}$: dével. du dét. Δ par rapport à sa $j^{\text{ème}}$ ligne.

$$\text{où } A_{ji} = \sum_{\sigma \in S_{n,i}} \epsilon_{\sigma} \alpha_{\sigma(1),1} \dots \alpha_{\sigma(i-1),i-1} \alpha_{\sigma(i+1),i+1} \dots \alpha_{\sigma(n),n}$$

A_{ji} est nommé cofacteur de l'élément α_{ji} de la matrice A .

2 – Calcul des cofacteurs

Calcul de A_{nn} : C'est le déterminant d'ordre $n-1$ obtenu en supprimant la dernière ligne et la dernière colonne.

Calcul de A_{ij} : On se ramène au cas précédent par des inversions de lignes ou de colonnes.

A_{ij} est le produit de $(-1)^{i+j}$ par le déterminant d'ordre $n-1$ obtenu en supprimant dans Δ la ligne i et la colonne j .

Exemples : $n = 3$ Règle des signes (table de xor)

$$\begin{vmatrix} \alpha - \beta - \gamma & 2\alpha & 2\alpha \\ 2\beta & \beta - \alpha - \gamma & 2\beta \\ 2\gamma & 2\gamma & \gamma - \alpha - \beta \end{vmatrix} = (\alpha + \beta + \gamma)^3$$

3 – Calcul d'un déterminant par blocs

Cas particulier : on divise la matrice M en 4 blocs $A \ C \ D \ B$ / les deux blocs A et B de la diagonales sont carrés et l'un des 2 autres blocs C ou D est nul. Alors $\det(M) = \det(A) \det(B)$ [demo]

Généralisation : $\det(M) = \prod_{i=1}^k \det(A_i)$ [demo par récurrence immédiate]

Application : si M est triangulaire supérieure, son déterminant est le produit des coefficients diagonaux.

4 – Utilisation des déterminants pour le calcul de l'inverse d'une matrice

$A = [\alpha_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) ; B = [A_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Alors $A \times {}^tB = \det(A) I_n$. [demo]

Déterminants de Vander Monde $v(x_1, \dots, x_n) = \det([x_i^j]) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$ [demo récurrence]

$$v(x_1, \dots, x_n) = 0 \Leftrightarrow \exists (i, j) \in \mathbb{N}_n^2, i \neq j \text{ et } x_i = x_j.$$

18 – Systèmes linéaires

I Définitions

Définition d'un système linéaire de n équations à p inconnues, d'une solution du système.

Introduction des formes linéaires $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \mathbf{K}^{p*}$.

$A = [\alpha_{ij}]$: matrice des coefficients $\in M_{n,p}(\mathbf{K})$

A_i : vecteur de la $i^{\text{ème}}$ colonne des coefficients $\in \mathbf{K}^n$.

B : vecteur colonne 2nd membre $\in \mathbf{K}^n = (\beta_1, \dots, \beta_n)$

II Interprétations d'un système linéaire

1 – Interprétation vectorielle

(x_1, \dots, x_p) est solution de $(\mathcal{S}) \Leftrightarrow B = \sum x_j A_j$.

(\mathcal{S}) admet des solutions $\Leftrightarrow B \in \text{Vect}\{A_1, \dots, A_n\}$

On cherche toutes les façons possibles de décomposer B en fonction des A_i .

2 – Interprétation à l'aide d'une application linéaire

$\exists ! f \in \mathcal{L}(\mathbf{K}^p, \mathbf{K}^n), A = \text{Mat}(f, B, C)$ (bases canoniques)

(\mathcal{S}) admet des solutions $\Leftrightarrow B \in \text{Im}f$

On recherche $f^{-1}\{B\}$

II Système homogène

1 – Définition

Un système homogène (\mathcal{H}) est un système dans lequel tous les 2nd membres sont nuls.

2 – Existence de solutions

La solution nulle est toujours solution.

3 – Unicité de la solution nulle

1^è interprétation : A_1, \dots, A_p sont linéairement indépendants $\Rightarrow p \leq n$.

2^è interprétation : Les solutions de (\mathcal{H}) constituent $\text{Ker } f$; c'est donc un sous-espace vectoriel.

La solution nulle est unique ssi f est injective.

4 – Liaison entre un système quelconque et un système homogène

A tout système linéaire (\mathcal{S}) on peut associer un système homogène (\mathcal{H}) , et les solutions du système supposé possible sont somme d'une solution particulière et de toutes les solutions du système homogène associé. [~d]

IV Système de Cramer

1 – Définitions

Un système de Cramer est un système de n équations à n inconnues, dont la matrice est inversible.

2 – Existence de solutions

Un système de Cramer admet une solution unique. [demo avec les 2 interprétations]

3 – Expression de la solution

Formules de Cramer : En notant $\Delta_j = \det(A_1, \dots, A_{j-1}, B, A_{j+1}, \dots, A_n)$, et $\Delta = \det(A_1, \dots, A_n)$,

alors $\forall j \in \mathbb{N}_n, x_j = \Delta_j / \Delta$. [mais calculs très longs si n est supérieur à 5]

IV Cas général d'un système de n équations à p inconnues

1 – Rang d'un système

Le rang d'un système est le rang de la matrice associée. Notation : r.
On a $r \leq n$ et $r \leq p$.

2 – Existence de solutions

$$B = \sum x_j A_j \quad r = \dim \text{Vect} \{ A_1, \dots, A_p \}$$

Si $r = n$ ($\Rightarrow n \leq p$), le système est possible, car A_1, \dots, A_n est une base de \mathbf{K}^n .

En supposant que A_1, \dots, A_n sont linéairement indépendants, on résout (\mathcal{S}) par rapport aux inconnues x_1, \dots, x_n (inconnues "principales"), exprimées en fonction des inconnues x_{n+1}, \dots, x_p ("paramètres").

Si $r < n$, $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ forment un système de rang r. Supposons que $(\varphi_1, \dots, \varphi_r)$ est libre :

$$\forall k \in \{r+1, \dots, n\}, \varphi_k = \lambda_{k1} \varphi_1 + \dots + \lambda_{kr} \varphi_r.$$

$$\text{Or } (x_1, \dots, x_p) \text{ solution de } (\mathcal{S}) \Rightarrow \beta_k = \lambda_{k1} \beta_1 + \dots + \lambda_{kr} \beta_r.$$

Si ces conditions sont toutes remplies, les $n - r$ dernières équations sont satisfaites si les n premières le sont \rightarrow On ne garde que le système de n équations à p inconnues, de rang r.

Ex :

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 2x - 2y + 3z &= 2 \\ 4x + 5z &= 5 \\ x + 3y + 2z &= 2 && \text{n'a pas de solution.} \\ 3x + 4y + z + 2t &= 3 \\ 6x + 8y + 2z + 5t &= 7 \\ 9x + 12y + 3z + 10t &= 13 && \text{a pour solution } t = 1 \\ &&& z = 1 - 3x - 4y \end{aligned}$$

Pour les formule de Cramer, le nombre d'opérations à réaliser pour résoudre un système de n équations à n inconnues est de $(n+1)(n+1)I - 1$; soit 34 millions d'années si $n = 20$ et $f = 1$ MHz.

Formule de Stierling : $n! \sim \sqrt{2\pi n} (n/e)^n$.

V Méthode du Pivot de Gauss

Si (\mathcal{S}') est la recopie de (\mathcal{S}), en remplaçant l'une des formes linéaires φ_k par $\sum \gamma_i \varphi_i$ où $\gamma_k \neq 0$, alors $(\mathcal{S}) = (\mathcal{S}')$, c'est-à-dire qu'ils sont les mêmes solutions [demo].

Le principe est de rendre le système triangulaire à partir d'opérations élémentaires. [demo récurrence]

Opérations nécessaires : $6(n+1) + 3n(n-1) + n(n-1)(2n-1)/2 + (n-1)(n+1)$; soit 9 ms si $n = 20$ et $f = 1$ MHz.

Améliorations :

Technique du Pivot Maximum : on choisit à chaque étape le coefficient le plus grand en valeur absolue.

Utilisation du Pivot de Gauss pour la détermination de l'inverse d'une matrice inversible :

$$M_q \dots M_1 A A^{-1} = M_q \dots M_1 I_n \quad \text{où } (M_i) \text{ sont des opérations élémentaires.}$$

Ex :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix}$$

19 – Espaces euclidiens

E désigne un \mathbb{R} – espace vectoriel.

I Produit scalaire

1 – Forme bilinéaire symétrique définie positive

Un produit scalaire sur E est une application de $E \times E$ dans \mathbb{R} , qui associe à (x, y) le réel noté $\langle x | y \rangle$, tel que

$\forall x \in E$, l'application $y \in E \rightarrow \langle x | y \rangle$ est une forme linéaire sur E

$\forall y \in E$, l'application $x \in E \rightarrow \langle x | y \rangle$ est une forme linéaire sur E

$\forall (x, y) \in E^2$, $\langle x | y \rangle = \langle y | x \rangle$

$\forall x \in E$, $\langle x | x \rangle \geq 0$

$\forall x \in E$, $\langle x | x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$

bilinéaire

symétrique

définie positive

Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est dit préhilbertien.

$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n$, $\forall (y_1, \dots, y_n) \in E^n$, $\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, $\forall (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n$, $\langle \sum \lambda_i x_i | \sum \mu_j y_j \rangle = \sum \lambda_i \mu_j \langle x_i | y_j \rangle$

2 – Exemples

$E = \mathbb{R}^n$; Soit $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$. $\langle x | y \rangle = \sum x_i y_i$ est le produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^n .

$E = M_n(\mathbf{K})$; $\forall (A, B) \in M_n(\mathbf{K})^2$, $\langle x | y \rangle = \text{Tr}({}^t A B)$ est un produit scalaire. [demo]

$E = C^0([a, b], \mathbb{R})$; $\forall (f, g) \in C^0([a, b], \mathbb{R})^2$, $\langle x | y \rangle = \int_a^b fg$ est un produit scalaire. [~d]

3 – Norme euclidienne associée

$\forall x \in E$, la norme de x est $\|x\| = \sqrt{\langle x | x \rangle}$

$\forall x \in E$, $\|x\| \geq 0$, et $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$\forall x \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

Un vecteur normé est un vecteur de norme 1

$\forall x \in E \setminus \{0\}$, $x/\|x\|$ et $-x/\|x\|$ sont les seuls vecteurs colinéaires à x et normés.

Inégalité de Cauchy-Schwarz : $\forall (x, y) \in E^2$, $|\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$, et

$|\langle x | y \rangle| = \|x\| \|y\| \Leftrightarrow x$ et y colinéaires [demo trinôme du 2nd degré avec $\|\lambda x + y\|^2$]

Inégalité de Minkowski (ou triangulaire) : $\forall (x, y) \in E^2$, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, et

$\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ et $x \neq 0 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}_+$, $y = \lambda x$ [demo $\|x+y\|^2$ puis Cauchy Schwarz]

$\forall (x, y) \in E^2$, $\langle x | y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$
 $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

4 – Orthogonalité

$\forall (x, y) \in E^2$, $x \perp y$ si $\langle x | y \rangle = 0$ Cette relation n'est que symétrique.

$\forall A \subset E$, $\forall B \subset E$, A et B non vides, $A \perp B$ si $\forall a \in A$, $\forall b \in B$, $a \perp b$.

$\forall A \subset E$, $\forall B \subset E$, A et B non vides, $A \perp B \Leftrightarrow \text{Vect}(A) \perp \text{Vect}(B)$ [demo facile]

On note $A^\perp = \{ x \in E, x \perp A \}$

$\forall A \subset E$, A^\perp est un sous-espace vectoriel, et $A^\perp = (\text{Vect}(A))^\perp$. [demo avec la remarque ci dessous]

Rem : $A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$.

Un système $(x_i)_{i \in I}$ est dit orthogonal si $\forall (i, j) \in I^2$, $i \neq j \Rightarrow x_i \perp x_j$

Il est orthonormal si en plus $\forall i \in I$, $\|x_i\| = 1$.

Un système orthogonal de vecteurs non nuls est libre. [demo facile]

Un système orthonormal est libre.

Théorème de Pythagore : Soit $(x_i)_{i \in \mathbb{N}_n}$ un système fini orthogonal de vecteurs de E. Alors :

$\|\sum x_i\|^2 = \sum \|x_i\|^2$ [demo hyperrapide]

$\forall (x, y) \in E^2$, les 3 énoncés suivants sont équivalents :

1. $x \perp y$

2. $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

3. $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ [petite demo]

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors :

$(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$

$F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$

$$F \subset F^{\perp\perp} \quad [\text{demos sans pb}]$$

Soit $a \in E \setminus \{0\}$. L'application $x \in E \rightarrow \langle x | a \rangle \in \mathbb{R}$ est une forme linéaire de E . Donc son noyau, $\{x \in E, x \perp a\}$ est un hyperplan de E .

II Espace euclidien

1 – Définition, bases

Un espace euclidien est un espace préhilbertien de dimension finie. Ex : \mathbb{R}^n .

[def d'une base orthogonale, orthonormale ...]

Dans un espace euclidien, il existe des bases orthonormales (BON).

[demo par récurrence sur $\dim E$; utilisation de l'hyperplan]

Soit $B = (b_1, \dots, b_n)$ une base orthonormale de E . Alors $\forall (x, y) \in E^2, x = \sum x_i b_i$ et $y = \sum y_i b_i \Rightarrow \langle x | y \rangle = \sum x_i y_i$

[Ca n'implique pas l'unicité du produit scalaire car B dépend du produit scalaire ; et (x_i, y_i) dépendent de B]

Conséquence : $\|x\| = \sqrt{\sum x_i^2}$

Procédé d'orthonormalisation de Schmidt : On peut construire à partir de $B = (b_1, \dots, b_n)$ quelconque, une base $B' = (x_1, \dots, x_n)$ orthonormée, telle que $\forall p \in \mathbb{N}_n, \text{Vect}(b_1, \dots, b_p) = \text{Vect}(x_1, \dots, x_p)$ [demo de proche en proche]

Ex : Sur $\mathbb{R}^3 : \langle (x_1, x_2, x_3) | (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1 y_1 + x_1 y_2 + 2 x_2 y_2 + x_3 y_3$ est un produit scalaire. Une base orthonormale de \mathbb{R}^3 est $((1,0,0), (-1,1,0), (0,0,1))$ après Schmittage de la base canonique.

Point de vue matriciel : Sur $\mathbb{R}^n, x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$; $\langle x | y \rangle = \sum \alpha_{ij} x_i y_j$ où $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ (symétrie)

Soit $A = [\alpha_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ symétrique. Alors $\langle x | y \rangle = {}^t X A Y$

2 – Orthogonal d'un sous-espace vectoriel

F est un sous-espace vectoriel de E euclidien. Alors

- $E = F \oplus F^\perp$ [DEMO : construction d'une BON intéressante par thbi et Schmidt]
- $F = F^{\perp\perp}$ [demo avec égalité des dimensions]
- $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$ [demo d'après la dernière propriété]

Une projection orthogonale de E sur un sev F est l'endomorphisme $p : x \rightarrow p(x)$ tel que $p(x) \in F$ et $x - p(x) \in F^\perp$.

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. p est un projecteur orthogonal $\Leftrightarrow p \circ p = p$ et $\forall (x, y) \in E^2, \langle p(x) | y \rangle = \langle x | p(y) \rangle$ [demo ok]

Rem : (b_1, \dots, b_n) BON de E ; Alors $x = \sum_{1 \leq i \leq n} \langle x | b_i \rangle b_i$ donc en prenant une BON telle que (b_1, \dots, b_p) soit une BON de $F, p(x) = \sum_{1 \leq i \leq p} \langle x | b_i \rangle b_i$.

Distance de 2 vecteurs x et y de $E : d(x, y) = \|y - x\|$

$$d(x, y) \geq 0 \quad d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

Distance d'un vecteur x à un sous-espace vectoriel $F : d(x, F) = \inf \{ d(x, y), y \in F \}$

$\exists ! y \in F, d(x, y) = d(x, F)$; y est le projeté orthogonal de x sur F [demo Pythagore]

Symétrie orthogonale : $s \in \mathcal{L}(E)$ est une symétrie orthogonale par rapport à F si s est la symétrie de E par rapport à F parallèlement à $F^\perp : \forall x \in E, \exists ! (x_1, x_2) \in F \times F^\perp, x = x_1 + x_2 ; s(x) = x_1 - x_2$.

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle s(x) | s(y) \rangle = \langle x | y \rangle \quad [\text{demo simple}]$$

Matrice d'un projecteur dans une BON : $A = \text{Mat}(\text{projecteur}, \text{BON}) \Leftrightarrow A = {}^t A$ et $A^2 = A$. [demo rapide]

Si dans la BON $(b_1, \dots, b_n), (b_1, \dots, b_p)$ est une base de F sur lequel on projette, alors $A = \text{Diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$.

Matrice d'une symétrie orthogonale dans une BON (b_1, \dots, b_n) , où (b_1, \dots, b_p) est une base de F par rapport auquel on effectue la symétrie, la matrice est $A = \text{Diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$.

3 – Dual d'un espace euclidien

L'application, qui à $y \in E$, associe la forme linéaire sur $E : "x \rightarrow \langle x | y \rangle"$ est un isomorphisme de l'ev E sur l'ev E^* .

[demo : linéaire + injective + th. rang]

Recherche de l'antécédent d'une forme f : utilisation de la duale d'une BON de E :

$$\text{Si } f = \sum \lambda_i b_i^*, \text{ alors } y = \sum \lambda_i b_i. \quad [\text{demo}]$$

4 – Produit mixte et produit vectoriel

Orientation d'un espace vectoriel de dimension finie :

Deux bases B et B' ont la même orientation si $\det_B(B') > 0$

Cette relation est une relation d'équivalence dans l'ensemble des bases de E [\sim_d]

Orienter un \mathbb{R} – espace vectoriel de dimension finie, c'est choisir une base de référence, qualifiée de base de sens positif, ou direct. Toute autre base peut être directe, ou de sens rétrograde.

Cas particulier de E euclidien de dimension n : $P = \text{Mat}(\text{Id}, B', B)$ alors $P^{-1} = {}^t P$ [demo] $\Rightarrow \det(P) = \pm 1$.

Une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice A inversible telle que ${}^t A = A^{-1}$. A orthogonale $\Rightarrow \det(A) = \pm 1$.

Si B BON de E, et B' base de E, B' orthonormale \Leftrightarrow La matrice de passage de B à B' est orthogonale. [~d]

Soit un espace euclidien orienté de dimension n ; le déterminant d'un système de n vecteurs dans une base orthonormale de sens direct ne dépend pas de celle-ci. C'est le produit mixte, noté $[x_1, \dots, x_n]$. [demo rapide]

Le produit mixte a toutes les propriétés d'un déterminant.

Matrice de Gram de p vecteurs (x_1, \dots, x_p) d'un espace vectoriel de dim n. $G = [\langle x_i | x_j \rangle]$. [EXOS 23]

Utile pour savoir si ces p vecteurs sont linéairement indépendants. Calcul de distances à des hyperplans...

Cas particulier : $\dim E = 3$: L'application $z \in E \rightarrow [x, y, z] \in \mathbb{R}$ est une forme linéaire sur E donc $\exists ! w \in E, \forall z \in E, [x, y, z] = \langle w | z \rangle$. w est appelé le produit vectoriel de x et de y, noté $x \wedge y$.

Propriétés de la nouvelle LCI "produit vectoriel" :

- L'application $(x, y) \in E \times E \rightarrow x \wedge y \in E$ est bilinéaire et antisymétrique.
 - $\forall (x, y) \in E^2, x \wedge y = 0 \Leftrightarrow x$ et y sont linéairement dépendants
 - $\forall (x, y) \in E^2, x \wedge y \perp x$ et $x \wedge y \perp y$
 - Si (x, y) est un système libre de E, $(x, y, x \wedge y)$ forme une base de sens direct de E.
 - Si (b_1, b_2, b_3) est une BOND de E, alors $b_3 = b_1 \wedge b_2$. [DEMOS pas dures]
- Rem : Si (b_1, b_2, b_3) BOND alors (b_2, b_3, b_1) et (b_3, b_1, b_2) sont BOND aussi car la signature d'une perm. circ est +1. (Calcul du produit vectoriel en pratique...)

Double produit vectoriel : $\forall (x, y, z) \in E^3, (x \wedge y) \wedge z = \langle x | z \rangle y - \langle y | z \rangle x$

Rem : \wedge n'est pas associative en général

Division vectorielle : Soit $(a, b) \in E^2$. Peut-on trouver x, λ tel que $a \wedge x = b$? [DIY : CNS, solup : $\lambda a \wedge b$, solug]

III Groupe orthogonal d'un espace euclidien

1 – Matrices orthogonales de $M_n(\mathbb{R})$

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Il y a équivalence entre :

1. ${}^t A A = I_n$
2. $A {}^t A = I_n$
3. A est la matrice d'un changement de BON
4. Les vecteurs colonnes de A constituent une BON de \mathbb{R}^n muni du produit scalaire canonique.

$O(n) = \{ A \in M_n(\mathbb{R}), A \text{ orthogonale} \}$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$: groupe orthogonal

$SO(n) = \{ A \in O(n), \det(A) = +1 \}$ est un sous-groupe de $O(n)$: groupe spécial orthogonal

2 – Cas général d'un espace vectoriel de dimension n

Endomorphisme orthogonal : Soit $u \in E^E$. Les 2 énoncés sont équivalents :

1. $\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x) | u(y) \rangle = \langle x | y \rangle$
2. $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$ [demo \Leftrightarrow ok]

Si u est un endomorphisme orthogonal de E alors u est un automorphisme. [demo bases]

$GL(E)$ désigne l'ensemble des automorphismes de E.

$O(E) = \{ u \in GL(E), \forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\| \}$, l'ensemble des isométries, est un sous-groupe de $GL(E)$.

Soit $u \in E^E$. Il y a équivalence entre :

1. u conserve le produit scalaire
2. u linéaire et conserve la norme
3. u linéaire et $\forall B$ BON de E, $u(B)$ BON de E
4. u linéaire et $\exists B$ BON de E, $u(B)$ BON de E
5. u linéaire et $\forall B$ BON de E, $\text{Mat}(u, B) \in O(n)$
6. u linéaire et $\exists B$ BON de E, $\text{Mat}(u, B) \in O(n)$ [demo : $1 \Rightarrow 3 ; 4 \Rightarrow 1 ; 3 \Leftrightarrow 5 ; 4 \Leftrightarrow 6$]

Conséquence : $\forall u \in O(E), \det(u) = \pm 1$

$SO(E) = \{ u \in O(E), \det(u) = +1 \}$ est un sous-groupe de $O(E)$.

Une rotation est une isométrie de déterminant +1.

Si E orienté et B est BOND : u rotation de E \Leftrightarrow u(B) directe.

Ex : symétrie \perp de E par rapport à F (sev de E), u. Dans toute BON B de E, $\text{Mat}(u, B)$ est \perp et symétrique. [~demo]

Réciproque : $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\text{Mat}(u, B) = A$ telle que ${}^t A = A$ et ${}^t A A = I_n$ alors u est une symétrie \perp [EXOS 23]

Cas particulier : u symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan H de E (réflexion). Alors $\det(u) = -1$.

$\forall (a, b) \in E^2, a \neq b, a \neq 0, b \neq 0, \|a\| = \|b\|, \exists ! u$ réflexion de E, $u(a) = b$.

[DEMO cas particulier $\dim E = 2$ puis général $\Delta = \text{Vect}\{a - b\}$ et $H = \Delta^\perp$]

3 – Groupe orthogonal d'une droite euclidienne

$O(E) = \{ \text{Id}_E, -\text{Id}_E \}$ $SO(E) = \{ \text{Id}_E \}$ [demo rapide]

4 – Groupe orthogonal d'un plan euclidien

Etude des groupes O(2) et SO(2) :

L'application : $t \in \mathbb{R} \rightarrow e^{it} \in U$ est un morphisme de groupe de noyau $2\pi\mathbb{Z}$. [ADMIS]

Corollaire : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow \exists \theta \in \mathbb{R}, a = \cos \theta$ et $b = \sin \theta$.

Soit $A \in O(2)$.

$$\text{Si } \det(A) = +1, \exists \theta \in \mathbb{R}, A = R_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$\text{Si } \det(A) = -1, \exists \theta \in \mathbb{R}, A = S_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix} \quad [\text{demo}]$$

$$\forall (\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2, \quad R_\theta R_{\theta'} = R_{\theta+\theta'} \qquad S_\theta S_{\theta'} = R_{\theta-\theta'}$$

SO(2) est un groupe abélien

$$(R_\theta)^{-1} = R_{-\theta}$$

$$(S_\theta)^{-1} = S_\theta$$

$$R_\theta \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta' \\ \sin \theta' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta+\theta') \\ \sin(\theta+\theta') \end{bmatrix}$$

$$S_\theta \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta' \\ \sin \theta' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta-\theta') \\ \sin(\theta-\theta') \end{bmatrix}$$

Groupe O(E) :

Les isométries négatives de E sont les réflexions. [demo rapide]

Vecteur directeur de la droite de la réflexion caractérisée par θ dans B : $\cos(\theta/2) b_1 + \sin(\theta/2) b_2$.

Toute rotation du plan est la composée de 2 réflexions. Sur ces 2 réflexions, on peut en choisir une de façon arbitraire. [demo rapide]

Soient $r \in SO(E)$ et B et B' deux BON de E. $\text{Mat}(r, B)$ est caractérisée par θ , et $\text{Mat}(r, B')$ par θ' . Si B et B' ont la même orientation, $\theta \equiv \theta' [2\pi]$; sinon, $\theta \equiv -\theta' [2\pi]$ [demo facile]

Soit E un plan euclidien orienté, et $r \in SO(E)$. Il existe une unique classe d'équivalence de réels θ définis modulo 2π

telle que $\forall B \text{ BOND}, \text{Mat}(r, B) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$. Cette classe d'équivalence (élément de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$) est appelée l'angle de

la rotation. Tout représentant de cette classe est appelé mesure de l'angle.

Angle de 2 vecteurs normés : $\forall (x, y) \in E^2, \|x\| = \|y\| = 1, \exists ! r \in SO(E), r(x) = y$. L'angle de r est appelé l'angle des

vecteurs x et y, noté $\widehat{(x, y)}$. $\exists ! s \in S(E)$ réflexion, $s(x) = y$. [demo sans pb]

Angle de 2 vecteurs non nuls x et y : c'est l'angle de $x/\|x\|$ et de $y/\|y\|$.

Prop : $\langle x | y \rangle = \|x\| \|y\| \cos \theta$

$$[x, y] = \|x\| \|y\| \sin \theta \qquad \text{où } \theta \in \widehat{(x, y)}$$

Relation de Chasles : $\forall (x, y, z) \in (E \setminus \{0\})^3, \widehat{(x, z)} = \widehat{(x, y)} + \widehat{(y, z)}$. [demo composition des apps]

L'angle de 2 droites D_1 et D_2 est une classe d'équivalence de réels définis module π ; un représentant θ de cette classe est tel que $\cos \theta = \langle x_1, x_2 \rangle$ et $\sin \theta = [x_1, x_2]$, où x_1 et x_2 sont des vecteurs unitaires arbitraires de D_1 et D_2 .

Angle polaire par rapport à un axe : On choisit un vecteur unitaire particulier i. L'angle polaire de $x \neq 0$ est (i, x) .

Angles particuliers : Angle plat : $\pi \in (x, -x)$; Angles droits : $\pi/2$ et $-\pi/2$ sont des mesures de 2 angles (x, y) où $x \perp y$.

Si $r \in SO(E)$ d'angle de mesure θ , décomposée en 2 réflexions par rapport à D_1 et D_2 , une mesure de l'angle des 2 droites est $\theta/2$. [demo DIY+]

Interprétation d'une équation cartésienne d'une droite vectorielle :

$$\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \forall u \in E, u = x i + y j \in D \Leftrightarrow a x + b y = 0 \text{ (équation cartésienne)}$$

$$\Leftrightarrow \langle u | v \rangle = 0 \text{ si } v = a i + b j. D \text{ est engendrée par } -b i + a j$$

Angle de 2 droites : $D_{1/2} : a_{1/2} x + b_{1/2} y = 0$. Si θ est une mesure de (D_1, D_2) , $\tan \theta = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1 a_2 + b_1 b_2}$.

5 – Groupe orthogonal d'un espace euclidien de dimension 3

Toute isométrie de E est la composée d'au plus 3 réflexions.

[demo : Si $\exists x \in E, u(x) = x$: on se ramène à un pb 2D. Sinon, on rajoute une réflexion 3D]

Généralisation : Dans un espace euclidien de dim n, où $u \in O(E)$, u peut se décomposer en n réflexions max. [demo]

Corollaire : Une rotation (en dimension 3) est la composée de 2 réflexions.

Etude des rotations de E : $r = s_1 \circ s_2$. $s_{1/2}$ est la réflexion de plan $P_{1/2}$. Soit $D = P_1 \cap P_2$. Soit k un élément non nul de D. $D^\perp = P$ est stable par r. Soit r' l'endomorphisme induit par r sur P. C'est une rotation (dét).

Orientons E. On oriente aussi D arbitrairement par le choix d'un vecteur normé k. D ainsi orienté devient l'axe de la rotation r. On oriente le plan P tel que (i, j) est une BOND de P si (i, j, k) est une BOND de E (c'est-à-dire $k = i \wedge j$).

Soit θ une mesure de l'angle de la rotation r' de P. Alors on a

$$\text{Mat}(r, (i, j, k)) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

r est caractérisé par son axe et son angle.

Image d'un vecteur x par la rotation d'axe dirigé par k normé et d'angle de mesure θ :

$$r(x) = \cos \theta x + \sin \theta k \wedge x + (1 - \cos \theta) \langle x | k \rangle k \quad [\text{demo en le vérifiant pour Vect}(x) \text{ et Vect}(x)^\perp]$$

Réciproque : Trouver l'axe et l'angle d'une rotation de matrice connue.

→ Recherche des vecteurs invariants (système linéaire) pour trouver k

→ Utilisation de la trace de la matrice pour trouver le cosinus de θ .

→ Vecteur quelconque $x \in E \setminus \text{Vect}(k)$ puis $[k, x, r(x)] = \sin \theta \|k \wedge x\|^2$ pour avoir le signe du sinus.

Etude des isométries négatives. Soit $u \in O(E)$, $\det(u) = -1$.

$\exists x \in E \setminus \{0\}$, $u(x) = -x$ [demo] Alors, $\text{Vect}\{x\}^\perp$ est stable par u . u' est l'endomorphisme induit par u .

C'est une rotation (dét). Donc une isométrie négative est :

- une réflexion (si u' est l'identité)
- la composée d'une rotation de l'espace par une réflexion de plan orthogonal à l'axe de la rotation.

Image d'un vecteur x par la composée de la rotation d'axe dirigé par k normé et d'angle de mesure θ et de la symétrie par rapport à $\{k\}^\perp$:

$$s(x) = \cos \theta x + \sin \theta k \wedge x + (-1 - \cos \theta) \langle x | k \rangle k$$

Il existe toujours une BON telle que $\text{Mat}(u, B) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Ex : A est la matrice d'une isométrie négative. Elle est symétrique \Rightarrow c'est une réflexion.

Si elle n'est pas symétrique, on cherche $x \in E$, $u(x) = -x$. $\text{Vect}\{x\}^\perp$ est le plan de la réflexion.

Pour trouver les coordonnées images de $X = (\alpha, \beta, \gamma)$, on écrit $X + X' \in \text{Vect}\{x\}^\perp$ et $X - X' \perp \text{Vect}\{x\}^\perp$.

→ on peut avoir la matrice B de la réflexion. AB est alors une matrice de rotation.

Autre méthode : écriture de A dans une autre BON. Même trace \Rightarrow on peut connaître l'angle θ .

Générateurs de $SO(E)$: Un demi-tour, ou retournement est une symétrie orthogonale par rapport à une droite D .

Toute rotation $r \in SO(E)$ est la composée d'au plus 2 demi-tours. [demo]

Angles dans l'espace euclidien orienté : $\forall (x, y) \in (E \setminus \{0\})^2$, si (x, y) système libre, $P = \text{Vect}\{x, y\}$ est un plan. On oriente P arbitrairement; l'angle de (x, y) dans E est alors l'angle (x, y) dans P , mais sans l'orientation. Si (x, y) est un système lié, $\exists \lambda \in \mathbb{R}^*$, $y = \lambda x$. Si $\lambda > 0$, 0 est une mesure de (x, y) ; sinon, π est une mesure de (x, y) .

On peut fixer $\theta \in [0, \pi]$; il est entièrement connu par $\cos \theta = \langle x | y \rangle / (\|x\| \|y\|)$

Rem : $\|x \wedge y\| = \|x\| \|y\| |\sin \theta|$ [demo]

Angle de 2 droites : θ , mesure de (D_1, D_2) est définie par $\cos \theta = |\langle u_1 | u_2 \rangle|$, si u_1 vecteur normé de D_1 et u_2 de D_2 .

On peut fixer $q \in [0, \pi/2]$.

Angle de 2 plans : L'angle des plans P_1 et P_2 est l'angle de P_1^\perp et de P_2^\perp .

Angle d'une droite et d'un plan : Une mesure de (D, P) est $\pi/2 - \theta$, où θ est une mesure de (D, P^\perp) .

Interprétation d'une équation cartésienne d'un plan : $u = x i + y j + z k \in P \Leftrightarrow a x + b y + c z = 0$

$\Leftrightarrow \langle u | v \rangle = 0$, où $v = a i + b j + c k$. v est donc un vecteur orthogonal à P .

Droite définie comme l'intersection de 2 plans distincts : Recherche d'un vecteur directeur

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0 (P_1) \quad v_1 = (a_1, b_1, c_1) \in P_1^\perp$$

$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = 0 (P_2) \quad v_2 = (a_2, b_2, c_2) \in P_2^\perp$$

$v_1 \wedge v_2$ est un vecteur directeur de la droite, car il appartient à $P_1 \cap P_2$.

20 – Espaces affines

I Structure affine

1 – Axiomes de la structure

Soit V un \mathbf{K} – espace vectoriel, où \mathbf{K} est un sous-corps de \mathbb{C} . (Notations des vecteurs avec des flèches)

Un ensemble $\mathcal{E} \neq \emptyset$ est un espace affine attaché à l'espace vectoriel V s'il existe $\Phi : \mathcal{E} \times V \rightarrow \mathcal{E}$, telle que

1. $\forall A \in \mathcal{E}, \Phi(A, \vec{0}) = A$
2. $\forall A \in \mathcal{E}, \forall (\vec{u}, \vec{v}) \in V^2, \Phi(\Phi(A, \vec{u}), \vec{v}) = \Phi(A, \vec{u} + \vec{v})$
3. $\forall (A, B) \in \mathcal{E}^2, \exists ! \vec{u} \in V, \Phi(A, \vec{u}) = B.$

2 – Translation

Soit \mathcal{E} un espace affine attaché à un ev V .

$\forall \vec{u} \in V$, la translation de vecteur \vec{u} est l'application $T_{\vec{u}} : A \in \mathcal{E} \rightarrow T_{\vec{u}}(A) = \Phi(A, \vec{u}) \in \mathcal{E}$.

Interprétation des axiomes :

1. $t_{\vec{0}} = \text{Id}_{\mathcal{E}}$
2. $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in V^2, T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{u}} = T_{\vec{u} + \vec{v}}$.
3. $\forall (A, B) \in \mathcal{E}^2, \exists ! \vec{u} \in V, B = T_{\vec{u}}(A).$

Conséquence : $\forall \vec{u} \in V, T_{\vec{u}}$ est une permutation de \mathcal{E} . [demo car $T_{-\vec{u}} \circ T_{\vec{u}} = T_{\vec{u}} \circ T_{-\vec{u}} = \text{Id}_{\mathcal{E}}$]

L'application $\vec{u} \in V \rightarrow T_{\vec{u}} \in S_{\mathcal{E}}$ est un morphisme injectif de groupe. [demo rapide]

L'ensemble des translations sur \mathcal{E} est un groupe pour la loi \circ . Il est isomorphe à $(V, +)$.

3 – Exemples

(\mathcal{S}) est un système linéaire de n équations à p inconnues, qui a des solutions.

Soit (\mathcal{H}) le système homogène associé à (\mathcal{S}). Soit V l'ensemble de ses solutions. V est un ev.

L'ensemble des solutions de (\mathcal{S}) est un espace affine attaché à V . [demo]

De même pour les équations différentielles linéaires avec 2^e membre.

4 – Comparaison des structures affines et vectorielles

Structure affine d'un espace vectoriel : on peut définir $\Phi : (A, \vec{u}) \rightarrow A + \vec{u}$.

Espaces vectoriels associés à un espace affine : On fixe $O \in \mathcal{E}$. $f_O : \vec{u} \rightarrow T_{\vec{u}}(O)$ est une bijection (antécédent unique).

$\forall (A, M) \in \mathcal{E}^2, \exists ! (\vec{v}, \vec{u}) \in V^2, T_{\vec{v}}(O) = A, T_{\vec{u}}(O) = M$. On définit $A + M = T_{\vec{u} + \vec{v}}(O)$ et $\lambda A = T_{\lambda \vec{v}}(O)$

\mathcal{E} est alors un espace vectoriel isomorphe à V . (\mathcal{E}, O) est dit "espace pointé".

Notation définitive d'une translation : notation additive

5 – Equipollence

$\forall (A, B, C, D) \in \mathcal{E}^4, (A, B)$ est équipolent à (C, D) si $\exists \vec{u} \in V, B = T_{\vec{u}}(A)$ et $D = T_{\vec{u}}(C)$.

C'est une relation d'équivalence. [\sim_d]. $\mathcal{E} \times \mathcal{E} / \mathfrak{R}$ est en bijection avec V .

Notation : $\vec{A}\vec{B}$ est la classe d'équivalence de (A, B) . $A + \vec{A}\vec{B} = B$.

Relation de Chasles : $\forall (A, B, C) \in \mathcal{E}^3, \vec{A}\vec{B} + \vec{B}\vec{C} = \vec{A}\vec{C}$.

Parallélogramme : (A, B, C, D) est un parallélogramme si $\vec{A}\vec{B} = \vec{D}\vec{C}$ ou si $\vec{A}\vec{D} = \vec{B}\vec{C}$ [\sim_d].

$\forall (A, B) \in \mathcal{E}^2, \exists ! I \in \mathcal{E}, \vec{A}\vec{I} = \vec{I}\vec{B}$. I est dit le milieu du bipoint (A, B) .

(A, B, C, D) est un parallélogramme $\Leftrightarrow (A, C)$ et (B, D) ont même milieu. [\sim_d]

6 – Dimension

Si \mathcal{E} est un espace affine attaché à V de dimension n , n est aussi de dimension \mathcal{E} . [def]

Repère cartésien d'un espace affine de dimension $n \geq 1$: $R = (O, B) = (O, b_1, \dots, b_n)$, où $O \in \mathcal{E}$ et B base de V .

Changement de repère cartésien : $R = (O, B)$ et $R' = (O', B')$. $P = \text{Mat}(\text{Id}_V, B', B)$. Alors :

(matriciel) : $X = \Omega + P X'$ où Ω est le vecteur des coordonnées de O' dans R .

Translation de repère : $B = B'$; $P = I_n$. $X = \Omega + X'$.

Si $\dim \mathcal{E} = 2$ et V euclidien orienté, $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$ et $R' = (O', \vec{i}', \vec{j}')$ repères orthonormaux. P est une matrice de rotation.

II Variétés affines

$\mathcal{E} = V$ est un \mathbf{K} – espace vectoriel et un espace affine attaché à V .

1 – Définition d'une variété affine

Soit $\Phi : (A, \vec{u}) \rightarrow A + \vec{u}$.

$\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ ($\mathcal{F} \neq \emptyset$) est une variété affine attachée à W , sev de V si c'est un espace affine attaché à l'ev W utilisant pour l'application $\mathcal{F} \times W \rightarrow \mathcal{F}$ la restriction de Φ à $\mathcal{F} \times W$.

$\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ ($\mathcal{F} \neq \emptyset$) est une variété affine attachée à W sev de V ssi :

1. $\forall (A, B) \in \mathcal{F}^2, \vec{AB} \in W$.
2. $\forall (A, \vec{u}) \in \mathcal{F} \times W, A + \vec{u} \in \mathcal{F}$.

Si \mathcal{F} est une variété affine attachée au sev W de V , alors $W = \{ \vec{MN}, (M, N) \in \mathcal{F}^2 \} \quad [\sim d]$

$\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ ($\mathcal{F} \neq \emptyset$) est une variété affine de \mathcal{E} ssi $\exists A \in \mathcal{F}, \exists W$ sev de $V, \mathcal{F} = \{ A + \vec{u}, \vec{u} \in W \} \quad [\sim d]$

Dénomination : \mathcal{F} est la variété affine passant par A de direction W .

Ex : Droite affine passant par A et de vecteur directeur $\vec{u} \neq \vec{0} : D = \{ M \in \mathcal{E}, \exists \lambda \in \mathbf{K}, \vec{AM} = \lambda \vec{u} \} ; \lambda$ est la mesure algébrique de \vec{AM} par rapport à \vec{u} , noté \vec{AM} .

Rem : Soit \mathcal{F} variété affine passant par A et de direction W . En identifiant \mathcal{E} et V , on a $\mathcal{F} = T_A(W)$.

2 – Intersection de variétés affines

$\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \Rightarrow W_1 \subset W_2$

$W_1 \subset W_2$ et $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \neq \emptyset \Rightarrow \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$.

Soit \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 deux variétés affines de \mathcal{E} . Si $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \neq \emptyset$, alors c'est une variété affine de direction $W_1 \cap W_2$. [$\sim d$]

Si $V = W_1 + W_2$, alors $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \neq \emptyset \quad [\text{demo : décomposition de } \vec{A_1A_2}]$

Si $V = W_1 \oplus W_2$, alors $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ est un point.

Généralisation : Soit $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ une famille de variétés affines d'intersection non nulle. Alors $\cap \mathcal{F}_i$ est une variété affine de direction $\cap W_i$.

Soit $S \subset \mathcal{E}$ ($S \neq \emptyset$) et $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ la famille de toutes les variétés affines qui contiennent S . $\cap \mathcal{F}_i$ est la plus petite variété affine contenant S ; elle est appelée variété affine engendrée par S .

La variété affine engendrée par $\{ A_j / j \in J \}$ est la variété affine contenant A_{j_0} et de direction $\{ \vec{A_{j_0}A_j} / j \in J \} \quad [d]$

3 – Parallélisme

Soient \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 deux variétés affines de direction W_1 et W_2 . $\mathcal{F}_1 \parallel \mathcal{F}_2$ si $W_1 \subset W_2$.

Le parallélisme est une relation réflexive et transitive. Elle n'est pas symétrique.

$\mathcal{F}_1 \parallel \mathcal{F}_2 \Rightarrow \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 = \emptyset$ ou $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$.

Rem : $\mathcal{F}_1 \parallel \mathcal{F}_2 \Rightarrow \dim \mathcal{F}_1 \leq \dim \mathcal{F}_2$. (petit \parallel grand)

4 – Hyperplans affines

Hyperplan affine = variété affine dont la direction est un hyperplan vectoriel.

On suppose \mathcal{E} de dimension finie : $\dim \mathcal{E} = \dim V = n \geq 2$.

\mathcal{H}_1 hyperplan affine de dimension W_1 ; \mathcal{H}_2 hyperplan affine de dimension W_2 . 2 cas se présentent :

- Soit $\mathcal{H}_1 \parallel \mathcal{H}_2$, et ($\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$ ou $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 = \emptyset$)
- Soit $\mathcal{H}_1 \not\parallel \mathcal{H}_2$, et $\dim(\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2) = n - 2$.

Equation cartésienne d'un hyperplan affine : $R = (O, \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$; \mathcal{H} hyperplan passant par A de direction $W = \text{Ker } \varphi$.

$\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}, \varphi(\sum x_i b_i) = \sum \lambda_i x_i$. (coordonnées de φ dans le dual de $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$)

$M \in \mathcal{H} \Leftrightarrow \vec{AM} \in \text{Ker } \varphi \Leftrightarrow \sum \lambda_i (x_i - a_i) = 0 \Leftrightarrow \sum \lambda_i x_i = u$.

Réciproque : $\mathcal{H} = \{ M, \sum \lambda_i x_i = u \}$ est l'hyperplan passant par A et de direction $\text{Ker } \varphi$.

Soient $\mathcal{H}_1 : \sum \lambda_i x_i = u_1$ et $\mathcal{H}_2 : \sum \mu_i x_i = u_2$.

$\mathcal{H}_1 \parallel \mathcal{H}_2 \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbf{K}^*, \forall i \in \mathbb{N}_n, \mu_i = \alpha \lambda_i$, et dans ce cas, $u_1 = \alpha u_2 \Leftrightarrow \mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$.

5 – Variétés affines d'un plan affine

$\dim \mathcal{E} = \dim V = 2 ; \mathbf{K} = \mathbb{R}$. On supposera $\mathcal{E} = V = \mathbb{R}^2$. $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$

Représentation paramétrique d'une droite affine : Soit D définie par A et le vecteur $\vec{u} = \alpha \vec{i} + \beta \vec{j}$.

$M(x, y) \in D \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, x = x_A + \lambda \alpha$ et $y = y_A + \lambda \beta$. λ est la mesure algébrique de \vec{AM} par rapport à \vec{u} .

Equation cartésienne de D : $a x + b y = c$, où $(a, b) \neq (0, 0)$.

Soit D définie par A et le vecteur $\vec{u} = \alpha \vec{i} + \beta \vec{j}$. $M(x, y) \in D \Leftrightarrow (\vec{AM}, (\alpha, \beta)) \text{ liés} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_A & \alpha \\ y - y_A & \beta \end{vmatrix} = 0$

Soit D définie par A et B ($A \neq B$). $M(x, y) \in D \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & -1 \\ x_A & y_A & -1 \\ x_B & y_B & -1 \end{vmatrix} = 0$ (système linéaire)

Si $A = (x_A, 0)$ et $B = (0, y_B)$, $D : x/x_A + y/y_B = 1$.

Parallélisme : $D_1 : a_1 x + b_1 y = c_1$ $D_2 : a_2 x + b_2 y = c_2$.

$D_1 // D_2 \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}^*, a_2 = \alpha a_1$ et $b_2 = \alpha b_1$. Dans ce cas, $c_2 = \alpha c_1 \Leftrightarrow D_1 = D_2$.

Faisceau de droites : $D_1 : a_1 x + b_1 y = c_1$ $D_2 : a_2 x + b_2 y = c_2$. ($D_1 \neq D_2$)

{ D droites d'équation $(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2)x + (\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2)y = (\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2)$, $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ } est appelé le faisceau de D_1 et de D_2 .

Si $D_1 \not// D_2$, c'est l'ensemble des droites passant par le point I défini comme $\{I\} = D_1 \cap D_2$. [demo V^*]

Si $D_1 // D_2$, c'est l'ensemble des droites parallèles à D_1 et à D_2 . [demo sys. linr]

6 – Variétés affines d'un espace affine de dimension 3

$\mathcal{E} = V = \mathbb{R}^3$. $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Représentation paramétrique d'une droite : $M \in D$ passant par A et dirigée par \vec{u} . $\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \vec{AM} = \lambda \vec{u}$..

Représentation param. d'un plan : $M \in P$ plan passant par A et dirigé par \vec{u} et $\vec{v} \Leftrightarrow \exists (\lambda, \lambda') \in \mathbb{R}^2, \vec{AM} = \lambda \vec{u} + \lambda' \vec{v}$.

Equation cartésienne d'un plan : $P : a x + b y + c z = d$, où $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

P défini par A, \vec{u} et \vec{u}' : $M \in P \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_A & \alpha & \alpha' \\ y - y_A & \beta & \beta' \\ z - z_A & \gamma & \gamma' \end{vmatrix} = 0$

P défini par A, B, C non alignés : $M \in P \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & z & -1 \\ x_A & y_A & z_A & -1 \\ x_B & y_B & z_B & -1 \\ x_C & y_C & z_C & -1 \end{vmatrix} = 0$

Droite affine : définition possible par l'intersection de 2 plans affines non parallèles..

Faisceau de plans : $P_1 : a x + b y + c z = d$ $P_2 : a' x + b' y + c' z = d'$.

{ P plans d'équation $(\lambda a + \lambda' a')x + (\lambda b + \lambda' b')y + (\lambda c + \lambda' c')z = (\lambda d + \lambda' d')$, $(\lambda, \lambda') \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ } est appelé le faisceau de P_1 et de P_2 .

Si $P_1 \not// P_2$, c'est l'ensemble des plans contenant la droite $P_1 \cap P_2$.

Si $P_1 // P_2$, c'est l'ensemble des plans parallèles à P_1 et à P_2 . [DEMO \Leftrightarrow^2]

Ex : un plan qqc contenant Oz est d'équation $\lambda x + \lambda' y = 0$

III Applications affines

1 – Définition

\mathcal{E} et \mathcal{E}' sont deux 2 espaces affines attachés à V et V'.

Une application $\Phi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ est affine si l'application $\varphi : \vec{MN} \in V \rightarrow \varphi(\vec{MN}) = \Phi(M) - \Phi(N)$ est linéaire.

φ est dite partie linéaire de Φ . Φ est caractérisée par l'image d'un point de \mathcal{E} et $\varphi : \forall M \in \mathcal{E}, \Phi(M) = \Phi(A) + \varphi(\vec{AM})$.

Réciproque : $\forall \varphi \in \mathcal{L}(V, V'), \forall (A, A') \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}', \Phi : M \in \mathcal{E} \rightarrow A' + \varphi(\vec{AM})$ est l'application affine de partie linéaire φ et qui transforme A en A'.

Exemples : translation et homothéties affines : $H(M) = C + k\vec{CM}$.

L'ensemble des vecteurs invariants d'une application affine est une variété affine. [demo plus loin]

2 – Propriétés

La composée de 2 applications affines est une application affine dont la partie linéaire est la composée des parties linéaires. [~d]

$\Phi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ affine de partie linéaire φ a les mêmes propriétés d'injectivité, de surjectivité, de bijectivité que φ . [demos]

3 – Image affine d'une variété affine

Soit $\Phi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ affine de partie linéaire $\varphi \in \mathcal{L}(V, V')$. Soit \mathcal{F} la variété affine de \mathcal{E} passant par A et de direction W . Alors $\Phi(\mathcal{F})$ est la variété affine de \mathcal{E}' passant par $\Phi(A)$ et de direction $\varphi(W)$.

[demo que $\Phi(\mathcal{F}) = \{ M' \in \mathcal{E}', \vec{A}'M' \in W' \}$]

Conséquence : une application affine conserve le parallélisme.

Exemple : projection affine. Soit \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 deux variétés affines de \mathcal{E} de directions W_1 et W_2 supplémentaires dans V .

Soit $\{O\} = \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$. Soit $\forall M \in \mathcal{E}$, \mathcal{F}_M est la variété affine contenant M de direction W_2 . $\mathcal{F}_M \cap \mathcal{F}_1 = \{M\}$, l'image de M dans la projection affine sur \mathcal{F}_1 parallèlement à \mathcal{F}_2 .

Exemple : symétrie affine...

4 – Applications affines d'un espace affine dans lui-même

Soit $\Phi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ affine laissant O invariant. Φ est définie par sa partie linéaire. $\forall M \in \mathcal{E}$, $\Phi(M) = O + \varphi(\vec{OM})$

Toute application affine de \mathcal{E} dans \mathcal{E} est la composée d'une translation et d'une application affine ayant un point fixe.

Groupe affine de \mathcal{E} : l'ensemble des bijections affines de \mathcal{E} dans \mathcal{E} .

Groupe des homothéties – translations :

$\Phi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ affine de partie linéaire φ est une homothétie ou une translation $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbf{K}^*, \varphi = k \text{Id}_V$. [demo]

Infos sur la composée d'éléments de ce groupe...

5 – Traduction analytique d'une application affine en dimension finie

$X' = Y + AX$ où X' : matrice colonne des coordonnées de $\Phi(x)$
 Y : matrice colonne des coordonnées de $\Phi(O)$
 $A = \text{Mat}(\varphi, B, B')$
 X : matrice colonne des coordonnées de x .

IV Barycentres

1 – Définition

\mathcal{E} est un espace affine et V un espace vectoriel.

Système pondéré de points : ensemble d'éléments de $\mathcal{E} \times \mathbf{K}$.

Fonction vectorielle de Leibniz : $\vec{F} : M \in \mathcal{E} \rightarrow \sum \alpha_j \vec{MA}_j \in V$.

$\forall (M, N) \in \mathcal{E}^2, \vec{F}(M) - \vec{F}(N) = (\sum \alpha_j) \vec{MN}$

Si $\sum \alpha_j = 0$, \vec{F} est une fonction constante.

Sinon, elle est injective. Elle est aussi surjective. [recherche d'antécédent]

Le barycentre G du système pondéré de points $\mathcal{S} = \{ (A_1, \alpha_1), \dots, (A_p, \alpha_p) \}$ tel que $\sum \alpha_j \neq 0$ est l'unique point de \mathcal{E} tel que $\sum \alpha_j \vec{GA}_j = 0$ (c'est-à-dire $\vec{F}(G) = \vec{0}$)

Rem₁ : $\forall M \in \mathcal{E}, \sum \alpha_j \vec{MA}_j = (\sum \alpha_j) \vec{MG}$.

Rem₂ : On peut multiplier tous les α_j par un scalaire k non nul sans modifier G .

Rem₃ : En choisissant $k = 1/\sum \alpha_j$, alors $\sum \alpha_j' = 1 \rightarrow$ unicité des coefficients.

Cas particulier : isobarycentre de $A_1, \dots, A_p =$ barycentre de $\{ (A_1, 1), \dots, (A_p, 1) \}$. Ex : milieu.

2 – Barycentre et variété affine

Le barycentre G du système pondéré $\{ (A_j, \alpha_j), j \in \mathbb{N}_p \}$ appartient à la variété affine engendrée par $\{ A_j, j \in \mathbb{N}_p \}$. [d]

Soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ ($\mathcal{F} \neq \emptyset$) est une variété affine $\Leftrightarrow \forall p \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}, \forall (A_1, \dots, A_p) \in \mathcal{F}^p, \forall (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbf{K}^p, \sum \alpha_j \neq 0$, le barycentre de $\{ (A_j, \alpha_j), j \in \mathbb{N}_p \}$ est dans \mathcal{F} . [demo \Leftrightarrow]

3 – Barycentre et application affines

$\Phi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ est affine $\Leftrightarrow \forall p \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}, \forall (A_1, \dots, A_p) \in \mathcal{F}^p, \forall (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbf{K}^p, \sum \alpha_j \neq 0$,

G est le barycentre de $\{ (A_j, \alpha_j), j \in \mathbb{N}_p \} \Rightarrow \Phi(G)$ est le barycentre de $\{ (\Phi(A_j), \alpha_j), j \in \mathbb{N}_p \}$ [demo]

4 – Propriétés

Commutativité : G barycentre de $\{ (A_j, \alpha_j), j \in \mathbb{N}_p \} \Rightarrow \forall \sigma \in S_p, G$ barycentre aussi de $\{ (A_{\sigma(j)}, \alpha_{\sigma(j)}), j \in \mathbb{N}_p \}$.

Associativité : G barycentre de $\{ (A_j, \alpha_j), j \in \mathbb{N}_p \} \Rightarrow \forall q \in \mathbb{N}, 2 \leq q \leq p - 1$, en appelant G' le barycentre "partiel" de $\{ (A_j, \alpha_j), j \in \mathbb{N}_q \}$, alors G est le barycentre de $\{ (G', \sum_{j=1}^q \alpha_j), (A_{q+1}, \alpha_{q+1}), \dots, (A_p, \alpha_p) \}$. [demo simple]

Exemples : droites concourrantes dans un triangles, dans un tétraèdre...

5 – Coordonnées d'un barycentre dans un espace affine de dimension finie

$A_j \mid x_{i,j}, G \mid x_i$ est le barycentre de $\{ (A_j, \alpha_j), j \in \mathbb{N}_p \}$. Alors
$$x_i = \frac{\sum_{j=1}^p \alpha_j x_{i,j}}{\sum_{j=1}^p \alpha_j}$$

6 – Coordonnées barycentriques

A_1, \dots, A_p ($p \geq 2$) sont affinement indépendants si $\{ \vec{A}_1 A_j, 2 \leq j \leq p \}$ est linéairement indépendants.

Repère affine de $\mathcal{E} : (A_1, \dots, A_{n+1})$.

$\forall M \in \mathcal{E}, \exists ! (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbf{K}^{n+1}, \sum x_j = 1, M$ est le barycentre de $\{ (A_j, x_j), j \in \mathbb{N}_{n+1} \}$. (x_1, \dots, x_{n+1}) sont les coordonnées barycentriques de M dans le repère affine (A_1, \dots, A_{n+1}) .

[éléments de conversion vers le repère $(A_1, \vec{A}_1 A_2, \dots, \vec{A}_1 A_{n+1})$]

Equation d'une droite dans le plan en coordonnées barycentriques [EXOS 25] : de la forme $\alpha a + \beta b + \gamma c = 0$.

V Convexité

\mathcal{E} est un espace affine sur \mathbb{R} et V un \mathbb{R} – espace vectoriel.

1 – Définition

Segment : $\forall (A, B) \in \mathcal{E}^2, [AB] = \{ M \in \mathcal{E}, \exists t \in [0, 1], M \text{ barycentre de } \{ (A, t) (B, 1 - t) \} \}$

Partie convexe : $\mathcal{C} \subset \mathcal{E} (\mathcal{C} \neq \emptyset)$ est convexe si $\forall (A, B) \in \mathcal{C}^2, [AB] \subset \mathcal{C}$.

2 – Caractérisation

Ex : les convexes de \mathbb{R} sont les intervalles.

$\mathcal{C} \subset \mathcal{E}$ est convexe $\Leftrightarrow \forall (A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{C}^n, \forall (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}_+^n, \mathcal{C}$ contient le barycentre de $\{ (A_i, \alpha_i), i \in \mathbb{N}_n \}$.

[demo \Rightarrow par récurrence sur n ; \Leftarrow évident]

Conséquence : toute variété affine est convexe (car stable par barycentre)

Exemple (en dim finie) : \mathcal{H} hyperplan affine d'équation $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = b$.

$\mathcal{C} = \{ M \in \mathcal{E}, a_1 x_1 + \dots + a_n x_n > b \}$ est une partie convexe. [demo sans pb]

3 – Intersection de parties convexes

Toute intersection non vide d'une partie convexe est convexe. [d]

Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}, (\mathcal{A} \neq \emptyset)$, et $(\mathcal{C}_i)_{i \in I}$ la famille des parties convexes contenant \mathcal{A} , et $\mathcal{C} = \bigcap \mathcal{C}_i$. C'est la plus petite partie convexe contenant \mathcal{A} , appelée enveloppe convexe de \mathcal{A} .

Soit $\mathcal{A} = \{ A_1, \dots, A_n \}$. L'enveloppe convexe de \mathcal{A} est l'ensemble des barycentres de $\{ (A_i, \alpha_i), i \in \mathbb{N}_n \}$

où $\forall i \in \mathbb{N}_n, \alpha_i \geq 0$ et $\sum \alpha_i = 1$. [demo \subset^2 assez long]

Exemple : dim $\mathcal{E} = 2$. On peut définir l'enveloppe convexe de 3 points non alignés comme l'intersection de 3 demiplans fermés, limités par AB, BC, CA et contenant l'isobarycentre de A, B, C.

Soit M barycentre de $\{ (A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma) \}$. Selon les signes de α, β, γ , on sait dans quelle zone du plan est M .

4 – Fonctions convexes

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}), \mathcal{E} = \mathbb{R}^2$.

On appelle épigraphe de $f : \{ M \in \mathcal{E}, x \in I \text{ et } y \geq f(x) \}$. f est convexe si son épigraphe l'est. [def]

Caractérisation d'une fonction convexe : Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$

1. $\forall (x, y) \in I^2, \forall t \in [0, 1], f(t x + (1 - t) y) \leq t f(x) + (1 - t) f(y)$

2. $\forall (x, y, z) \in I^3, x < y < z \Rightarrow \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$.

3. $\forall a \in I$, l'application $u \in I \setminus \{a\} \rightarrow \frac{f(u) - f(a)}{u - a} \in \mathbb{R}$ est croissante

4. f est convexe (c'est-à-dire son épigraphe est convexe) [DEMO longue $1 \Leftrightarrow 2 ; 2 \Leftrightarrow 3 ; 1 \Leftrightarrow 4$]

f est convexe $\Rightarrow \forall (x_1, \dots, x_n) \in I^n, \forall (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}_+^n, \sum t_i = 1 \Rightarrow f(\sum t_i x_i) \leq \sum t_i f(x_i)$.

[demo par récurrence sur n. HR n=2 donc ci-dessus. Réciproque]

Soit f convexe sur I , et $a \in I \setminus \{ \text{Inf } I, \text{Sup } I \}$. $\varphi_a : u \in I \setminus \{a\} \rightarrow \frac{f(u) - f(a)}{u - a}$ est croissante [...]

Donc f dérivable à droite et à gauche en a , et $f'_g(a) \leq f'_d(a) \Rightarrow f$ continue sur $I \setminus \{ \text{Inf } I, \text{Sup } I \}$

Si f convexe et dérivable sur I alors f' est croissante et continue sur I . [d ; TVI ; monotone]

Réciproque : $f \in C^1(I, \mathbb{R})$ de dérivée croissante est convexe. [demo diy+]

Si f est deux fois dérivable, alors f convexe $\Leftrightarrow f'' \geq 0$.

$f \in C^1(I, \mathbb{R})$ est convexe sur $I \Leftrightarrow \forall (a, x) \in I^2, f(x) \geq f(a) + (x - a) f'(a)$ [demo \Leftrightarrow simple]

$\Leftrightarrow f'$ croissante

Exemple : $f : x \in \mathbb{R}_+ \rightarrow x^p \in \mathbb{R}_+$ est convexe (de dérivée seconde positive)...

Inégalité de Holder : $\forall (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}_+^n, \forall (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}_+^n, \forall (p, q) \in \mathbb{R}^2, p > 1, q > 1, 1/p + 1/q = 1 \Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

Inégalité de Minkowski : $\forall (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}_+^n, \forall (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}_+^n, \forall p \in \mathbb{R}, p > 1 \Rightarrow$

$$\left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

[DEMO en partant de $f(\sum \alpha_j x_j / \beta) \leq \sum \alpha_j f(x_j) / \beta$ où $b = \sum a_j$]

21 – Géométrie euclidienne

I Orthogonalité et distance

\mathcal{E} est un espace affine associé à V , un \mathbb{R} – espace vectoriel euclidien de dimension $n \geq 1$. \mathcal{E} est alors appelé espace affine euclidien.

1 – Distance

$$\forall (A, B) \in \mathcal{E}^2, d(A, B) = \|\vec{AB}\|$$

$$\forall (A, B) \in \mathcal{E}^2, d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$$

$$\forall (A, B) \in \mathcal{E}^2, d(A, B) = d(B, A)$$

$$\forall (A, B, C) \in \mathcal{E}^3, d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C) \quad \text{inégalité triangulaire}$$

Distance d'un point à une partie de \mathcal{E} : $\forall A \in \mathcal{E}, \forall \mathcal{F} \subset \mathcal{E}, d(A, \mathcal{F}) = \text{Inf} \{ d(A, M), M \in \mathcal{F} \}$

Distance de 2 parties : $\forall \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{E}, \forall \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{E}, d(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) = \text{Inf} \{ d(A, B), (A, B) \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 \}$.

2 – Repère orthonormal

$R = (O, B)$ est orthonormal si B est une BON de V .

Changement de repère orthonormal : $X = \Omega + P X'$. (Cf plus haut)

3 – Orthogonalité

\mathcal{F}_1 est une variété affine de dimension W_1 ; \mathcal{F}_2 est une variété affine de direction W_2 .

$\mathcal{F}_1 \perp \mathcal{F}_2$ si $W_1 \perp W_2$ c'est-à-dire $W_1 \subset W_2^\perp$ ou $W_2 \subset W_1^\perp$. C'est une relation symétrique.

\mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 sont dits perpendiculaires si $\mathcal{F}_1 \perp \mathcal{F}_2$ et $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \neq \emptyset$.

Ex : en dimension 3, deux plans ne peuvent pas être orthogonaux. Attention : ils sont dits perpendiculaires si les orthogonaux à leurs directions sont orthogonaux.

Projection affine orthogonale : \mathcal{F} variété affine de \mathcal{E} , de direction W . $\mathcal{F} \cap$ la variété affine passant par M de direction $W^\perp = \{ \text{projeté de } M \}$.

La distance d'un point à une variété affine est la distance du point à son projeté orthogonal sur la variété affine.

[~d Pythagore]

Si $n = 2$, distance de 2 droites concurrentes : $d(D_1, D_2) = d(M_1, M_2)$ où $M_1 \in D_1$ et $M_2 \text{ proj } \perp$ de M_1 sur D_2 . [demo]

Si $n = 3$, distance de 2 droites non coplanaires : D_1 dirigé par \vec{u}_1 et D_2 par \vec{u}_2 . $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2$ forment une base de \mathcal{E} .

En appelant P_1 le plan contenant D_1 et de direction contenant $\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2$. De même pour P_2 .

$P_1 \cap P_2 = D$ droite affine dirigée par $\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2$. $\{M_1\} = D_1 \cap D$; $\{M_2\} = D_2 \cap D$. Alors $d(D_1, D_2) = d(M_1, M_2)$ [demo]

Solution pratique pour connaître $d(D_1, D_2)$: $d(D_1, D_2) = d(D_1, P) = d(D'_1, D_1)$ où P est le plan de direction contenant \vec{u}_1 et \vec{u}_2 et passant par D_2 ; D'_1 est le projeté de D_1 sur P .

Ex : $\forall (A, B) \in \mathcal{E}^2, A \neq B, \{ M \in \mathcal{E}, d(M, A) = d(M, B) \}$ est l'hyperplan affine passant par le milieu de (A, B) et orthogonal à la droite AB ; il est appelé l'hyperplan médiateur à AB . [diy]

II Plan affine euclidien orienté

1 – Angle

L'angle des bipoints (A, B) et (C, D) est l'angle des vecteurs \vec{AB} et \vec{CD} .

2 – Interprétation de l'équation cartésienne d'une droite affine

Dans un ROND, $D : ax + by = c$. Soit M de coordonnées x et y . Alors

$$d(M, D) = \frac{|ax + by - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad \text{[demo avec } \langle \vec{u} | \vec{M}_0 M \rangle \text{ avec } M_0 = p_D(M) \text{]}$$

Equation normale : $x \cos \theta + y \sin \theta = c \rightarrow$ le vecteur $(\cos \theta, \sin \theta)$ est orthogonal à D .

Si $D \not\parallel Oy$, équation de D sous la forme : $y = m x + p$. m est appelé la pente de la droite. $m = \tan(\vec{i}, D)$

$D_1 : y = m_1 x + p_1$ et $D_2 : m_2 x + p_2$ sont orthogonales $\Leftrightarrow m_1 m_2 = -1$.

3 – Bissectrices

$D_1 \cap D_2 = \{ I \}$. D_1 dirigé par \vec{u}_1 normé et D_2 par \vec{u}_2 normé.

Les bissectrices de D_1 et de D_2 , Δ et Δ' , sont les droites passant par I et dirigées par $\vec{u}_1 + \vec{u}_2$ et $\vec{u}_1 - \vec{u}_2$. On a $\Delta \perp \Delta'$.
 $\Delta \cup \Delta' = \{ M \in \mathcal{E}, d(M, D_1) = d(M, D_2) \}$ [demo en projetant M sur D_1 et D_2 orthogonalement]
 $(\Delta_1, \Delta) = (\Delta, \Delta_2)$ et $(\Delta_1, \Delta') = (\Delta', \Delta_2)$ [demo : ils ont même sinus et même cosinus]

4 – Propriétés métriques du triangle

Soit ABC un vrai triangle.

Alors $[\vec{AB}, \vec{AC}] = [\vec{BC}, \vec{BA}] = [\vec{CA}, \vec{CB}]$ [demo Chasles]

Si une mesure de l'angle (\vec{AB}, \vec{AC}) appartient à $]0, \pi[$, il en est de même pour (\vec{BC}, \vec{BA}) et pour (\vec{CA}, \vec{CB}) .
 (car le produit mixte donne le signe du sinus)

$\theta_A + \theta_B + \theta_C = \pi$ [demo Chasles]

$\frac{\sin \theta_A}{a} = \frac{\sin \theta_B}{b} = \frac{\sin \theta_C}{c}$ [d'après les relations du produit mixte]

Relation d'Al Kashi : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \theta_A$. [demo rapide]

Aire : $\frac{1}{2} \| [\vec{AB}, \vec{AC}] \| = \frac{1}{2} \| [\vec{BC}, \vec{BA}] \| = \frac{1}{2} \| [\vec{CA}, \vec{CB}] \|$
 $= \frac{1}{2} \| \vec{AA}' \| \| \vec{BC} \|$ si A' est le projeté \perp de A sur BC [demo Chasles]

Si M barycentre de $\{ (A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma) \}$, alors $\frac{|\alpha|}{\text{aire}_{MBC}} = \frac{|\beta|}{\text{aire}_{MAC}} = \frac{|\gamma|}{\text{aire}_{MAB}}$ [demo Chasles]

Médianes : se coupent au centre de gravité, barycentre de $\{ (A, 1), (B, 1), (C, 1) \}$

Bissectrices intérieures : se coupent au centre du cercle inscrit, barycentre de $\{ (A, a), (B, b), (C, c) \}$. [aire]

Hauteurs : se coupent en l'orthocentre, barycentre de $\{ (A, \tan \theta_A), (B, \tan \theta_B), (C, \tan \theta_C) \}$ [analyse]

Médiatrices : centre du c. circonscrit $\{ (A, \tan \theta_B + \tan \theta_C), (B, \tan \theta_A + \tan \theta_C), (C, \tan \theta_B + \tan \theta_A) \}$ [ortho A'B'C']

5 – Cercles

Equation normale d'un cercle : $M \in C \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$, où $c = a^2 + b^2 - R^2$

Réciproque : il faut $a^2 + b^2 - c \geq 0$.

Cercle défini par un diamètre : $M \in C \Leftrightarrow \langle \vec{MA} | \vec{MB} \rangle = 0$ car $\langle \vec{MA} | \vec{MB} \rangle = \| \vec{MI} \|^2 - \| \vec{IA} \|^2$ [demo Chasles]

Intersection d'un cercle et d'une droite : La droite est définie par 2 équations paramétriques.

$$M \in D \cap C \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \lambda^2(\alpha^2 + \beta^2) + 2\lambda(ax_0 + by_0 - a\alpha - b\beta) + (x_0^2 + y_0^2 - 2ax - 2by + c) = 0.$$

On peut supposer $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. En fait, $\Delta' = R^2 - d(I, D)^2$.

Tangente : $x_0x + y_0y - a(x + x_0) - b(y + y_0) + c = 0$. On remplace :

$$x^2 \rightarrow x_0x \quad y^2 \rightarrow y_0y \quad 2x \rightarrow x + x_0 \quad 2y \rightarrow y + y_0 \quad (\text{s'en rappeler})$$

Points cocycliques : L'angle au centre est le double de l'angle inscrit. [demo Chasles & bissectrices]

Cercle de centre I ; A, B, M appartiennent au cercle, et T est sur la tangente au cercle en A.

Alors $(\vec{IA}, \vec{IB}) = 2(\vec{MA}, \vec{MB}) = 2(\vec{AT}, \vec{AB})$ [demos]

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. $\{ M \in \mathcal{E}, (\vec{MA}, \vec{MB}) \equiv \theta [\pi] \} \cup \{ A, B \}$ est la droite AB si $\theta \equiv 0 [\pi]$; sinon, c'est le cercle passant par A et B tel que $(\vec{AT}, \vec{AB}) \equiv \theta [\pi]$. [demo]

Points cocycliques : A, B, C, D non 3 à 3 alignés sont cocycliques $\Leftrightarrow (CA, CB) \equiv (DA, DB) [\pi]$.

Pour le déterminer on peut utiliser des nombres complexes : $(\vec{CA}, \vec{CB}) \equiv \text{Arg} \left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} \right) [2\pi]$.

III Espace affine euclidien orienté de dimension 3

1 – Angles

2 – Equation cartésienne d'un plan

Dans une ROND : (P) : $ax + by + cz = d$.

$$d(M, P) = \frac{|ax + by + cz - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \quad [\langle \vec{u} | \vec{M}_0M \rangle]$$

Si $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, équation normale : $a = \cos \alpha, b = \cos \beta, c = \cos \gamma$.

Attention, la relation de Chasles n'est pas valable pour les angles.

3 – Distance d'un point à une droite

Droite donnée par un point A et un vecteur directeur \vec{u} :

$$d(M, D) = \frac{\| \vec{AM} \wedge \vec{u} \|}{\| \vec{u} \|}.$$

Droite donnée par l'intersection de 2 plan perpendiculaires :

$$d(M, D) = \sqrt{d^2(M, P_1) + d^2(M, P_2)}$$

⊗ Il faut savoir faire cela. (Centrale2000)

4 – Interprétation du produit vectoriel et du produit mixte

$$\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\| = 2 \times \text{aire}_{ABC} = \text{aire}_{ABDC \text{ parallélogramme}}$$

$$|[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]| = 6 \times \text{volume}_{ABCD} = \text{volume}_{\text{parallélépipède de base ABEC sur la droite AD}}$$

5 – Sphères

Equation normale de la sphère de centre (a, b, c) de rayon R :

$$M \in (S) \iff (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$

$$\iff x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + a^2 + b^2 + c^2 - R^2 = 0.$$

Réciproque : $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d^2$ est une équation de sphère $\iff a^2 + b^2 + c^2 - d \geq 0$.

Sphère définie par un diamètre : $M \in (S) \iff \langle \vec{MA} | \vec{MB} \rangle = 0$.

Intersection d'une sphère (S) et d'un plan (P) : on utilise un repère orthonormal de centre O, tel que (P) // xOy.

Si $d(O, (P)) < R$, $(S) \cap (P) =$ cercle de rayon $r = \sqrt{R^2 - d^2(O, (P))}$ et de centre le projeté orthogonal de O sur (P).

Si $d(O, (P)) = R$, $(S) \cap (P)$ est le projeté orthogonal de O sur (P). Le plan est dit tangent à la sphère.

Si $d(O, (P)) > R$, $(S) \cap (P) = \emptyset$.

Equation du plan tangent en M à la sphère : $xx_0 + yy_0 - 2a(x + x_0) - 2b(y + y_0) - 2c(z - z_0) + d = 0$.

(mêmes transformation à effectuer que dans le cas d'une droite tangente à un cercle)

Attention, il n'y a pas unicité de droite tangente à une sphère un en point.

Intersection d'une sphère et d'une droite : on se place dans le plan contenant la droite et le centre de la sphère. On se ramène à un problème plan : $(S) \cap (D) = ((S) \cap (P)) \cap (D)$ car $(D) \subset (P)$.

IV Isométries affines

1 – Cas général

\mathcal{E} affine euclidien de dimension n attaché à V.

$\Phi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ est une isométrie si $\forall (A, B) \in \mathcal{E}^2, d(\Phi(A), \Phi(B)) = d(A, B)$.

Φ isométrie \iff c'est une bijection affine de partie linéaire isométrie vectorielle. \rightarrow notion d'isométrie affine.

[demo $\Rightarrow \phi$ conserve le produit scalaire]

Groupe des isométries affines. Sous-groupe des déplacements (de partie linéaire rotation).

Sous-ensemble des antidéplacements (de partie linéaire isométrie vectorielle négative).

La composée de 2 réflexions affines par rapport à des hyperplans parallèles est une translation. [demo rapide]

Toute translation peut se décomposer en deux réflexions affines par rapport à des hyperplans parallèles.

Toute isométrie affine est la composée d'une translation et d'une isométrie affine laissant invariant un point.

\rightarrow toute isométrie affine est la composée de réflexions. [+]

Soit $O \in \mathcal{E}$. $\{ \Phi$ isométries affines de $\mathcal{E}, \Phi(O) = O \}$ est un sous-groupe du groupe des isométries, isomorphe à $O(V)$.

Soient A_0, \dots, A_n n+1 points affinement indépendants de \mathcal{E} . Soient B_0, \dots, B_n n+1 points quelconques de \mathcal{E} .

Alors $\exists ! \Phi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ affine, $\forall i \in \{ 0, \dots, n \}, \Phi(A_i) = B_i$. [demo rapide]

Soient A_0, \dots, A_n n+1 points affinement indépendants de \mathcal{E} . Soient B_0, \dots, B_n n+1 points de \mathcal{E} , tels que

$$\forall (i, j) \in \{ 0, \dots, n \}^2, d(A_i, A_j) = d(B_i, B_j)$$

Alors $\exists ! \Phi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ isométrie affine, $\forall i \in \{ 0, \dots, n \}, \Phi(A_i) = B_i$. [demo : ϕ conserve le produit scalaire]

2 – Isométries affines d'une droite affine

$O \in \mathcal{E}$. Isométries qui laissent O invariant : $\text{Id}_{\mathcal{E}}$ et S_O .

Toutes les isométries affines de \mathcal{E} sont :

- déplacements : les translations
- antidéplacements : symétries centrales = réflexions = générateurs [demo rapide]

3 – Isométries affines d'un plan affine

$O \in \mathcal{E}$. Isométries laissant O invariant : rotations affines et réflexions affines.

Toutes les isométries affines de \mathcal{E} sont :

- déplacements : les rotations et les translations. [demo composée est une rotation avec $S_{D4} \circ S_{D3} \circ S_{D2} \circ S_{D1}$]
- antidéplacements : les réflexions (générateurs) ou la composée de 3 réflexions.

4 – Isométries affines d'un espace affine de dimension 3

$O \in \mathcal{E}$. Isométries laissant O invariant : rotations, réflexions et composée de 3 réflexions.

Toutes les isométries affines de \mathcal{E} sont :

- déplacements : rotations (engendrés par les demi tours affines)
 Toute translation peut se décomposer en deux demi tours affines par rapport à des axes parallèles.
 La composée de 2 demi tours affines par rapport à des axes parallèles est une translation. [demo rapide]
 $T_{\vec{u}} \circ R(D, \theta) = S_{D_4} \circ S_{D_3} \circ S_{D_2} \circ S_{D_1}$. On s'arrange pour que $D_2 = D_3$. → Les déplacements sont tous la composée de deux demi tours. Si les axes de deux demi tours sont concourants, c'est ni rotation, s'ils sont parallèles, c'est une translation, sinon : déplacement hélicoïdal ou vissage [demo avec la perpendiculaire commune].
- antidéplacements : composée de 1, 3 ou 5 réflexions.
 Bijection entre les déplacement et les antidéplacements : composée par une réflexion.

5 – Isométries laissant une figure invariante

$\mathcal{F} \subset \mathcal{E}, \mathcal{F} \neq \emptyset$. On cherche $G = \{ \Phi \text{ isométrie de } \mathcal{E}, \Phi(\mathcal{F}) = \mathcal{F} \}$.

Si $\mathcal{F} = \{ A_1, \dots, A_n \}$ est $\Phi \in G$, alors $\Phi(O) = O$, où O est l'isobarycentre des points de \mathcal{F} .

Soit l'application $F : \Phi \in G \rightarrow F|_{\mathcal{F}} \in S_{\mathcal{F}} = S_n$ (notation délicate).

Si F est injective, elle établit un isomorphisme de groupe G sur $F(G)$ qui est un sous-groupe de $S_n \Rightarrow \#(G) \mid n!$

- Exemple :
- dimension 2. Triangle équilatéral. 3 rotations et 3 réflexions.
 - dimension 3. Tétraèdre régulier. 12 rotations et 12 réflexions.
 - dimension 3. Cube. DIY. 24 rotations et 24 réflexions.

6 – Similitudes directes d'un plan affine euclidien

Une similitude d'un plan affine est une application affine Φ telle que

$$\exists k > 0, \forall (A, B) \in \mathcal{E}^2, d(\Phi(A), \Phi(B)) = k d(A, B). \text{ k est appelé le rapport de la similitude.}$$

Une similitude de rapport $k \neq 1$ est la composée d'une homothétie et d'une isométrie. [demo $\mathcal{H}^{-1} \circ \Phi = \Psi$]

Une similitude directe est la composée d'une homothétie et d'une rotation. Elles forment un sous-groupe du groupe des applications affine.

Une similitude directe de rapport $k \neq 1$ possède un point fixe unique, appelé le centre de la similitude.

$$z' = k e^{i\alpha} z + z_0.$$

$$z = z' \Leftrightarrow z = \frac{z_0}{1 - k e^{i\alpha}} \quad \text{[demo C]}$$

V Coniques

1 – Définition analytique

\mathcal{E} plan affine euclidien orienté. $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$ ROND.

Une conique est une courbe plane d'équation cartésienne $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$, où $(a, b, c) \neq (0,0,0)$

Coniques dégénérées : $x^2 + y^2 = 0$; $x^2 - y^2 = 0$; $x^2 + y^2 + 1 = 0$; $x^2 - 2xy + y = 0$.

Intersection d'une conique et d'une droite : (D) définie avec un paramètre.

$M \in (\Gamma) \cap (D) \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, A t^2 + B t + C = 0 \rightarrow 0, 1 \text{ ou } 2 \text{ points d'intersection.}$

S'il y a 1 point d'intersection, (D) est dite tangente à la conique au point d'intersection.

On prend un repère dont l'origine est sur (Γ) → plus de terme constant.

$$\begin{aligned} (\Gamma) : ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey &= 0 \\ (D) : y &= tx \quad (t \text{ est un paramètre}) \end{aligned} \quad \text{Si } x \neq 0, \quad M \begin{cases} x = -\frac{2d + 2et}{ct^2 + 2bt + a} \\ y = -t \frac{2d + 2et}{ct^2 + 2bt + a} \end{cases}$$

Branches à l'infini : si le dénominateur s'annule.

Si $b^2 - ac > 0$, alors (Γ) présente 2 directions asymptotiques. Une telle conique est appelée hyperbole.

Si $b^2 - ac = 0$, elle a une direction asymptotique "double". C'est une parabole.

Si $b^2 - ac < 0$, elle n'a pas de directions asymptotiques. C'est une ellipse.

Centre de symétrie : Changement de repère vers $\Omega(\alpha, \beta)$ centre éventuel.

Ω centre de symétrie \Leftrightarrow coefficients des termes de degré 1 sont nuls $\Leftrightarrow ac - b^2 \neq 0$

→ seule la parabole n'a pas de centre de symétrie.

Equation de la tangente en un point d'une conique : [...] Nouvelle transformation : $2xy \rightarrow xy_0 + yx_0$.

2 – Equation réduite d'une conique

Coniques à centre : $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0$ donne les directions asymptotiques. Ici, $b^2 - ac \neq 0$.

Translation : vers un repère d'origine le centre de symétrie \rightarrow plus de termes de degré 1 : $ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2 + f' = 0$.

Rotation : pour que les termes en XY disparaissent. C'est possible [demo].

On a donc une équation de la forme $AX^2 + BY^2 + F = 0$, où $A \neq 0$ et $B \neq 0$.

Ellipse : ($AB > 0$). Equation réduite : $X^2/a^2 + Y^2/b^2 = 1$. Graphique. Tangente aux extrémités...

Hyperbole : ($AB < 0$). Equation réduite : $X^2/a^2 - Y^2/b^2 = 1$. Graphique. Asymptotes : $Y = \pm(b/a)X$. Tangentes...

Parabole : $b^2 - ac = 0$. Forme de l'équation : $(y - mx)^2 + 2dx + 2ey + cf = 0$ (carré parfait).

Rotation pour que la direction asymptotique $y = mx$ soit l'axe Ox' : $y'^2 + 2d'x' + 2e'y' + f' = 0$.

Translation pour que les termes en Y et constants s'annulent. C'est possible [demo].

On a donc une équation de la forme $Y^2 = 2pX$. $p > 0$ est le paramètre de la parabole. Grafx. Tangente...

3 – Conique définie par un foyer, une directrice et une excentricité

Soit F un point (appelé le foyer), D une droite (appelée directrice), et $e \in \mathbb{R}_+$ (appelé excentricité), tels que $F \notin D$.

Soit $(\Gamma) = \{ M \in \mathcal{E}, d(M,F) / d(M, D) = e \}$.

On choisit un repère tel que F ait pour coordonnées $(f, 0)$ et que D ait pour équation $x = d$.

$d(M,F) / d(M, D) = e \Leftrightarrow x^2(1 - e^2) + y^2 + 2(de^2 - f)x + f^2 - e^2d^2 = 0$.

Directions asymptotiques : $x^2(1 - e^2) + y^2 = 0$. Suivant la valeur de e, on retrouve les 3 coniques usuelles.

Réciproque : à partir de l'équation cartésienne, recherche d'un foyer, d'une directrice, et d'une excentricité.

Cas de l'**ellipse** : $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. Supposons $a > b > 0$. On identifie.

$$e = c / a \quad \text{où } c = \sqrt{a^2 - b^2} \quad \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

$$d = \pm a^2/c \quad f = \pm c.$$

Graphique. Soit Q l'intersection du grand cercle (de centre O de rayon a) avec la parallèle à Oy passant par F. La tangente en Q au grand cercle coupe Ox sur un point P de D. [demo]

Définition bifocale : $(\Gamma) = \{ M \in \mathcal{E}, d(M, F) + d(M, F') = 2a \}$ [demo]

Tangente en $M \in (\Gamma)$ = bissectrice extérieure de l'angle des 2 droites MF et MF'. [demo]

⊗ Il faut savoir que toute ellipse est l'image par une application affine d'un cercle. (Centrale2000)

Cas de l'**hyperbole** : $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$. On identifie.

$$e = c / a \quad \text{où } c = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2$$

$$d = \pm a^2/c \quad f = \pm c.$$

Graphique. Soit (C) le cercle de centre O de rayon a. Il coupe une asymptote en Q. La tangente au cercle en Q coupe l'axe Ox en un foyer. La directrice D est la parallèle à Oy passant par Q. [demo]

Définition bifocale : $(\Gamma) = \{ M \in \mathcal{E}, |d(M, F) - d(M, F')| = 2a \}$ [demo]

Tangente en $M \in (\Gamma)$ = bissectrice intérieure de l'angle des 2 droites MF et MF'.

Cas de la **parabole** : $y^2 - 2px = 0$. On identifie

$$e = 1. \quad f = p/2 \quad d = -p/2.$$

Graphique. La tangente en $M \in (\Gamma)$ est bissectrice intérieure de l'angle des droites MF et MH, si H est le projeté orthogonal de M sur D. [~d]

4 – Représentation paramétrique

Ellipse : $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ $x = a \cos \theta$ $y = b \sin \theta$.

Hyperbole : $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ $x = a \operatorname{ch} \varphi$ $y = b \operatorname{sh} \varphi$.

Parabole $y^2 = 2px$ $x = y^2/2p$ $y = y$

22 – Espaces vectoriels normés

I Espace \mathbb{R}^2

1 – Norme et distance

On appelle norme sur un \mathbb{R} -espace vectoriel E une application de E dans \mathbb{R}_+ , qui à \vec{u} associe $\|\vec{u}\|$, telle que

$$\begin{aligned} \forall \lambda \in \mathbb{R}, \exists \vec{u} \in E, \|\lambda\vec{u}\| &= |\lambda| \|\vec{u}\|. \\ \forall (\vec{u}, \vec{v}) \in E^2, \|\vec{u} + \vec{v}\| &\leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|. \\ \forall \vec{u} \in E, \|\vec{u}\| = 0 &\Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}. \end{aligned}$$

E est alors dit espace vectoriel normé (evn).

Distance associée à une norme : $\forall (A, B) \in E^2, d(A, B) = \|\vec{AB}\|$.

$$\begin{aligned} \forall (A, B) \in E^2, d(A, B) = 0 &\Leftrightarrow A = B \\ \forall (A, B) \in E^2, d(A, B) &= d(B, A) \\ \forall (A, B, C) \in E^3, d(A, C) &\leq d(A, B) + d(B, C) \end{aligned}$$

Mêmes définitions de distances d'un point à une partie de E, et distance de 2 parties de E...

Ex : $E = \mathbb{R}^2$. $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ norme euclidienne $N_1(\vec{u}) = \text{Sup}(|x|, |y|)$ $N_2(\vec{u}) = |x| + |y|$ autres normes

$$\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^2, \|\vec{u}\| \leq \sqrt{2} N_1(\vec{u}) ; N_1(\vec{u}) \leq N_2(\vec{u}) ; N_2(\vec{u}) \leq \sqrt{2} \|\vec{u}\|.$$

N et N' sont deux normes équivalentes sur \mathbb{R}^2 si $\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^{*2}, N \leq \alpha N'$ et $N' \leq \beta N$.

Toutes les normes sur \mathbb{R}^2 sont équivalentes. [ADMIS]

Une partie $A \subset \mathbb{R}^2$ est bornée si $\exists k > 0, \forall \vec{u} \in A, \|\vec{u}\| \leq k$.

Si $A \subset \mathbb{R}^2$ est bornée alors $\exists k' > 0, \forall (M, N) \in A^2, d(M, N) \leq k'$. [demo rapide]

Remarque : La définition et cette propriété sont indépendantes du choix de la norme dans \mathbb{R}^2 .

Dans \mathbb{R} , la valeur absolue est une norme. Dans \mathbb{C} , le module est une norme.

2 – Ouverts et fermés

Soit E un \mathbb{R} -evn.

On appelle boule ouverte de centre $M_0 \in E$ de rayon $r > 0$ l'ensemble $B_o(M_0, r) = \{ M \in E, d(M, M_0) < r \}$.

On appelle boule fermée de centre $M_0 \in E$ de rayon $r > 0$ l'ensemble $B_f(M_0, r) = \{ M \in E, d(M, M_0) \leq r \}$.

Soient 2 normes sur \mathbb{R}^2 . Alors toute boule pour une norme contient une boule pour l'autre (avec des rayons \neq).

Une partie O de E evn est ouverte si $O = \emptyset$ ou si $\forall M \in O, \exists r > 0, B_o(M, r) \subset O$. [indep norme]

Exemples sur \mathbb{R} : intervalles ouverts, réunion d'intervalles.

Exemples sur \mathbb{R}^2 : \mathbb{R}^2 , boule ouverte [d], demi plan ouvert [d].

Toute réunion d'ouverts est un ouvert. Toute intersection d'une famille finie d'ouverts est un ouvert. [demo]

$F \subset E$ evn est un fermé si $\bigcap_E F$ est un ouvert. [indep norme]

Exemples sur \mathbb{R} : intervalles fermés, $\mathbb{R}, \emptyset, \{x\}, \mathbb{Z}$

Exemples sur \mathbb{R}^2 : \mathbb{R}^2 , boules fermées [diy].

Soit $A \subset \mathbb{R}^2$, et $(O_i)_{i \in I}$ la famille de tous les ouverts contenus dans A. $\bigcup O_i$ est le plus grand ouvert contenu dans A. Il est appelé l'intérieur de A, noté \mathring{A} .

$M \in \mathring{A} \Leftrightarrow \exists r > 0, B_o(M, r) \subset A$. [demo rapide]

3 – Suites

Une suite d'éléments de \mathbb{R}^2 est une application de \mathbb{N} vers \mathbb{R}^2 . $(M_n)_{n \in \mathbb{N}} = ((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$. (x_n) et (y_n) sont appelées les suites composantes de (M_n) .

$(M_n) = ((x_n, y_n))$ est bornée si $\exists m \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}, \|(x_n, y_n)\| \leq m$. [indep norme]

(x_n, y_n) bornée $\Leftrightarrow (x_n)$ et (y_n) sont bornés. [demo \Leftrightarrow en prenant $\|(x,y)\| = \text{Sup}\{|x|, |y|\}$]

$(M_n) = ((x_n, y_n))$ converge vers $M = (x, y)$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow d(M_n, M) \leq \varepsilon$.

$(M_n) = ((x_n, y_n))$ converge vers $(x, y) \Leftrightarrow (x_n) \rightarrow x$ et $(y_n) \rightarrow y$.

Toute suite convergente est bornée. Définition d'une suite extraite...

Toute suite extraite d'une suite convergente converge vers la même limite.

Théorème de Bolzano – Weierstrass : de toute suite bornée on peut extraire une suite convergente. [demo cascade]

4 – Point adhérent

Soit $A \subset \mathbb{R}^2$ non vide. $M \in \mathbb{R}^2$ est dit adhérent à A si $\exists (M_n) \in A^{\mathbb{N}}, (M_n) \rightarrow M$.

\bar{A} est l'ensemble des points adhérents. Par convention, l'ensemble des points adhérents de \emptyset est \emptyset .

Si $A \neq \emptyset$, (1), (2), (3) sont équivalentes :

- (1) $M \in \bar{A}$.
- (2) $\forall r > 0, B_0(M, r) \cap A \neq \emptyset$
- (3) $d(M, A) = 0$. [demo $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$ facile]

$\forall A \subset \mathbb{R}^2, \overset{\circ}{\bar{A}} = \overset{\circ}{A}$ et $\overset{\circ}{\bar{A}} = \bar{\overset{\circ}{A}}$ [demo \Leftrightarrow vite]

\bar{A} est le plus petit fermé contenant A . [demo rapide]

A est un fermé $\Leftrightarrow \bar{A} = A$. A est un ouvert $\Leftrightarrow \overset{\circ}{A} = A$.

Si $A \neq \emptyset, A$ est un fermé \Leftrightarrow toute suite convergente de $A^{\mathbb{N}}$ a sa limite dans A .

5 – Extension à \mathbb{R}^n

Norme sur \mathbb{R}^n : $\|(x_1, \dots, x_n)\| = \sqrt{\sum x_i^2}$ norme euclidienne.

Soit $p \geq 1, \|(x_1, \dots, x_n)\| = (\sum |x_i|^p)^{1/p}$ est une norme. Elle converge vers $\text{Sup}|x_i|$. [diy]

II Fonctions d'une variable réelle à valeurs dans \mathbb{R}^n

1 – Limite et continuité

Soit I intervalle de \mathbb{R} .

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^2)$ est $t_0 \in I \cup \{\text{Sup } I, \text{Inf } I\}$. f a une limite $\ell = (\ell_1, \ell_2)$ en t_0 si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall t \in I, |t - t_0| \leq \alpha \Rightarrow \|f(t) - \ell\| \leq \varepsilon \quad [\text{indep de } \| \|]$$

Définition des fonctions composantes...

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t)) \xrightarrow{t_0} (\ell_1, \ell_2) \Leftrightarrow f_1(t) \xrightarrow{t_0} \ell_1 \text{ et } f_2(t) \xrightarrow{t_0} \ell_2.$$

f est continue en $t_0 \in I$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall t \in I, |t - t_0| \leq \alpha \Rightarrow \|f(t) - f(t_0)\| \leq \varepsilon$.

Opérations de combinaison linéaire, composition avec un élément de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, produit scalaire...

Continuité uniforme : Théorème de Heine aussi valide.

2 – Dérivation

$f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^2)$ est dérivable en $t_0 \in I$ si $(f(t) - f(t_0))/(t - t_0)$ a une limite lorsque $t \rightarrow t_0$.

Si $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = (f_1(t), f_2(t)), f$ dérivable en $t_0 \Leftrightarrow f_1$ et f_2 dérivables en t_0 , et dans ce cas, $f'(t_0) = (f_1'(t_0), f_2'(t_0))$.

Déterminant : $\forall (f, g) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^2)^2, W : t \in I \rightarrow \det(f(t), g(t))$ est dérivable $\Leftrightarrow f$ et g sont dérivables.

Produit scalaire : $\psi : t \rightarrow \langle f(t) | g(t) \rangle, \psi'(t) = \langle f'(t) | g(t) \rangle + \langle f(t) | g'(t) \rangle$

Dérivée d'une fonction vectorielle de norme constante. f dérivable en $t_0 \Rightarrow \langle f(t_0) | f'(t_0) \rangle = 0$.

3 – Intégrabilité

Fonctions en escaliers... Intégrale d'une fonction en escalier. Approximation uniforme d'une fonction C^0 par des fonctions en escalier. Intégrale et primitive. Inégalité des accroissements finis (d'après $f(b) - f(a) = \int_a^b f'$).

$f \in C^0([a, b], \mathbb{R})$ est bornée sur $[a, b]$. Intégration par parties. Formule de Taylor avec reste intégral.

Inégalité de Taylor – Lagrange. Développement limité.

4 – Extension à \mathbb{R}^n

Fonctions composantes : $f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))$

III Limite et continuité d'une fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}

1 – Structure

$A \subset \mathbb{R}^2$. Soit $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$. Applications partielles : $y \rightarrow f(x_0, y)$ et $x \rightarrow f(x, y_0)$.

2 – Limite et continuité en un point

Soit $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$. Soit $M_0 \in \text{Adh}(A)$. $f(M) \rightarrow_{M_0} \ell$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall M \in A, d(M, M_0) \leq \alpha \Rightarrow |f(M) - \ell| \leq \varepsilon$.

(importance du choix de $M_0 \in \text{Adh}(A)$; indep norme ; déf avec des boules...)

Soit $M_0 \in A$. f continue en M_0 si $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall M \in A, d(M, M_0) \leq \alpha \Rightarrow d(f(M), f(M_0)) \leq \varepsilon$.

Si M_0 est isolé dans A , f est automatiquement continue en M_0 .

$f(M) \rightarrow_{M_0} \ell \Leftrightarrow \forall (M_n) \in A^{\mathbb{N}}, (M_n) \rightarrow M_0 \Rightarrow (f(M_n)) \rightarrow \ell$

Opérations et limites (ou continuité). Relations d'ordre localement...

f continue en $M_0 \Rightarrow$ les applications partielles aussi.

Contrexemple de la réciproque : $(x, y) \rightarrow \left((x, y) \neq (0, 0) ? \frac{xy}{x^2 + y^2} : 0 \right)$.

Ex : $(x, y) \rightarrow (y > x^2 ? x^4 : y^2)$.

3 – Continuité globale

f continue en O si elle est continue en chaque point de O .

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}^2 \Leftrightarrow \forall O$ ouvert de $\mathbb{R}^2, f^{-1}(O)$ est un ouvert de \mathbb{R}^2 .

et $\forall F$ fermé de $\mathbb{R}^2, f^{-1}(F)$ est un fermé de \mathbb{R}^2 . [demo \Rightarrow assemblage]

Application : $\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) \geq 0 \} = f^{-1}(\mathbb{R}_+)$ est un fermé si f continue...

$\forall O$ ouvert de $\mathbb{R}^2, C^0(O, \mathbb{R})$ est une \mathbb{R} -algèbre.

Rem : les applications projections $(x, y) \rightarrow x$ et $(x, y) \rightarrow y$ sont continues. [d]

Composition : Soit $f : O \rightarrow \mathbb{R}$ et $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$. φ et f continues $\Rightarrow \varphi \circ f$ continue sur O .

Soit $g : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $f : O \rightarrow \mathbb{R}$. g et f continues $\Rightarrow f \circ g$ continue sur O .

Soit f continue sur un compact F (c'est-à-dire un fermé borné). Alors f est bornée et atteint ses bornes. [d absurde]

4 – Extension

$f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$

$(x_1, \dots, x_p) \rightarrow (f_1(x_1, \dots, x_p), \dots, f_q(x_1, \dots, x_p))$

IV Calcul différentiel

1 – Dérivées partielles

Soit $f \in \mathcal{F}(O, \mathbb{R})$. Soit $M_0 \in O, \vec{v} = (h, k) \neq \vec{0}$, et $\varphi : t \in \mathbb{R} \rightarrow f(M_0 + t\vec{v}) \in \mathbb{R}$.

Si φ est dérivable en O , alors f admet en M_0 est dérivée selon \vec{v} . Notation :

$$D_{\vec{v}} f(M_0) = \varphi'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + th, y_0 + tk) - f(x_0, y_0)}{t}$$

Notations : $\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = D_{(1,0)} f(M_0)$ $\frac{\partial f}{\partial y}(M_0) = D_{(0,1)} f(M_0)$

Ex : $f : (x, y) \rightarrow \sin(x^2 + y^3) \dots$

Soit $\vec{v} \neq \vec{0}$. Si $\forall M \in O, f$ a une dérivée en M , on crée l'application "dérivée partielle" $D_{\vec{v}} f \in \mathcal{F}(O, \mathbb{R})$

2 – Applications de classe C^1

$f : O \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1 sur O si

- $\forall M \in O, \frac{\partial f}{\partial x}(M)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(M)$ existent
- Les applications $M \in O \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(M) \in \mathbb{R}$ et $M \in O \rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(M) \in \mathbb{R}$ sont continues sur O .

Soit $f \in C^1(O, \mathbb{R})$. Soit $M_0 = (x_0, y_0) \in O$. On note $U = \{ (h, k) \in \mathbb{R}^2, (x_0 + h, y_0 + k) \in O \}$

Il existe une application $\varepsilon : U \rightarrow \mathbb{R}; \forall (h, k) \in U,$

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(M_0) + h \frac{\partial f}{\partial x}(M_0) + k \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) + \|(h, k)\| \varepsilon(h, k).$$

où $\varepsilon(h, k) \rightarrow 0$ quand $(h, k) \rightarrow (0, 0)$.

On dit que f admet en M_0 un développement limité à l'ordre 1.

$\forall \vec{v} = (h, k) \neq (0, 0), f$ admet en M_0 une dérivée selon \vec{v} , et $D_{\vec{v}} f(M_0) = h \frac{\partial f}{\partial x}(M_0) + k \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)$.

[**DEMO** : on intercale $f(x_0 + h, y_0)$ puis TAF puis déf de ε . Puis $\varepsilon \rightarrow 0$. Enfin, 2^e partie...]

Conséquence : $f \in C^1(O, \mathbb{R}) \Rightarrow f \in C^0(O, \mathbb{R})$.

Soit $f \in C^1(O, \mathbb{R})$ et $M_0 \in O$. La différentielle de f en M_0 est la forme linéaire $\vec{v} \in \mathbb{R}^2 \rightarrow D_{\vec{v}} f(M_0) \in \mathbb{R}$.

Notation : df_{M_0} . Rem : si f est une forme linéaire, $\forall M_0 \in \mathbb{R}^2, df_{M_0} = f$.

dx et dy représentent les différentielles des 2 formes coordonnées. $dx(x, y) = x$. $dy(x, y) = y$.

On notera $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$

ce qui signifie $df_{M_0}(h, k) = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0) \times dx(h, k) + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) \times dy(h, k)$.

Notation définitive : $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = df_{M_0}(h, k) + \|(h, k)\| \varepsilon(h, k)$.

$C^1(O, \mathbb{R})$ est une \mathbb{R} – algèbre. [indicis pour la division...]

Soit $f \in C^1(O, \mathbb{R})$ et $g \in C^1(I, \mathbb{R}^2)$ telles que $g(I) \subset O$. Alors $f \circ g \in C^1(I, \mathbb{R})$. et si $g(t) = (g_1(t), g_2(t))$, on a

$$(f \circ g)'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(g(t)) \times g'_1(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(g(t)) \times g'_2(t) \quad [\text{DEMO différentielles}]$$

Extension : $f \in C^1(O, \mathbb{R})$; $g \in \mathcal{F}(U, \mathbb{R}^2)$ où $U \subset \mathbb{R}^2$. $g(u, v) = (g_1(u, v), g_2(u, v))$ où g_1 et g_2 de classe C^1 .

Soit $h = f \circ g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Alors on a :

$$\frac{\partial h}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(g(u, v)) \times \frac{\partial g_1}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(g(u, v)) \times \frac{\partial g_2}{\partial u}(u, v).$$

$$\frac{\partial h}{\partial v}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(g(u, v)) \times \frac{\partial g_1}{\partial v}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(g(u, v)) \times \frac{\partial g_2}{\partial v}(u, v).$$

Exemple : $g(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$. $\frac{\partial x}{\partial \rho} = \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{1}{\cos \theta}$.

3 – Extrémum

Soit $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$.

f présente en $M_0 \in A$ un maximum global si $\forall M \in A, f(M) \leq f(M_0)$.

f présente en $M_0 \in A$ un minimum global si $\forall M \in A, f(M) \geq f(M_0)$.

f présente en $M_0 \in A$ un maximum local si $\exists r > 0, B_o(M_0, r) \subset A$ et $\forall M \in B_o(M_0, r), f(M) \leq f(M_0)$.

f présente en $M_0 \in A$ un minimum local si $\exists r > 0, B_o(M_0, r) \subset A$ et $\forall M \in B_o(M_0, r), f(M) \geq f(M_0)$.

Interprétation graphique : surfaces 3D...

Soit $f \in C^1(O, \mathbb{R})$ ayant en $M_0 \in O$ un extrémum local. Alors $\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) = 0$. [demo]

Réciproque fausse.

Exemple : Soit un vrai triangle. On cherche les points de l'enveloppe convexe, telle que le produit des 3 distances aux côtés soient maximales...

Cas d'un espace euclidien. Soit $f \in C^1(O, \mathbb{R})$. $df_M : (h, k) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow h \frac{\partial f}{\partial x}(M) + k \frac{\partial f}{\partial y}(M)$ est une forme linéaire donc

$$\exists \vec{w} \in \mathbb{R}^2, \forall \vec{u} \in \mathbb{R}^2, df_M(\vec{u}) = \langle \vec{w} | \vec{u} \rangle. \text{ En fait, } \vec{w} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(M), \frac{\partial f}{\partial y}(M) \right) = \text{grad}_M f.$$

Une fonction vectorielle $\vec{F} : O \rightarrow \mathbb{R}^2$ dérive d'un potentiel scalaire $f \in \mathcal{F}(O, \mathbb{R})$ si $\forall M \in O, \vec{F}(M) = \text{grad}_M f$.

4 – Dérivées partielles d'ordre supérieur à 1.

Soit $f \in C^1(O, \mathbb{R})$.

Si $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ admettent en O des dérivées partielles, elles seront appelées dérivées partielles d'ordre 2 de f .

Ce sont $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

Ex : $f(x, y) = ((x, y) \neq 0 ? \frac{xy^3}{(x^2 + y^2)} : 0)$. Ici, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

$f \in \mathcal{F}(O, \mathbb{R})$ est de classe C^2 sur O si $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ existent et sont continues sur O .

Théorème de Schwarz : si $f \in C^2(O, \mathbb{R})$ alors $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. [DEMO rectangle TAF]

Extension : Si $f \in C^p(O, \mathbb{R})$, l'ordre des dérivations n'a pas d'importance.

$\forall p \in \mathbb{N}^*, C^p(O, \mathbb{R})$ est une \mathbb{R} – algèbre.

$$\forall (f, g) \in C^p(O, \mathbb{R})^2, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial^p(\alpha f + \beta g)}{\partial y^{p-k} \partial x^k} = \alpha \frac{\partial^p f}{\partial x^{p-k} \partial y^k} + \beta \frac{\partial^p g}{\partial x^{p-k} \partial y^k}.$$

Composition : $f \in \mathcal{F}(O, \mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^2)$. f et g sont de classe $p \Rightarrow h = f \circ g \in C^p(I, \mathbb{R})$.

$$h'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(g(t)) \times g'_1(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(g(t)) \times g'_2(t).$$

$$h''(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(g(t)) \times g''_1(t) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(g(t)) \times (g'_1(t))^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(g(t)) \times g'_1(t) \times g'_2(t) \\ + \frac{\partial f}{\partial y}(g(t)) \times g''_2(t) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(g(t)) \times (g'_2(t))^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(g(t)) \times g'_2(t) \times g'_1(t).$$

Ex : $\Delta = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ Laplacien. Soit $h(\rho, \theta) = f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$

En coordonnées polaires, $\Delta = \frac{\partial^2 h}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial h}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2}$ [CALCULS]

5 – Généralisation

Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \dots, a_n) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{t}$$

$$f(a_1 + h_1, \dots, a_n + h_n) = f(a_1, \dots, a_n) + \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \dots, a_n) + \|(a_1, \dots, a_n)\| \varepsilon(a_1, \dots, a_n)$$

c'est-à-dire $f(a_1 + h_1, \dots, a_n + h_n) - f(a_1, \dots, a_n) = df_A(h_1, \dots, h_n) + \|(a_1, \dots, a_n)\| \varepsilon(a_1, \dots, a_n)$. $df_A \in (\mathbb{R}^n)^*$

Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$. Cette relation est toujours vraie. $df_A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q) \rightarrow$ on peut la définir par une matrice :

$$\text{Mat}(df_A) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(A) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(A) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_q}{\partial x_1}(A) & \dots & \frac{\partial f_q}{\partial x_p}(A) \end{bmatrix} \quad \text{si } f(x_1, \dots, x_p) = (f_1(x_1, \dots, x_p), \dots, f_q(x_1, \dots, x_p)).$$

23 – Courbes du plan

I Représentations cartésiennes d'une courbe plane

1 – Graphique d'une fonction d'une variable

Bouf. C'est limitatif.

2 – Courbe définie par une équation cartésienne

Equation implicite : $(C) = \{ M = (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = 0 \}$

Ex : $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Localement, on peut la courbe comme le graphique d'une fonction d'une variable.

Soit $f \in C^k(\mathcal{O}, \mathbb{R})$ et $M_0 \in \mathcal{O}$ tel que $f(M_0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(M_0) \neq 0$. Alors $\exists I$ et J intervalles de \mathbb{R} , $M_0 \in I \times J$, et $\varphi \in \mathcal{F}(I, J)$,

tels que : $I \times J \subset \mathcal{O}$
 $\forall (x, y) \in I \times J, f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x)$.
 $\varphi \in C^k(I, J)$ [ADMIS ; on peut intervertir le rôle de x et de y]

On a alors $\varphi'(x_0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(M_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(M_0)}$. [demo étude de $x \rightarrow f(x, \varphi(x))$; on peut continuer pour $\varphi^{(m)}$]

Equation de la tangente en M_0 $(X - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(M_0) + (Y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) = 0$. $\Rightarrow \text{grad}_{M_0} f \perp$ tangente en M_0 .

II Arc

1 – Arc paramétré

Arc paramétré = couple (I, f) où I est un intervalle de \mathbb{R} et $f \in C^0(I, \mathbb{R}^2)$.

L'arc est de classe C^k si f est de classe C^k . Le support de l'arc est $f(I)$.

$\forall t \in I, M = f(t)$ est le point de paramètre t de l'arc.

2 – Changement de paramètre

(exemples)

(I, f) et (J, g) deux arcs de classe C^k ($k \geq 0$) sont dits C^k -équivalents si $\exists \varphi : I \rightarrow J$, bijective avec φ^{-1} de classe C^k , telle que $f = g \circ \varphi$. (Si $k \geq 1$, φ convient $\Leftrightarrow j \in C^k(I, J)$ et $\forall t \in I, \varphi'(t) \neq 0$ (C^k -difféomorphisme).)

La relation ainsi définie est une relation d'équivalence. [\sim]

Arc géométrique = classe d'équivalence d'un arc paramétré vis-à-vis de cette relation.

Soit (γ) un arc géométrique. $\forall (I, f) \in (\gamma)$, (I, f) est dit représentation paramétrique admissible pour (γ) .

Propriétés intrinsèques (pas modifiées si l'on change de représentant de la classe) : support de l'arc, nature de I .

3 – Extrémités, arc fermés

Soit (γ) un arc géométrique. (I, f) est une représentation paramétrique admissible.

Une extrémité de l'arc paramétré (I, f) est l'image par f d'une extrémité de I (appartenant à I) $\rightarrow 0, 1$ ou 2 extrémités.

Un arc est fermé s'il a 2 extrémités, et qu'elles sont confondues. (intrinsèque)

4 – Ordre de multiplicité

Soit M un point du support de (γ) .

Le caractère fini ou infini de $\{ t \in I, f(t) = M \}$ est intrinsèque. Si cet ensemble est fini, son cardinal est intrinsèque.

Il est appelé l'ordre de multiplicité de M . [demo rapide]

Arc simple = arc pas fermé pour lequel on n'a pas que des points simples (avec un ordre 1).

ou arc fermé dont seuls les extrémités ont un ordre différent de 1.

5 – Sous-espaces fondamentaux

Soit (γ) un arc géométrique de classe C^k représenté par (I, f) . Soit $M_0(t_0)$ un point du support de (γ) .

$\forall p \leq k, \text{Vect}\{ f'(t_0), \dots, f^{(p)}(t_0) \}$ est une propriété intrinsèque. [ébauche de demo par récurrence sur p]

Ces ensembles sont appelés sous-espaces fondamentaux.

On cherche $r = \text{Min} \{ p \in \mathbb{N}^*, p \leq k, f^{(p)}(t_0) \neq 0 \}$. (intrinsèque)

Si $r = 1$, M_0 est dit régulier : on a alors $f'(t_0) \neq 0$. Si $r > 1$, M_0 est dit singulier d'ordre r.

La droite affine contenant M_0 et dirigée par $f^{(r)}(t_0)$ est tangente en M_0 au support de l'arc. [demo tgt Taylor]

III Etude d'une courbe plane en coordonnées cartésiennes

1 – Tangente en $M_0(t_0)$ régulier

Tangente en $M_0 : y'_0 (X - x_0) - x'_0 (Y - y_0) = 0$. Soit D une droite contenant $M_0 : a (X - x_0) + b (Y - y_0) = 0$.

Soit $\alpha(t) = a(x(t) - x_0) + b(y(t) - y_0)$.

$\alpha'(t_0) = 0 \Leftrightarrow a x'_0 + b y'_0 = 0 \Leftrightarrow D$ est tangente $\Leftrightarrow t_0$ est racine au moins double dans α .

Si D n'est pas tangente, t_0 est racine simple de α .

2 – Tangente en $M_0(t_0)$ singulier d'ordre r

Tangente en $M_0 : y^{(r)}_0 (X - x_0) - x^{(r)}_0 (Y - y_0) = 0$. Soit D une droite contenant $M_0 : a (X - x_0) + b (Y - y_0) = 0$.

Soit $\alpha(t) = a(x(t) - x_0) + b(y(t) - y_0)$.

Si D n'est pas tangente t_0 est racine d'ordre r.

Si D est la tangente, t_0 est racine d'ordre $\geq r + 1$.

3 – Position de l'arc par rapport à la tangente en un point

Cas particulier du point régulier : $f'(t_0) \neq 0$.

Si $(f'(t_0), f''(t_0))$ engendrent \mathbb{R}^2 , M est dit birégulier. Dans ce cas, la courbe est localement contenue dans le demi-plan d'axe $(M_0, f'(t_0))$ contenant le point $M_0 + f''(t_0)$. [demo Taylor $M_0 M = \dots$]

Soit $q \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $f''(t_0), \dots, f^{(q-1)}(t_0)$ liés à $f'(t_0)$ et $(f'(t_0), f^{(q)}(t_0))$ linéairement indépendants.

Alors si q est impair, M_0 est un point d'inflexion. Sinon, c'est un méplat.

Cas d'un point singulier : $f'(t_0) = \dots = f^{(p-1)}(t_0) = 0 ; f^{(p)}(t_0) \neq 0 ; f^{(p+1)}(t_0), \dots, f^{(q-1)}(t_0)$ liés à $f^{(p)}(t_0) ; (f^{(p)}(t_0), f^{(q)}(t_0))$ sont linéairement indépendants. Alors :

p pair		p impair	
q pair	q impair	q pair	q impair
point de rebroussement de 2 ^e espèce	point de rebroussement de 1 ^e espèce	Méplat	point d'inflexion

3 – Exemple : cycloïde

$x = R(t - \sin t)$ Si $t \equiv 0 [2\pi]$, il y a un point de rebroussement de 1^e espèce

$y = R(1 - \cos t)$ Sinon, M_t est régulier et correspond à un méplat.

4 – Branches infinies

(γ) représenté par (I, f) a une branche infinie lorsque $t \rightarrow a \in I \cup \{ \text{Inf } I, \text{Sup } I \}$ si $\|\vec{OM}\| = \|f(t)\| \rightarrow +\infty$.

Il a une direction asymptotique si y/x converge lorsque $t \rightarrow a$. (Position limite de la droite OM).

$x(t) \rightarrow x_0$ $y(t) \rightarrow \infty$. Asymptote : $x = x_0$.

$x(t) \rightarrow \infty$ $y(t) \rightarrow y_0$. Asymptote : $y = y_0$.

$x(t) \rightarrow \infty$ $y(t) \rightarrow \infty$. Si $y/x \rightarrow 0$: Branche parabolique : Ox

Si $y/x \rightarrow \infty$: Branche parabolique : Oy

Si $y/x \rightarrow b \in \mathbb{R}^*$: Si $y(t) - b x(t) \rightarrow a \in \mathbb{R}^*$, il y a une asymptote.

Ex : (C) $x = \frac{t^3}{t^2 - 1}$ et $y = \frac{t^2 - 2t}{t - 1}$ a une asymptote $y = x - 1$ pour $t \rightarrow \infty$.

5 – Tracé

Plan d'étude : on donne $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2), \forall t \in D_f, f(t) = (x(t), y(t))$.

- Recherche de D_f
- Trouver le domaine d'étude D_e le plus petit possible (suivant la parité, la périodicité...)
- Variations de x et de y
- Branches infinies, points singuliers, points d'inflexion, points doubles...
- Graphique

Reprise de l'exemple... Autre exemple... Encore un autre (Lemmiscate de Bernouilli)

IV Courbes algébriques

1 – Définition

Une courbe algébrique est définie par $\{ M(x, y) / f(x, y) = 0 \}$ où f est une fonction polynômiale en x et en y .
(indépendant du repère – degré de la fonction polynômiale indép aussi)

L'ordre de la courbe est le degré de la fonction polynômiale.

Ordre 1 : droite Ordre 2 : conique Ordre 3 : cubique

2 – Intersection d'une droite et d'une courbe algébrique

$f(x, y) = \varphi_n(x, y) + \dots + \varphi_0(x, y)$ où $\forall i \in \{ 0, \dots, n \}$, φ_n ne contient que des termes de degré n .

Rem : xy est de degré 2.

(C) : $f(x, y) = 0$ (D) droite : $x = x_0 + t\alpha$; $y = y_0 + t\beta$.

$(C) \cap (D) : f(x_0 + t\alpha, y_0 + t\beta) = 0$ est un polynôme de degré $\leq n$ en t . $\rightarrow \#((C) \cap (D)) \leq n$.

Courbe algébrique d'ordre n ayant un point multiple d'ordre $n - 1$: Supposons $M_0 \in (C)$ d'ordre $n - 1$.

On choisit un repère de centre M_0 donc $\varphi_0, \dots, \varphi_{n-2} = 0$. (C) : $\varphi_n(x, y) + \varphi_{n-1}(x, y) = 0$.

Soit une droite (D) passant par M_0 de pente t .

$f(x, tx) = 0$ admet $x = 0$ comme racine d'ordre $n - 1$: $\varphi_n(x, tx) + \varphi_{n-1}(x, tx) = 0 \Leftrightarrow x^n \varphi_n(1, t) + x^{n-1} \varphi_{n-1}(1, t) = 0$.

\Rightarrow On peut mettre la courbe sous la forme paramétrique : $\begin{cases} x = -\frac{\varphi_{n-1}(1, t)}{\varphi_n(1, t)} \\ y = tx \end{cases}$

x et y sont alors des fonctions rationnelles de t .

Ex : $x(x^2 + y^2) = x^2 - y^2$ admet $(0, 0)$ comme point double \Rightarrow courbe unicursale

Alors $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $y = t \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

3 – Condition d'alignement sur une courbe unicursale

(C) paramétrée : $x(t) = \frac{A(t)}{B(t)}$ et $y(t) = \frac{C(t)}{D(t)}$ fonctions rationnelles (courbe unicursale).

(C) est unicursale \Rightarrow (C) est algébrique. [utiliser l'algorithme d'Euclide en t avec les polynômes $xB - A$ et $yD - C$]

(C) est algébrique d'ordre n et possède un point d'ordre $n - 1 \Rightarrow$ (C) unicursale. [préc]

On cherche une condition pour que les n points de paramètres t_i soient alignés.

Ex : $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $y = t \frac{1-t^2}{1+t^2}$. 3 points sont alignés $\Leftrightarrow t_1t_2 + t_1t_3 + t_2t_3 = -1$.

$M(t_1) = M(t_2)$ est un point double $\Leftrightarrow \forall t_3, t_1t_2 + t_1t_3 + t_2t_3 = -1$, c'est-à-dire $t_1t_2 = -1$ et $t_1 + t_2 = 0$.

Ex : $x = \frac{t+1}{t(t-1)}$ et $y = t \frac{t+1}{t-1}$. [...]

3 points sont alignés $\Leftrightarrow \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}, \begin{cases} (\sigma_1 + 1)b + c = 0 \\ a - b \sigma_2 - c = 0 \\ a + b \sigma_3 = 0 \end{cases}$

\Leftrightarrow le système linéaire n'est pas un système de Cramer

\Leftrightarrow son déterminant est nul

$\Leftrightarrow \sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3 + 1 = 0$.

Une tangente en $M(t)$ recoupe (C) en $M'(t')$ avec $2t + t' - (t^2 + 2t't) - t^2t' + 1 = 0$.

$M(t)$ est un point d'inflexion $\Leftrightarrow t^3 - 3t^2 - 3t + 1 = 0$. (t racine triple)

V Courbes en coordonnées polaires

1 – Définition des coordonnées polaires

Un couple de coordonnées polaires de M est un couple (ρ, θ) tel que $x = \rho \cos\theta$ et $y = \rho \sin\theta$. (pas unicité)

Théorème du relèvement : Soit $f \in C^1(I, \mathbb{U})$. Alors $\exists \theta \in C^1(I, \mathbb{R}), f = e^{i\theta}$.

Si θ_1 et θ_2 conviennent, alors $\exists k \in \mathbb{Z}, \theta_2 - \theta_1 = 2k\pi$. [demo].

On peut l'appliquer à un arc paramétré si O n'appartient pas au support.

2 – Représentations polaires de droites, cercles, coniques

♦ Droites :

$O \in (D)$	$\theta \equiv \alpha [\pi]$	où α est une mesure de l'angle polaire de (D) .
$(D) \perp Ox$	$\rho = a/\cos\theta$.	où $a = \vec{OH}$ avec $\{H\} = (D) \cap (Ox)$
$(D) \parallel Ox$	$\rho = a/\sin\theta$.	où $a = \vec{OH}$ avec $\{H\} = (D) \cap (Oy)$
Sinon	$1/\rho = A \cos\theta + B \sin\theta$	Bof

♦ Cercles :

Centré en O	$\rho = R$	où R est le centre du cercle.
$O \in (C)$	$\rho = a \cos(\theta - \alpha)$	où OA est un diamètre, et A est repéré par (a, α)
Sinon	$\rho^2 - 2\rho(a \cos\theta + b \sin\theta) + c = 0$.	Bof.

♦ Coniques ayant O comme foyer. $\|\vec{OM}\|^2 = e^2 \|\vec{MN}\|^2$

$\rho = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \alpha)}$ où $a = \vec{OH}$ et $\{H\} = (D) \cap (Ox)$; $p = e a$ est appelé "paramètre".

3 – Etude locale d'une courbe en coordonnées polaires

Cas le plus général : ρ et θ sont fonctions de t . (Comme coordonnées cylindriques en physique)

Si θ est utilité comme paramètre :

♦ Tangente en O : Si $\exists \theta_0 \in \mathbb{R}, \rho(\theta_0) = 0$, c'est la droite passant par O faisant avec \vec{i} un angle de mesure θ_0 .

♦ Tangente en $M \neq O$: $\vec{OM} = \rho \vec{u}$.

$\frac{d\vec{OM}}{d\theta} = \rho' \vec{u} + \rho \vec{v} \neq \vec{0}$ car $\rho \neq 0$ donc seul O peut être singulier.

$\vec{OT} = -\frac{\rho^2}{\rho'}$ "sous tangente polaire"

$\vec{ON} = \rho'$ "sous normale polaire"

$\tan v = \frac{\rho}{\rho'}$

♦ Nature de M

Si $M = O$: les vecteurs dérivés non colinéaires sont toujours successifs $[\sim]$
 → le pôle est un méplat ou un point de rebroussement de 1^e espèce.

Sinon, il y a un point d'inflexion $\Leftrightarrow \det\left(\frac{d\vec{OM}}{d\theta}, \frac{d^2\vec{OM}}{d\theta^2}\right) = 0$
 $\Leftrightarrow \rho^2 + 2\rho'^2 - \rho \rho'' = 0$

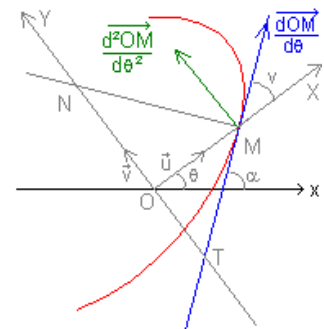
♦ La concavité est tournée suivant $O \Leftrightarrow \frac{d^2\vec{OM}}{d\theta^2}$ et \vec{MO} sont du même côté par rapport à la tangente

$\Leftrightarrow \left\langle \left(\frac{d\vec{OM}}{d\theta} \wedge \frac{d^2\vec{OM}}{d\theta^2} \right) \middle| \left(\frac{d\vec{OM}}{d\theta} \wedge \vec{MO} \right) \right\rangle \geq 0$

$\Leftrightarrow \rho^2 + 2\rho'^2 - \rho \rho'' \geq 0$

Il y a un point d'inflexion $\Leftrightarrow \rho^2 + 2\rho'^2 - \rho \rho''$ s'annule et change de signe.

Rem : en notant $u = \frac{1}{\rho^2}$, on a : $u + u'' = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho \rho''}{\rho^3}$.



4 – Branches infinies, cercles ou points asymptotes

Si $\theta \rightarrow \alpha \in \mathbb{R}$ et $\rho \rightarrow \pm \infty$: Direction asymptotique (droite passant par O qui fait avec Ox l'angle α)

Si $\rho \sin(\theta - \alpha) \rightarrow a \in \mathbb{R}$, il y a asymptote d'équation $Y = a$.

Si $\rho \sin(\theta - \alpha) \rightarrow \pm \infty$, c'est une B. P. suivant OX .

Si $\theta \rightarrow \pm \infty$ et $\rho \rightarrow \pm \infty$: Pas de direction asymptotique. C'est une "branche spirale". Ex : $\rho = \theta$.

Si $\theta \rightarrow \pm \infty$ et $\rho \rightarrow r \in \mathbb{R}$: Ce n'est pas une branche infinie. Si $r \neq 0$, il y a un "cercle asymptote". Sinon, O est un "point asymptote".

5 – Construction de courbes

- ♦ Ensemble de définition
- ♦ Ensemble d'étude. Si ρ est paire, sym. Ox . Si ρ est impaire, sym. Oy .
- ♦ Variations et signe de ρ (dans un tableau)
- ♦ Points particuliers (inflexion, points multiples...)

6 – Exemples

$$\rho = \cos(3\theta) \quad \rho = \tan(2\theta/3)$$

Cardioïde : $\rho = a(\cos \theta - 1)$

Courbes cycloïdales : (Base, Roulante). Les 2 cercles sont tangents et roulent.

- ◆ Epicycloïde. On se place dans le cas où le rapport des rayons est un nombre entier n. $n = 1 \rightarrow$ cardioïde [diy]
- ◆ Hypocycloïde. $n = 2 \rightarrow$ segment. $n = 4 \rightarrow$ astroïde.

V Propriétés métriques

1 – Longueur

(I, f) arc paramétré de classe C^k ($k \geq 1$) est compact si I est un segment.

Soit $\sigma = \{ t_0, \dots, t_n \}$ subdivision de I. On définit la ligne polygonale $M_i = f(t_i)$, de longueur $\ell(P_i, \sigma) = \sum \|\vec{M}_{i-1} M_i\|$

L'arc (I, f) est dit rectifiable si $E = \{ \ell(P_i, \sigma), \sigma \text{ subdivision de I} \}$ est majoré. Dans ce cas, la longueur de l'arc est la borne supérieure de E.

Le fait qu'un arc soit rectifiable et sa longueur sont des propriétés intrinsèques. [d]

La longueur d'un arc est nul \Leftrightarrow Le support de l'arc est un point.

AB rectifiable $\Leftrightarrow \forall C$ point de AB, AC et CB rectifiables, et alors $\ell(AB) = \ell(AC) + \ell(CB)$. [demo avec Rem]

Rem : (I, f) repr. param. admissible de AB. σ et σ' subdiv. de [a, b]. $\sigma \subset \sigma' \Rightarrow \ell(P_i, \sigma) \geq \ell(P_i, \sigma')$. [d réc]

2 – Abscisse curviligne

Tout arc compact de classe C^k ($k \geq 1$) est rectifiable.

Si ([a, b], f) est une représentation paramétrique admissible de l'arc, sa longueur est : $\int_a^b \|f'(t)\| dt$. [demo]

Ex : cercle, ellipse, cardioïde

(I, f) et (I, g) sont C^k positivement équivalentes si $\exists \varphi : I \rightarrow J$, un C^k difféomorphisme croissant tel que $f = g \circ \varphi$.

C'est une relation d'équivalence.

Tout arc qui comporte 2 points simples peut être orienté. [~d]

Soit un arc simple de classe C^k orienté et (I, f) une repr. param. adm. ; on oriente l'arc dans le sens $t \nearrow$.

Soit $\Omega(t_0)$ sur le support. L'abscisse curviligne $s(t)$ de $M(t)$ est alors défini par $|s(t)| = \ell(\Omega M)$; $s(t) > 0 \Leftrightarrow t > t_0$.

On a donc : $s(t) = \int_{t_0}^t \|f'(u)\| du$ et $\boxed{ds = \|f'(t)\| dt}$.

Si l'arc est régulier (il n'y a que des points réguliers), alors s est un paramètre admissible.

Soit $\vec{T} = \frac{d\vec{OM}}{ds} = \frac{d\vec{OM}}{dt} \frac{dt}{ds}$. On a $\|\vec{T}\| = 1$.

Soit $\vec{N} = R_{\pi/2}(\vec{T})$. Le repère local (M, \vec{T} , \vec{N}) est dit repère de Frenet.

3 – Courbe

[cas d'un cercle]

Soit un arc de classe C^k ($k \geq 2$) simple, orienté et régulier. Soit s une abscisse curviligne.

Soit $\varphi = (\vec{i}, \vec{T})$. $\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{s_2 - s_1}$ est la courbure moyenne de l'arc $M_1 M_2$.

La courbure en M de paramètre s est $\gamma = \frac{d\varphi}{ds}$.

Si $\gamma \neq 0$, $1/\gamma = R$ est appelé le rayon de courbure en M.

Formules de Frenet : $\boxed{\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{\vec{N}}{R} \text{ et } \frac{d\vec{N}}{ds} = -\frac{\vec{T}}{R}}$

En un point d'inflexion, $\gamma = 0$. Si t désigne le temps, on a : $\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{T} + \frac{v^2}{R} \vec{N}$.

En pratique :

- ◆ Coordonnées cartésiennes : on écrit $ds^2 = dx^2 + dy^2 \rightarrow$ on obtient ds en fonction de t. (on peut intégrer et trouver s en choisissant une origine).

Or $\vec{T} = \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds} \right) = (\cos \varphi, \sin \varphi) = \left(\frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}, \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \right)$ car $\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dt} \frac{dt}{ds}$

- ◆ soit on peut trouver φ directement.

♦ sinon, on a $\tan \varphi = \frac{y'}{x'}$; on différentie l'expression et on déduit $d\varphi$ en fonction de t .

♦ En coordonnées polaires : on écrit $ds^2 = \rho^2 d\theta^2 + d\rho^2 \rightarrow$ on obtient ds en fonction de θ . On a $\varphi = \theta + v$.

(on peut intégrer et trouver s en choisissant une origine). On a $\gamma = \frac{d\theta}{ds} + \frac{dv}{ds}$.

$$\text{Or } \vec{T} = \frac{\rho'}{\sqrt{\rho'^2 + \rho^2}} \vec{u} + \frac{\rho}{\sqrt{\rho'^2 + \rho^2}} \vec{v} = \cos v \vec{u} + \sin v \vec{v} \text{ car } \frac{d\vec{OM}}{dt} = \rho' \vec{u} + \rho \vec{v}$$

♦ soit on peut trouver v directement.

♦ sinon, on obtient $\tan v = \frac{\rho}{\rho'}$; on différentie l'expression et on déduit dv en fonction de θ .

[ex : cardioïde et cycloïde]

Rem : $\forall t \in \mathbb{R}$, on peut définir C : le point défini par $\vec{MC} = R \vec{N}$. Le cercle de centre C et de rayon $|R|$ est, parmi les cercles tangents à la courbe en M , celui qui s'en rapproche le plus (dvp. limité). [ADMIS]

Le lieu des point C est appelé l'enveloppe des normales.

$\forall t \in \mathbb{R}$, la droite tangente à l'enveloppe des normales en $C(t)$ est normale à la courbe en $M(t)$. [tipe...]

24 – Intégrale double ou triple

I Intégrale d'une fonction en escalier

Soit $\sigma_1 = \{ x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b \}$ une subdivision de $[a, b]$ et $\sigma_2 = \{ y_0 = c, y_1, \dots, y_n = d \}$ une subdivision de $[c, d]$.

Une subdivision de $I \times J$ est $\sigma_1 \times \sigma_2 = \{ (x_i, y_j), 0 \leq i \leq n; 0 \leq j \leq p \}$

f est en escalier sur $I \times J$ associée à la subdivision $\sigma_1 \times \sigma_2$ si $\forall i \in \mathbb{N}_n, \forall j \in \mathbb{N}_p, \lambda_{ij} = f|_{[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]}$ est constante.

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} f = \sum_{\substack{0 \leq i \leq n-1 \\ 0 \leq j \leq p-1}} \lambda_{i,j} (y_{j+1} - y_j)(x_{i+1} - x_i)$$

L'ensemble des fonctions $\mathcal{E}([a, b] \times [c, d], \mathbb{R})$ est un \mathbb{R} – espace vectoriel.

La définition de l'intégrale est indépendante de la subdivision choisie.

L'application : $f \in \mathcal{E}(I \times J, \mathbb{R}) \rightarrow \iint_{I \times J} f$ est une forme linéaire.

II Intégrale d'une fonction continue par morceaux

$f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est uniformément continue sur U si $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall (A, B) \in U^2, d(A, B) \leq \alpha \Rightarrow d(f(A), f(B)) \leq \varepsilon$.

Toute fonction continue sur un compact et uniformément continue sur celui-ci (théorème de Heine).

$\forall f \in C^0PM([a, b] \times [c, d], \mathbb{R}), \forall \varepsilon > 0, \exists (\varphi, \psi) \in \mathcal{E}([a, b] \times [c, d], \mathbb{R})^2, \forall (x, y) \in [a, b] \times [c, d],$

$$\varphi(x, y) \leq f(x, y) \leq \psi(x, y) \text{ et } \psi(x, y) - \varphi(x, y) \leq \varepsilon.$$

Soit $f \in C^0PM([a, b] \times [c, d], \mathbb{R})$.

$\{ \iint_{[a,b] \times [c,d]} \varphi ; \varphi \in \mathcal{E}([a, b] \times [c, d], \mathbb{R}) \text{ et } \varphi \leq f \}$ et $\{ \iint_{[a,b] \times [c,d]} \psi ; \psi \in \mathcal{E}([a, b] \times [c, d], \mathbb{R}) \text{ et } \psi \geq f \}$ sont adjacents. Leur borne commune est $\iint_{[a,b] \times [c,d]} f$. [def]

L'application $f \in C^0PM(I \times J, \mathbb{R}) \rightarrow \iint_{[a,b] \times [c,d]} f$ est une forme linéaire croissante.

Relation de Chasles : $\forall \alpha \in]a, b[, \forall \beta \in]c, d[, \iint_{[a,b] \times [c,d]} f = \iint_{[a,\alpha] \times [c,\beta]} f + \iint_{[a,\alpha] \times [\beta,d]} f + \iint_{[\alpha,b] \times [c,\beta]} f + \iint_{[\alpha,b] \times [\beta,d]} f$.

Théorème de Fubini : Soit $f \in C^0PM(I \times J, \mathbb{R})$. $\iint_{I \times J} f(x, y) dx dy = \int_I (\int_J f(x, y) dy) dx$. [demo \mathcal{E}]

Cas particulier : si $\exists g \in C^0PM([a, b], \mathbb{R})$ et $\exists h \in C^0PM([c, d], \mathbb{R}) ; \forall (x, y) \in I \times J, f(x, y) = g(x) h(y)$

$$\text{alors } \iint_{I \times J} f = (\int_I g) \times (\int_J h).$$

Extension : Soit $\Delta = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, a \leq x \leq b \text{ et } g_1(x) \leq y \leq g_2(x) \}$ où $(g_1, g_2) \in C^0([a, b], \mathbb{R})^2$.

$$\iint_{\Delta} f(x, y) dx dy = \int_a^b (\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy) dx. \quad [ADMIS]$$

Applications :

Calcul d'aire : $A = \iint_{\Delta} dx dy$ est l'aire de Δ . (ex : cercle)

Calcul de volume : $\iint_{\Delta} f$ est le volume de $\Sigma = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x, y) \in \Delta \text{ et } 0 \leq z \leq f(x, y) \}$. (ex : sph)

III Changement de variable

$$\iint_{\Delta} f(x, y) dx dy = \iint_{\Sigma} f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix} du dv$$

Le déterminant est appelé le déterminant jacobien.

Exemple : $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/2$.

IV Intégrale triple

$\Delta = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x, y) \in \Sigma \text{ et } \varphi_1(x, y) \leq z \leq \varphi_2(x, y) \}$

$\iiint_{\Delta} f = \iint_{\Sigma} (\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x, y, z) dz) dx dy$. (extension du théorème de Fubini).

On peut effectuer un changement de variable similaire à ceux d'une intégrale double.