# [ MPSI – Mathématiques 2 ]

## Sommaire

# 8 – Fonctions réelles d'une variable réelle

## I Généralités

### 1 – Définition – Structure

Une fonction définie sur $A \subset \mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{R}$ est une application de A vers $\mathbb{R}$.
L'ensemble des fonctions de A à valeur dans $\mathbb{R}$ est notée $\mathcal{F}(A, \mathbb{R})$.
Le domaine de définition d'une fonction est la plus grande partie de $\mathbb{R}$ sur laquelle la fonction existe.

### 2 – Graphe – Graphique

Soit $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$.
Le graphe de f est $\{ (x,f(x)), x \in A \} \subset \mathbb{R}^2$
Le graphique de f est $\{ M(x,f(x)), x \in A \} \subset \mathcal{P}$

### 3 – Fonctions et relation d'ordre

Soient $(f, g) \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})^2$.
$|f|$ est définie par $\forall x \in A, |f|(x) = |f(x)|$. On a : $-|f| \leq f \leq |f|$
$\sup(f, g)$ est définie par $\forall x \in A, \sup(f, g)(x) = \mathrm{Sup}(\{f(x),g(x)\})$
$\inf(f, g)$ est définie par $\forall x \in A, \inf(f, g)(x) = \mathrm{Inf}(\{f(x),g(x)\})$
$f^+ = \sup(f, 0)$ $f^- = \sup(-f, 0)$. On a $f = f^+ - f^-$, et $|f| = f^+ + f^-$. [ ~demo ]
f majorée sur A $\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in A, f(x) \leq M$
f minorée sur A $\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in A, f(x) \geq m$
f bornée sur A $\Leftrightarrow$ f majorée et minorée sur A
Si f est majorée sur A, f(A) admet une borne supérieure. On la note $\mathrm{Sup}_{x\in A} f(x) = \mathrm{Sup}(f(A))$.

$\mathrm{Sup}\, f(x) = M \Leftrightarrow \forall x \in A, f(x) \leq M$
et $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+, \exists x \in A, f(x) \geq M - \varepsilon$
f bornée sur A $\Leftrightarrow |f|$ majorée sur A. [ ~demo ]
f admet un maximum global $\Leftrightarrow \exists x_0 \in A, \forall x \in A, f(x) \leq f(x_0)$
f admet en un point $x_1 \in A$ un maximum local $\Leftrightarrow \exists \alpha > 0, [x_1 - \alpha, x_1 + \alpha] \subset A$
et $\forall x \in [x_1 - \alpha, x_1 + \alpha], f(x) \leq f(x_0)$
Attention : un maximum global n'est pas forcément un maximum local.

### 4 – Parité et périodicité

Soit $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$.
f est paire $\Leftrightarrow \forall x \in A, -x \in A$ et $f(-x) = f(x)$
f est impaire $\Leftrightarrow \forall x \in A, -x \in A$ et $f(-x) = -f(x)$
L'ensemble des fonctions paires de A à valeur dans $\mathbb{R}$ est notée $\mathbf{P}(A, \mathbb{R})$.
L'ensemble des fonctions impaires de A à valeur dans $\mathbb{R}$ est notée $\mathbf{I}(A, \mathbb{R})$.
$\mathcal{F}(A, \mathbb{R}) = \mathbf{P}(A, \mathbb{R}) \oplus \mathbf{I}(A, \mathbb{R})$ [ demo facile ]
f est périodique de période T $\Leftrightarrow \forall x \in A, x+T \in A$ et $f(x+T) = f(x)$
Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. L'ensemble des périodes de f est un sous–groupe additif de $\mathbb{R}$. [ ~demo ]

## II Etude locale

### 1 – Limite et continuité en un point

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, où I est un intervalle.
Une propriété locale est une propriété valide dans un intervalle.
V est un voisinage de a $\Leftrightarrow V \subset \mathbb{R}$, et $\exists \alpha > 0, [a - \alpha, a + \alpha] \subset V$
f admet la limite $\ell$ lorsque x tend vers $x_0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, |x - x_0| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$
ou $\ell - \varepsilon \leq f(x) \leq \ell + \varepsilon$
ou $f(x) \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$

On peut toujours se ramener à effectuer la limite en 0 : $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \to 0} f(x+x_0) - \ell = 0$
Unicité de la limite en un point [ demo : on choisit $\varepsilon \leq \ell - \ell'$ ]
Notation : $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell$ ou encore $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$
$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ et $x_0 \in I \Rightarrow f(x_0) = \ell$ [ demo rapide ]
f est continue en $x_0 \in I$ $\Leftrightarrow$ elle admet une limite en $x_0$
$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, |x - x_0| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$
Ex : E(x) n'est continue que sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.
Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, et a une borne de I, $a \notin I$, et $\lim_{x \to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$. On définit $g \in \mathcal{F}(I \cup \{a\}, \mathbb{R})$, telle que $\forall x \in I, g(x) = f(x)$ et $g(a) = \ell$. g est le prolongement par continuité de f en a.

## 2 – Extension à $\overline{\mathbb{R}}$

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, où I est un intervalle non majoré.
$f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell$ $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x > A \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$
$f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ $\Leftrightarrow \forall B \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x > A \Rightarrow f(x) \geq B$
De même pour $-\infty$.

## 3 – Limite et continuité à gauche / à droite

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, et $a \in (I \cup \{\text{Inf}(I)\}) \setminus \{\text{Sup}(I)\}$. $f(x) \xrightarrow[x \to a^+]{} \ell$ si
$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, a < x \leq a+\alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$
f est continue à droite si $\lim_{x \to a+} f(x) = f(a)$.
De même à gauche.
f est continue en $a \in I \setminus \{\text{Sup}(I), \text{Inf}(I)\} \Leftrightarrow$ f continue en a à gauche et à droite.

## 4 – Limites de fonctions, limites de suites

Si $a = \text{Sup}(I) \notin I$ alors $\exists (u_n) \in I^{\mathbb{N}}, (u_n) \to a$. [ demo facile ]
Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, et $a \in I$ ou a borne de I, $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \Leftrightarrow \forall (u_n) \in I^{\mathbb{N}}, (u_n) \to a \Rightarrow (f(u_n)) \to \ell$.
[ demo $A \Rightarrow B$ et pas $A \Rightarrow$ pas B ]
Utilisation : $x \to \sin(1/x)$ n'admet pas de limite lorsque $x \to 0$.

## 5 – Opérations sur les limites

Soit $I \subset \mathbb{R}$, et $a \in I$ ou a borne de I
$\{ f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}), f(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0 \}$ est un $\mathbb{R}$ – espace vectoriel [ demo en passant par les suites ]
Si $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ et g une fonction bornée au voisinage de a, alors $\lim_{x \to a} (fg)(x) = 0$
$\lim(f) + \lim(g) = \lim(f+g)$ $\lim(\lambda f) = \lambda \lim(f)$
$\lim(f g) = \lim(f) \lim(g)$ Si $\lim(g) \neq 0$, $\lim(f/g) = \lim(f) / \lim(g)$
Corollaire : Si f et g sont continues en a, alors $f+g$, $\lambda f$, $f g$, $f/g$ continues en a.
Ex : toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.

## 6 – Composition des limites

$f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, $g \in \mathcal{F}(J, \mathbb{R})$, et $f(I) \subset J$, $a \in I$ ou borne de I.
Si $\lim_{x \to a} f(x) = b$ et $\lim_{x \to b} g(x) = \ell$ alors $\lim_{x \to a} g \circ f(x) = \ell$. [ demo bcp de notations ]
Corollaire : f continue en $a \in I$ et g continue en $f(a) \in J$, alors $g \circ f$ est continue en a.

## 7 – Limites et relation d'ordre

$\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ $\lim_{x \to a} g(x) = \ell'$
$\ell < \ell' \Rightarrow \exists \beta > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \beta \Rightarrow f(x) < g(x)$ [ demo : on prend $\varepsilon < \ell' - \ell$ ]
Corollaire : Si $\lim_{x \to a} f(x) = \ell > 0, \exists m > 0, \exists \beta > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \beta \Rightarrow f(x) > m$
$\exists \beta > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \beta \Rightarrow f(x) \leq g(x) \Rightarrow \ell \leq \ell'$ ( contraposée )
Si $f, g, h \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, et que $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = \ell$, et $\exists \beta > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \beta \Rightarrow f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ alors $\lim_{x \to a} g(x) = \ell$

# II Continuité sur un intervalle

## 1 – Définition

f est continue sur I $\Leftrightarrow$ elle est continue en tous point de I
Notation : $f \in C^0(I, \mathbb{R})$ $C^0(I, \mathbb{R})$ est une $\mathbb{R}$ – algèbre.
$f \in C^0(I, \mathbb{R})$, $g \in C^0(J, \mathbb{R})$ et $f(I) \subset J$ alors $g \circ f \in C^0(I, \mathbb{R})$

## 2 – Image continue d'un intervalle.

Théorème des valeurs intermédiaires : $f \in C^0(I, \mathbb{R})$.
$\forall (a, b) \in I^2, \forall \lambda \in [\mathrm{Inf}(f(a),f(b)), \mathrm{Sup}(f(a),f(b))], \exists x \in [a, b], f(x) = \lambda$
[ DEMO : on étudie $f - \lambda$ ; on crée 2 suites adjacentes qui convergent vers x ]
Corollaire : $\forall f \in C^0(I, \mathbb{R})$, f(I) est un intervalle. [ demo rapide ]

## 3 – Image continue d'un segment

Segment = intervalle borné et fermé
$\forall f \in C^0([a, b], \mathbb{R})$, f([a, b]) est aussi un segment.
[ DEMO : on montre que f([a, b]) est bornée puis par des suites et BW on trouve un antécédent à M ]
[ exemple ]

## 4 – Continuité uniforme

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.
f est uniformément continue sur I $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall (x, x') \in I^2, |x - x'| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x')| \leq \varepsilon$
Théorème de Heine : $\forall f \in C^0([a, b], \mathbb{R})$, f est uniformément continue. [ DEMO absurde puis BW ]
Si $\exists ((x_n), (x'_n)) \in (I^{\mathbb{N}})^2$, telles que $(x_n - x'_n) \to 0$ et $(f(x_n) - f(x'_n))$ ne converge pas vers 0 alors f n'est pas uniformément continue. [ demo notations ]
f est k–lipschitzienne ($k \in \mathbb{R}_+^*$) si $\forall (x, x') \in I^2, |f(x) - f(x')| \leq k|x - x'|$
f est lipschizienne $\Rightarrow$ f uniformément continue [ demo rapide ]
Théorème du point fixe : Soit $f \in \mathcal{F}([a, b], [a, b])$, f est k–lipschitzienne de rapport $k \in ]0, 1[$ (c'est-à-dire f contractante) alors :

- $\exists ! c \in [a, b], f(c) = c$
- $\forall (x_n) \in [a, b]^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f(x_n), (x_n) \to c$

[ DEMO : existence de c (TVI) ; unicité de c ; suites proches à celles de Cauchy ]
Extensions : le théorème est aussi valide si $f \in \mathcal{F}([a, +\infty[, [a, +\infty[)$ ou si $f \in \mathcal{F}(]-\infty, a], ]-\infty, a])$, ou si $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
[ élements de demo ] ; il n'est pas valide si f est définie sur un intervalle ouvert [ contrexemple ].
Si f est continue sur $\mathbb{R}$, et qu'elle admet des limites finies en $+\infty$ et en $-\infty$, f est uniformément continue. [ EXOS 12 ]

## 5 – Approximation uniforme d'une fonction continue sur un intervalle

$f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ est approchée uniformément sur I à $\varepsilon$ près par $\varphi \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}) \Leftrightarrow \forall x \in I, |f(x) - \varphi(x)| \leq \varepsilon$
$\varphi \in \mathcal{F}([a, b], \mathbb{R})$ est en escalier $\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^*, \exists (x_0, x_1, ..., x_n) \in [a, b]^{n+1}, x_0 = a$ et $x_n = b$,
$\forall i \in \mathbb{N}_n, \exists \lambda_i \in \mathbb{R}, \varphi_{|]x_{i-1}, x_i[} = \lambda_i$
$\forall f \in C^0([a, b], \mathbb{R}), \forall \varepsilon > 0, \exists \varphi \in \mathcal{F}([a, b], \mathbb{R})$ escalier, telle que f approchée unif. sur [a, b] à $\varepsilon$ près par $\varphi$
[ demo simple ]
$\varphi \in \mathcal{F}([a, b], \mathbb{R})$ est continue et affine par morceaux $\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^*, \exists (x_0, x_1, ..., x_n) \in [a, b]^{n+1}, x_0 = a$ et $x_n = b$,
$\forall i \in \mathbb{N}_n$, $\varphi_{|]x_{i-1}, x_i[}$ est affine et $\varphi \in C^0([a, b], \mathbb{R})$
$\forall f \in C^0([a, b], \mathbb{R}), \forall \varepsilon > 0, \exists \varphi \in \mathcal{F}([a, b], \mathbb{R})$ continue et affine par morceaux, telle que f approchée uniformément sur [a, b] à $\varepsilon$ près par $\varphi$ [ demo difficile ]

[ TD 10 ]
$\forall f \in C^0([a, b], \mathbb{R}), \forall \varepsilon > 0, \exists$ B polynôme, f approchée uniformément sur [a, b] à $\varepsilon$ près par B [ **DEMO** ]

# IV Monotonie

## 1 – Définitions

Le taux d'accroissement (ou de variation) de f entre $x_1$ et $x_2$ est $(f(x_2) - f(x_1))/(x_2 - x_1)$.

f monotone sur I $\Leftrightarrow \forall$ $(x_1, x_2) \in I^2$, $x_1 \neq x_2$, le taux d'accroissement de f garde un signe constant.
f croissante sur I $\Leftrightarrow \forall$ $(x_1, x_2) \in I^2$, $x_1 \neq x_2$, le taux d'accroissement de f est positif. ( etc... )
f et g varient dans le même sens si elles sont monotones et si leurs taux d'accroissement ont le même signe.
f et g varient de le sens contraire si elles sont monotones et si leurs taux d'accroissement ont des signes contraires.

## 2 – Opérations sur les fonctions monotones

Soient f et g deux fonctions monotones sur I qui varient dans le même sens.
alors (f+g) est monotone et varie dans le même sens que f et que g. [ ~demo ]
Si $\lambda > 0$, $(\lambda f)$ est monotone et varie dans le même sens que f.
Si $\lambda < 0$, $(\lambda f)$ est monotone et varie de sens contraire à f. [ ~demo ]
Si f et g croissantes sur I et à valeurs positives sur I, alors (fg) est croissante sur I. [ ~demo ]
Si $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}_+^*)$ ou $\mathcal{F}(I, \mathbb{R}_-^*)$ est monotone, alors 1/f est monotone et varie dans le sens contraire à f.
Si f et g sont monotones, $g \circ f$ l'est aussi, et $g \circ f$ est croissant $\Leftrightarrow$ f et g varient dans le même sens. [ ~demo ]

## 3 – Monotonie et limites

Soit f une fonction croissante sur I.
Si $x_0 \in I \setminus \{ \text{Inf } I, \text{Sup } I \}$, alors f admet une limite à gauche et une limite à droite en $x_0$ telle que :

$\lim_{x \to x_0-} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{x \to x_0+} f(x)$ (le contraire si f décroissante).

[ demo à droite : on prend $\ell = \text{Inf } f \{ I \cap ]\, x_0, +\infty\, [ \}$ ]

Si $x_0 = \text{Sup } I$, et $x_0 \in I$, alors f(x) a une limite à gauche en $x_0$ inférieure à $f(x_0)$.
Si $x_0 = \text{Sup } I$, et $x_0 \notin I$, alors

Si f(x) est majorée sur I, alors elle a une limite à gauche finie.

Si f(x) n'est pas majorée sur I, $\lim_{x \to x_0-} f(x) = +\infty$

## 4 – Monotonie et continuité

$f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ présente en $x_0 \in I \setminus \{ \text{Inf } I, \text{Sup } I \}$ une discontinuité de 1ère espèce si :

- $\lim_{x \to x_0-} f(x)$ existe
- $\lim_{x \to x_0+} f(x)$ existe
- $f(x) \neq \lim_{x \to x_0-} f(x)$ ou $f(x) \neq \lim_{x \to x_0+} f(x)$

Soit f une fonction monotone.
f discontinue en $x_0 \Rightarrow$ f présente une discontinuité de 1ère espèce en $x_0$.
f présente un nombre fini ou dénombrable de discontinuités. [ spé $\mathbb{Q}$ ]
f continue sur I $\Leftrightarrow$ f(I) est un intervalle [ demo $\Leftarrow$ absurde ]
<u>Théorème des fonctions réciproques</u> : $\forall f \in C^0(I, \mathbb{R})$ strictement monotone, f est bijection de I vers f(I) ; $f^{-1}$ est continue sur f(I), strictement monotone, et varie dans le même sens que f. [ demo rapide ]
Si f est continue sur un intervalle et injective sur celui–ci, f est strictement monotone. [ EXOS 12 ]

# V Branches infinies

## 1 – Définitions

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, et (C) son graphique dans un repère du plan.
(C) admet une branche infinie si $\exists\, x_0 \in I \cup \{\text{Inf } I, \text{Sup } I\}$, $d(O,M) = \left\|\overrightarrow{OM}\right\| \xrightarrow[x \to x_0]{} +\infty$
(C) admet une direction asymptotique si la famille de droites (OM) a une position limite $\Delta$ lorsque $x \to x_0$, c'est-à-dire lorsque f(x)/x tend vers un élément de $\overline{\mathbb{R}}$.
(C) admet une asymptote D si la famille de droites $D_M$ (parallèles à $\Delta$, passant par M) admette une position limite D lorsque $x \to x_0$.

## 2 – Etude pratique

### a – $x \to x_0$ et $f(x) \to \infty$

On a $f(x)/x \to \infty$, donc f admet une direction asymptotique : Oy, et comme asymptote la droite d'équation $x = x_0$.

### b – $x \to \infty$ et $f(x) \to y_0$

On a $f(x)/x \to 0$, donc f admet une direction asymptotique : Ox, et comme asymptote la droite d'équation $y = y_0$.

**c – $x \to \infty$ et $f(x) \to \infty$**

Si $f(x)/x \to a \in \mathbb{R}_+^*$

Direction asymptotique ; $\Delta : Y = a X$

Si $f(x) - ax \to a \in \mathbb{R}_+^*$ : (C) admet une asymptote d'équation : $Y = aX + B$

Si $f(x) - ax \to \infty$ : (C) admet une branche parabolique

Si $f(x)/x \to 0$ : Direction asymptotique ; $\Delta = Ox$ ; Branche parabolique dans la direction de l'axe Ox.

Si $f(x)/x \to \infty$ : Direction asymptotique ; $\Delta = Oy$ ; Branche parabolique dans la direction de l'axe Oy.

## VI Fonctions puissances

### 1 – Etude de $f : x \to x^n$ ($n \in \mathbb{N}$)

$D_f = \mathbb{R}$ ; Compte tenu de la parité de f, on restreint l'étude sur $\mathbb{R}_+$. Si $n = 0$, $f = 1$ ; si $n = 1$, $f = Id_{\mathbb{R}}$ ; si $n \geq 2$, f est croissante et continue, et $f(x) \to +\infty$ ; $f(x)/x \to +\infty$ donc branche parabolique suivant Oy.

### 2 – Etude de $f : x \to x^n$ ($n \in \mathbb{Z}_-^*$)

$D_f = \mathbb{R}^*$ ; Compte tenu de la parité de f, on restreint l'étude sur $\mathbb{R}_+^*$. f est continue et croissante.

### 3 – Etude de $f : x \to x^{1/n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

On définit $x^{1/n}$ comme l'application réciproque de $x^n$ ; lorsque n est impair, on peut définir f sur tout $\mathbb{R}$ .

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^2, \forall (n, m) \in (\mathbb{N}^* \setminus \{1\})^2,$

$x^{1/n} . y^{1/n} = (x. y)^{1/n}$

$(x^{1/n})^{1/m} = x^{1/(n m)}$

$(1/x)^{1/n} = 1/x^{1/n}$

### 4 – Etude de $f : x \to x^r$ ($r \in \mathbb{Q}_+^*$)

$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$

$x \to x^r = \sqrt[q]{x^p}$ où $r = p / q$, $p > 0$ et $q > 0$. [ demo que indep des représentants ]

[ petite étude ...] Extension à $\mathbb{R}_-$ : Si on précise les représentants p et q, et si (p pair ou si q impair).

### 5 – Etude de $f : x \to x^r$ ($r \in \mathbb{Q}_-^*$)

$x^r = 1/x^{-r}$

Pour une extension à $x^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$, on peut introduire une suite $(r_n)$ de rationnels qui tend vers $\alpha$ (qui existe car $\mathbb{Q}$ dense dans $\mathbb{R}$), montrer qu'elle converge (suite de Cauchy), et que sa limite est indépendante du choix de $(r_n)$...

## VII Suites définies par une relation de récurrence

### 1 – Définition, limite éventuelle

Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, d'ensemble de définition $D_f$. On étudie la suite $(u_n)$, $u_0 \in D_f$, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

$(u_n)$ existe si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in D_f$. Si $I \subset D_f$ est un intervalle stable par f, i.e. $f(I) \subset I$, en fixant $u_0 \in I$, la suite existe.

Si $(u_n) \to \ell \in D_f$, et f continue alors $f(l) = \ell$.

### 2 – Monotonie et convergence

Soit $f \in C^0(I, \mathbb{R})$, I stable et $u_0 \in I$.

Si f est croissante alors $(u_n)$ est monotone. [ ~demo ]

Si f est décroissante alors $(u_{2n})$ et $(u_{2n+1})$ sont monotones et varient en sens contraire. [ ~demo ]

### 3 – Exemples

- $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = ½ (u_n + 1/u_n)$ ; alors $(u_n) \to 1$
- $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{(2 - u_n)}$ ; alors $(u_n) \to 1$
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 - u_n^2$
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = (u_n^2 + 8) / 6$

# 9 – Dérivation d'une fonction réelle d'une variable réelle

## I Dérivée et différentielle

### 1 – Fonction dérivable

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, et $x_0 \in I$.

Si $x_0 \neq \operatorname{Sup} I$, f admet en $x_0$ une dérivée à droite $\Leftrightarrow \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ admet une limite finie quand $x \to x_0^+$.

( de même à gauche )

Si $x_0 \neq \operatorname{Sup} I$ et $x_0 \neq \operatorname{Inf} I$, f est dérivable en $x_0$ $\Leftrightarrow$ f admet une dérivée à droite et à gauche et elles sont égales $\Leftrightarrow \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ admet une limite finie quand $x \to x_0$.

Elle est notée $f'(x_0)$.

### 2 – Fonction différentiable

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, et $x_0 \in I$.

f est différentiable en $x_0$ si $\exists A \in \mathbb{R}$, $\exists \psi$ une fonction définie au voisinage de 0 et qui converge vers 0 en 0, telles que

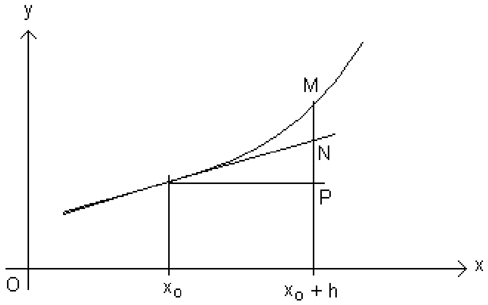
$$\forall h,\ f(x_0+h) = f(x_0) + h A + h\, \psi(h).$$

f différentiable $\Leftrightarrow$ f dérivable [ demo rapide ]

On appelle différentielle de f en $x_0$ l'application linéaire $h \to h f'(x_0)$, notée $df_{x_0} = \mathrm{Id}.\ f'(x_0)$

Cas particulier : la différentielle de Id est Id, notée dx. On a $f' = df/dx$

### 3 – Interprétations graphiques




Si f est dérivable en $x_0$, la famille de droites passant par $(x_0, f(x_0))$ et $(x_0+h, f(x_0+h))$ a une position limite : c'est la tangente au graphique de la fonction ; son coefficient directeur est $f'(x_0)$.

La mesure algébrique de PN est $df_{x_0}(h)$

La mesure algébrique de NM est $h\, \psi(h)$.

### 4 – Dérivabilité et continuité

Toute fonction dérivable en un point est continue sur celui–ci. [ demo rapide ]

Réciproque fausse. Ex : valeur absolue.

### 5 – Dérivées successives

Définition par récurrence des dérivées $p^{\text{ièmes}}$ de f : $f^{(p)} = (f^{(p-1)})'$

$C^0(I, \mathbb{R}) = \{ f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}),\ f \text{ continue sur } I \}$

$C^n(I, \mathbb{R}) = \{ f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}),\ f \text{ admet sur } I \text{ une dérivée } n^{\text{ième}} \text{ continue} \}$

$C^\infty(I, \mathbb{R}) = \{ f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}),\ \text{toutes les dérivées de f sont continues} \} = \cap\, C^n(I, \mathbb{R})$

$C^\infty(I, \mathbb{R}) \subset \dots \subset C^n(I, \mathbb{R}) \subset \dots \subset C^2(I, \mathbb{R}) \subset C^1(I, \mathbb{R}) \subset C^0(I, \mathbb{R})$

## II Opérations sur les fonctions dérivées

### 1 – Algèbre de fonctions dérivables

Soit I un intervalle, et $x_0 \in I$

$A = \{ f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}),\ f \text{ dérivable en } x_0 \}$ est une $\mathbb{R}$ – algèbre commutative. L'application : $f \to f'(x_0)$ en est une forme linéaire. Si f et $g \in A$, $(fg) \in A$, et $(fg)' = f'g + fg'$ [ demos sans difficultés ]

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall (f_1, ..., f_n) \in A^n, \forall (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n,$ $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i.f_i\right)' = \sum_{i=1}^{n} a_i.f'_i$, $\left(\prod_{i=1}^{n} f_i\right)' = \sum_{k=1}^{n}\left(f'_k.\prod_{i\in N_n-\{k\}} f_i\right)$ ( demo par récurrence sur n )

$\forall n \in \mathbb{N}$, $C^n(I, \mathbb{R})$ est une $\mathbb{R}$ – algèbre commutative. L'application $f \to f^{(n)}$ est linéaire.

Formule de Leibniz : $\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, p \leq n, \forall (f, g) \in C^n(I, \mathbb{R})$, $(fg)^{(p)} = \sum_{k=0}^{p} C_p^k.f^{(p)}.g^{(p-k)}$ [ demo facile ]

Par convention, $f^{(0)} = f$.

## 2 – Quotient de fonctions dérivables

Soient $(f, g) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})^2$, dérivables en $x_0$, $g(x_0) \neq 0$.

Alors $(f/g)$ est dérivable en $x_0$, et $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ [ demo rapide ]

Dérivées de fonctions puissances entières : $\forall n \in \mathbb{Z}^*$, $f_n : x \to x^n$ , $(f_n)' = n . f_{n-1}$ [ ~demo ]

## 3 – Dérivée logarithmique

Si $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ est dérivable en $x_0$, et que $f(x_0) \neq 0$, sa dérivée logarithmique est $f'(x_0)/f(x_0)$.
La dérivée logarithmique d'un produit est la somme des dérivées logarithmiques ; la dérivée logarithmique d'un quotient est la différence des dérivées logarithmiques.

## 4 – Dérivée d'une composée de 2 fonctions

Si $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, $g \in \mathcal{F}(J, \mathbb{R})$, $f(I) \subset J$, $x_0 \in I$, f dérivable en $x_0$ et g dérivable en $y_0 = f(x_0)$, alors

$g \circ f$ est dérivable en $x_0$, et $(g \circ f)' = g' \circ f \times f'$ [ demo calculs avec les differentielles ]

Ex : $(f^n)' = n. f^{n-1} . f'$ Dérivée des fonctions paires, impaires, périodiques

## 5 – Dérivée d'une fonction réciproque

Soit f une bijection continue d'un intervalle I sur J, telle que $f^{-1}$ continue de J sur I.
Soit $x_0 \in I$, telle que f dérivable en $x_0$, et $y_0 = f(x_0)$.

$f^{-1}$ dérivable en $y_0 \Leftrightarrow f'(x_0) \neq 0$

Et dans ce cas, $(f^{-1})'(y_0) = 1/f'(x_0)$ [ demo rapide ]

Corollaire : $f \in C^0(I, \mathbb{R})$ strictement monotone. f est une bijection de I vers $f(I) = J$. Si f est dérivable sur I, $f^{-1}$ est dérivable en tout point $y \in J$, tels que $f'(f^{-1}(y)) \neq 0$ ; alors, $(f^{-1})'(y_0) = 1/f'(f^{-1}(y_0))$

En particulier, si $\forall x \in I, f'(x) \neq 0$, $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$

Si $f \in C^n(I, \mathbb{R})$ et $\forall x \in I, f'(x) \neq 0$, alors $f^{-1} \in C^n(I, \mathbb{R})$. [ demo avec itérations ]

Exemple : La dérivée de $x \to x^r$, $r \in \mathbb{Q}^*$, est $x \to r\,x^{r-1}$. [ demo calculs ]

# III Théorème de Rolle et théorème des accroissements finis

## 1 – Théorème de Rolle

f est croissante sur I $\Rightarrow$ sa dérivée est positive sur I [ ~demo ]

f admet un extremum local en $x_0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$ [ demo rapide ]

Théorème de Rolle : $f \in C^0([a, b], \mathbb{R})$, $f(a) = f(b)$ et f dérivable sur $]a, b[ \Rightarrow \exists c \in ]a, b[, f'(c) = 0$.

[ demo : on étudie Min f[a, b] et Max f[a, b] ; on trouve alors un extremum local ]

## 2 – Théorème des accroissements finis

Egalité des accroissements finis : $f \in C^0([a, b], \mathbb{R})$, et f dérivable sur $]a, b[$. Alors

$\exists c \in ]a, b[, f'(c) = (f(b)-f(a))/(b-a)$. [ demo : on utilise Rolle avec f+k Id ]

ou encore : $f(b) - f(a) = (b - a) f'(c)$

$f(a+h) - f(a) = h f'(a + \theta h)$ où $\theta \in ]0, 1[$

Inégalité des accroissements finis : $f \in C^0([a, b], \mathbb{R})$, et f dérivable sur $]a, b[$.

$\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in ]a, b[, A \leq f'(x) \leq B \Rightarrow A (b - a) \leq f(b) - f(a) \leq B (b - a)$ [ demo rapide ]

Applications : Si $f' \geq 0$ sur I, f est croissante sur I, etc. [ demo ]
Calcul d'erreurs...

Pour f dérivable sur I, et $k \in \mathbb{R}_+^*$ : f est k–lipschizienne $\Leftrightarrow \forall x \in I, |f'(x)| \leq k$ [ demo facile ]

Théorème (important pour les exercices) :

Si $f \in C^0([a, b], \mathbb{R})$, f dérivable sur $]a, b]$, et $f'(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \in \mathbb{R}$ alors f dérivable en a et $f'(a) = \ell$ [ demo ]

Formule des accroissements finis généralisés : Soient $(f, g) \in C^0([a, b], \mathbb{R})^2$ dérivables sur $]a, b[$, et $g(a) \neq g(b)$.

alors $\exists\, c \in\ ]a, b[$, $\dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$ [ demo : on utilise Rolle avec f+kg ]

Corollaire : Soient $(f, g) \in C^0(I, \mathbb{R})^2$ dérivables sur I, si $f'(x)/g'(x) \to \ell \in \mathbb{R}$ quand $x \to x_0$,
alors $((f(x)-f(x_0))/(g(x)-g(x_0))) \to \ell$ quand $x \to x_0$. [ demo rapide ]

Exemple : développement limités de fonction trigonométriques.

## 3 – Théorème des valeurs intermédiaires pour une dérivée

f dérivable sur I $\Rightarrow f'(I)$ est un intervalle. [ demo par l'étude de f+k.Id ; on en cherche un extremum local ]

# 10 – Intégrale de Riemann

## I Fonctions en escalier

### 1 – Subdivisions d'un segment

Une subdivision $\sigma$ de [a, b] est une partie finie non vide de [a, b], telle que

$\sigma = \{ x_0, ..., x_n \}$, où $a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$.

On appelle module de $\sigma$ le nombre $\mu(\sigma) = \text{Max}\{ x_i - x_{i-1}, i \in \mathbb{N}_n \}$

Une subdivision $\sigma'$ de [a, b] est plus fine qu'une subdivision $\sigma$ de [a, b] si $\sigma \subset \sigma'$. C'est une relation d'ordre dans l'ensemble des subdivisions de [a, b], mais ce n'est qu'un ordre partiel. Sup $\{ \sigma, \sigma' \} = \sigma \cup \sigma'$.

### 2 – Application en escalier sur un intervalle

$f \in \mathcal{F}([a, b], \mathbb{R})$ est en escalier $\Leftrightarrow \exists\, \sigma = \{ x_0, ..., x_n \}$ subdivision de [a, b], $\forall i \in \mathbb{N}_n, \exists \lambda_i \in \mathbb{R}, f_{|]x_{i-1}, x_i[} = \lambda_i$.

Notation : $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions en escaliers

Une subdivision de [a, b] $\sigma = \{ x_0, ..., x_n \}$ est adaptée à $f \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ si $\forall i \in \mathbb{N}_n, \exists \lambda_i \in \mathbb{R}, f_{|]x_{i-1}, x_i[} = \lambda_i$.

$f \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ est continue sur [a, b] sauf en un nombre fini de points, où f dispose d'une limite à droite et/ou à gauche.

$\sigma$ est adaptée à f $\Rightarrow$ toute subdivision $\sigma'$ plus fine que $\sigma$ est adaptée à f. [ demo par récurrence sur # $(\sigma' \backslash \sigma)$ ]

Corollaire : Soient $f_1, f_2, ..., f_p$ p fonctions en escalier sur [a, b]. Alors il existe une subdivision adaptée à chacune.

### 3 – Structure de $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$

$\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ est une $\mathbb{R}$ – algèbre commutative. [ demo rapide ]

## II Intégrale d'une fonction en escalier sur un segment

### 1 – Définition

Soit $f \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$, et une subdivision adaptée $\sigma = \{ x_0, ..., x_n \}$. $\forall i \in \mathbb{N}_n, \exists \lambda_i \in \mathbb{R}, f_{|]x_{i-1}, x_i[} = \lambda_i$.

Le nombre $\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \lambda_i$ est indépendant du choix de la subdivision adaptée.

[ DEMO : 1) On ajoute 1 élément 2) Récurrence sur # $(\sigma' \backslash \sigma)$ 3) Généralisation ]

On appelle intégrale de f sur [a, b] le nombre $\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \lambda_i$, notée $\int_{[a,b]} f = \int_a^b f$

### 2 – Relation avec la structure de $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$

L'application $\begin{array}{ll} \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}) & \to \mathbb{R} \\ f & \to \int_a^b f \end{array}$ est une forme linéaire. [ demo rapide ]

$\forall (f, g) \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})^2, \forall (t_1, t_2, ..., t_q) \subset [a, b], \forall x \in [a, b] \setminus \{t_1, t_2, ..., t_q\}, f(x) = g(x)$, alors $\int_a^b f = \int_a^b g$ [ ~demo ]

### 3 – Relation de Chasles

Soit $f \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ et $c \in ]a, b[$. Alors $f_{|[a,c]} \in \mathcal{E}([a, c], \mathbb{R})$, $f_{|[c,b]} \in \mathcal{E}([c, b], \mathbb{R})$, et $\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f$ [ demo facile ]

Réciproque : $\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, a < c < b, \forall f \in \mathcal{E}([a, c], \mathbb{R}), \forall g \in \mathcal{E}([c, b], \mathbb{R}), f(c) = g(c)$ ;

alors $\exists\, h \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ , $h_{|[a,c]} = f$ et $h_{|[c,b]} = g$

### 4 – Relation d'ordre

$\forall f \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}_+), \int_a^b f \geq 0$. [ ~demo ]

Corollaires : $\forall (f, g) \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})^2, f \leq g \Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g$ [ ~demo ] $\int$ peut se considérer comme croissante.

$\forall f \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}), |f| \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ et $|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$. [ ~demo ]

### 5 – Extension

Soit $f \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$, on convient de poser $\int_a^b f = -\int_b^a f$ par cohérence avec la relation de Chasles.

## III Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment

### 1 – Fonctions $C^0PM$

$f \in \mathcal{F}([a, b], \mathbb{R})$ est continue par morceaux sur $[a, b]$ si $\exists\ \sigma = \{ x_0, ..., x_n \}$ subdivision de $[a, b]$,

$\forall i \in \mathbb{N}_n, \exists \lambda_i \in \mathbb{R}, f_{|]x_{i-1}, x_i[}$ continue, et f admet en $x_i$ une limite à gauche et en $x_{i-1}$ une limite à droite.

Notation : $C^0PM([a, b], \mathbb{R})$

$C^0PM([a, b], \mathbb{R})$ est une $\mathbb{R}$ – algèbre commutative. [ ~demo ]

### 2 – Approximation uniforme des fonctions $C^0PM$ par des fonctions en escalier

Amélioration de l'approximation uniforme :

$\forall f \in C^0([a, b], \mathbb{R}), \forall \varepsilon > 0, \exists (\varphi,\psi) \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})^2$, telles que $\psi \le f \le \varphi$ et $\varphi - \psi \le \varepsilon$. [ demo ]

Corollaire : $\forall f \in C^0PM([a, b], \mathbb{R}), \forall \varepsilon > 0, \exists (\varphi,\psi) \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})^2$, telles que $\psi \le f \le \varphi$ et $\varphi - \psi \le \varepsilon$. [ demo rapide ]

### 3 – Définition de l'intégrale d'une fonction $C^0PM$

$\forall f \in C^0PM([a, b], \mathbb{R})$, f est bornée. [ demo facile ]

$\forall f \in C^0PM([a, b], \mathbb{R})$, $\{ \int_a^b \varphi, \varphi \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}), \varphi \le f \}$ et $\{ \int_a^b \psi, \psi \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}), f \le \psi \}$ sont deux ensembles adjacents. Leur borne commune est $\int_a^b f$. [ demo en utilisant la remarque et l'approximation ]

Interprétation géométrique : Si Im $f \subset \mathbb{R}_+$, $\int_a^b f$ est l'aire entre la courbe et l'axe des abscisses, pour $a \le x \le b$.

### 4 – Linéarité

L'application $C^0PM([a, b], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$

$f \to \int_a^b f$ est une forme linéaire.

[ DEMO partielle : $\int_a^b f + \int_a^b g = \int_a^b f+g$ avec des encadrements par des escaliers ]

### 5 – Relation de Chasles

Soit $f \in C^0PM([a, b], \mathbb{R})$ et $c \in ]a, b[$. $f_{|[a,c]} \in C^0PM([a, c], \mathbb{R})$, $f_{|[c,b]} \in C^0PM([c, b], \mathbb{R})$, et $\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f$

Extension de l'intégrale : $\int_a^b f = -\int_b^a f$ [ cohérence avec la relation de Chasles ]

### 6 – Relation d'ordre

$\forall f \in C^0PM([a, b], \mathbb{R}_+)$, $\int_a^b f \ge 0$. [ ~demo ]

Corollaires : $\forall (f, g) \in C^0PM([a, b], \mathbb{R})^2, f \le g \Rightarrow \int_a^b f \le \int_a^b g$ [ ~demo ] $\int$ peut se considérer comme croissante.

$\forall f \in C^0PM([a, b], \mathbb{R})$, $|f| \in C^0PM([a, b], \mathbb{R})$ et $|\int_a^b f| \le \int_a^b |f|$. [ ~demo ]

$\forall f \in C^0PM([a, b], \mathbb{R}_+), \exists c \in [a, b]$, f continue en c et $f(c) > 0 \Rightarrow \int_a^b f > 0$. [ demo facile ]

Corollaire : $\forall f \in C^0([a, b], \mathbb{R}_+), \int_a^b f = 0 \Rightarrow f = 0$

### 7 – Inégalité de Cauchy–Schwarz, formule de la moyenne

<u>Inégalité de Cauchy–Schwarz</u> : $\forall (f, g) \in C^0PM([a, b], \mathbb{R})^2$, $(\int_a^b fg)^2 \le \int_a^b f^2 \times \int_a^b g^2$

[ demo : etude de $\int_a^b (f+\lambda g)^2 \ge 0$ donc discriminant négatif ]

( analogies avec le produit scalaire dans le plan puis dans un espace vectoriel quelconque )

<u>Formule de la moyenne</u> : $\forall (f, g) \in C^0PM([a, b], \mathbb{R})^2$, $\underline{g \ge 0}$, m = Inf f[a, b] et M = Sup f[a, b] ;

alors $\exists \lambda \in [m, M], \int_a^b f g = \lambda \int_a^b g$ [ demo facile ]

Conséquences :

- $\forall f \in C^0([a, b], \mathbb{R}), \forall g \in C^0PM([a, b], \mathbb{R}_+), \exists c \in [a, b], \int_a^b f g = f(c) \int_a^b g$.
- Le résultat est aussi vrai si $\forall x \in [a, b], g(x) \le 0$.
- $\forall f \in C^0PM([a, b], \mathbb{R}), \exists \lambda \in [m, M], \int_a^b f = \lambda (b - a)$ ; $\lambda$ est appelée la valeur moyenne de f sur [a, b]
  Interprétation géométrique : l'aire sous la courbe est égale à l'aire sous le rectangle de largeur $\lambda$.
- $\forall (f, g) \in C^0PM([a, b], \mathbb{R})^2$, $| \int_a^b f g | \le \int_a^b |f||g| \le (\mathrm{Sup} |f|[a, b]) \times \int_a^b |g|$

### 8 – Sommes de Riemann

Une subdivision pointée de $[a, b]$ est un couple $(\sigma, \alpha)$ où $\sigma = \{ x_0, ..., x_n \}$ est une subdivision et $\alpha = ( \alpha_1, ..., \alpha_n \} \in [a, b]^n$, telles que $\forall i \in \mathbb{N}_n, \alpha_i \in [x_{i-1}, x_i]$

Soit $f \in C^0PM([a, b], \mathbb{R})$, et $(\sigma, \alpha)$ une subdivision pointée de $[a, b]$ où $\sigma = \{ x_0, ..., x_n \}$ et $\alpha = ( \alpha_1, ..., \alpha_n )$ ; la somme de Riemann (XIXème) associée à f et relative à $(\sigma, \alpha)$ est : $\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}).f(\alpha_i)$

Soit $f \in C^0PM([a, b], \mathbb{R})$, $\forall \varepsilon > 0, \exists \beta > 0, \forall (\sigma, \alpha)$ subdivision pointée de $[a, b]$, $\mu(\sigma) \le \beta \Rightarrow \left| \int_a^b f - \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}).f(\alpha_i) \right| \le \varepsilon$

[ **DEMO** : on introduit un escalier ; on réécrit la valeur absolue ; on majore les 2 types d'intégrales ]

<u>Utilisation</u> : Soit $(\sigma_q)$ une suite de subdivisions de $[a, b]$, $(\mu(\sigma_q))_{q \in \mathbb{N}} \to 0$. Alors $(\Sigma (x_i - x_{i-1}) f(\alpha_i))_{q \in \mathbb{N}} \to \int_a^b f$.

On peut choisir en particulier $\sigma_q = \{a, a + (b-a)/q, a + 2 (b-a)/q, ..., b \}$ et $\alpha_q = (a, a + (b-a)/q, ..., a + (q-1)(b-a)/q \}$. Exemple : $\int_0^1 \mathrm{Id}$.

## <u>IV Intégrales et primitives</u>

### 1 – Primitives

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, où I est un intervalle. $F \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ est une primitive de F si F est dérivable sur I et $F' = f$.

Si $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ admet une primitive F sur I, $G \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ est une primitive de $F \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, G = F + \lambda$. [ ~demo ]

Si f admet une primive F et g admet une primitive G, $\alpha F + \beta G$ est une primitive de $\alpha f + \beta g$.

### 2 – Intégrale fonction de sa borne d'en haut

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, telle que $\forall (a, b) \in I^2, a < b \Rightarrow f \in C^0PM([a, b], \mathbb{R})$. Soit $a \in I$. Soit g l'application $x \to \int_a^x f$

g est continue sur I. [ demo en majorant $|f|$ au voisinage de $x_0$ ]

f est continue en $x_0 \Rightarrow$ g est dérivable en $x_0$, et $g'(x_0) = f(x_0)$. [ demo facile ]

Conséquences :

- $\forall f \in C^0(I, \mathbb{R}), \forall a \in I, x \to \int_a^x f$ est la primitive de f sur I nulle en a.
- Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives.
- Soit $f \in C^0(I, \mathbb{R})$, et F une primitive de f sur I. Alors $\forall (a, b) \in I^2, \int_a^b f = F(b) - F(a) = [F(t)]_a^b$. [ ~d ]

Intégrale indéfinie : $\int f$ peut désigner l'ensemble des primitives de f.

### 3 – Changement de variable

$f \in C^0(I, \mathbb{R})$, et $\varphi \in C^1(J, I) \Rightarrow \forall (\alpha, \beta) \in J^2, \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f = \int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)\, \varphi'$ [ demo facile ]

Exemple : $\int_0^{\pi/2} \sin^2 \cos = 1/3$.

Corollaire : $f \in C^0(I, \mathbb{R})$, et $\varphi$ est un $C^1$ – difféomorphisme entre J et I (ie $\varphi \in C^1(J, I)$, j bijective, et $j^{-1} \in C^1(I, J)$ ) alors, $\forall (a, b) \in I^2, \int_a^b f = \int_{\varphi-1(a)}^{\varphi-1(b)} (f \circ \varphi)\, \varphi'$ [ ~demo ]

Exemple : $\int_0^1 \sqrt{(1-x^2)} = \pi/4$ ; Notation : $\int_a^b f = \int_a^b f(x)\, dx$ (cohérence avec le changement de variable)

Intégrale indéfinie : $\int f(x)\, dx$ représente l'ensemble des primitives de f.

$f \in C^0(I, \mathbb{R})$, et $\varphi \in C^1$ – difféomorphisme de J vers $I \Rightarrow \int f(x)\, dx = \int f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt$ [ ~demo ]

Remarque : $f \in C^0(I, \mathbb{R})$, et v et $u \in C^1(J, I)$ ; $g = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\, dt \Rightarrow g' = f \circ v . v' - f \circ u . u'$ [ ~demo ]

### 4 – Intégration par parties

$\forall (u, v) \in C^1(I, \mathbb{R})^2, \forall (a, b) \in I^2, \int_a^b u'(x)\, v(x)\, dx = [ u(x)\, v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)\, v'(x)\, dx$ [ ~demo : dériver u.v ]

Exemple : $\int_0^{\pi/2} x \sin(x)\, dx = 1$

$\forall (u, v) \in C^1(I, \mathbb{R})^2, \int u'(x)\, v(x)\, dx = u(x)\, v(x) - \int u(x)\, v'(x)\, dx$

Exemple : $\int e^{kx} P(x)\, dx = e^{kx} Q(x) + c^{te}$ avec $d°Q = d°P$ [ demo récurrence sur d°P ]

Intégrale de Wallis : $\alpha \to \int_0^{\pi/2} \sin^\alpha t\, dt$ est constante sur $\mathbb{R}_+$, et $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^\alpha t\, dt \sim \sqrt{(\pi/2n)}$ [ EXOS 14 ]

# V Formules de Taylor

## 1 – Formule de Taylor avec reste intégral

$f \in C^{n+1}(I, \mathbb{R})$. $\forall (a, x) \in I^2$, $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t).dt$ [ demo par récurrence sur n ]

⌧ Il faut bien connaître cette formule. (Centrale2000)

## 2 – Inégalité de Taylor–Lagrange

$f \in C^{n+1}(I, \mathbb{R})$. $\forall (a, x) \in I^2$, $\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right| \leq M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$ où M majore $|f^{(n+1)}|$ sur [a, x] [ ~demo ]

## 3 – Formule de Taylor–Young

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, $a \in I$. $f^{(n)}(a)$ existe $\Rightarrow \exists\, \varepsilon \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, $\forall x \in I$, $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + (x-a)^n.\varepsilon(x)$

et $\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$ [ DEMO par récurrence sur n ; calcul de ε' ; AFG ]

## 4 – Développement d'une fonction en série de Taylor

$f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. ($\forall x \in \mathbb{R}, \exists M_x \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [\text{Inf}\{0,x\}, \text{Sup}\{0,x\}]$, $|f^{(n+1)}(t)| \leq M_x$ )

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x)$ [ demo approx ; Exemples : exp, sin, cos ]

# VI Compléments : fonctions à valeurs complexes

## 1 – Limite et continuité

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{C})$, $I \subset \mathbb{R}$. $\forall x \in I, \exists (g(x), h(x)) \in \mathbb{R}^2$, $f(x) = g(x) + h(x)$

f admet la limite $\ell$ lorsque x tend vers $x_0$ $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, |x - x_0| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$

$\Leftrightarrow$ g converge vers Re($\ell$) et h vers Im($\ell$) quand x tend vers $x_0$.

Les opérations sur les limites se retrouvent... Interprétation graphique (disque)

## 2 – Dérivée

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{C})$. f dérivable en $x_0$ $\Leftrightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ admet une limite finie quand $x \to x_0$.

$\Leftrightarrow$ g et h dérivables en $x_0$. Alors, $f'(x_0) = g'(x_0) + h'(x_0)$.

$f \in C^k(I, \mathbb{C}) \Leftrightarrow g$ et $h \in C^k(I, \mathbb{R})$. Rolle ne s'applique plus [ contrexemple : $x \to e^{ix}$ sur $0..2\pi$ ]

## 3 – Intégration

$f \in C^0PM(I, \mathbb{C})$, $f = g + i\,h$. $\int_a^b f = \int_a^b g + i \int_a^b h$ [ par définition ] Les sommes de Riemann sont aussi valides.

$\forall f \in C^0PM([a, b], \mathbb{C})$, $|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$ [ demo avec les sommes de Riemann ]

## 4 – Intégration et dérivation

$f \in C^0PM(I, \mathbb{C})$, $a \in I$. $x \in I \Rightarrow \int_a^x f$ est la primitive de f sur I qui s'annule en a.

Corollaire : L'inégalité des accroissements finis est valide. [ demo rapide ]

Taylor, l'intégration par partie, le changement de variable sont également valides...

Théorème du relèvement : $f \in C^1(I, U)$, où $U = \{ z \in \mathbb{C}, |z| = 1 \}$. Alors $\exists\, \theta \in C^1(I, \mathbb{R})$, $\forall t \in I$, $f(t) = e^{i\theta(t)}$.

Si $\forall t \in I$, $f(t) = e^{i\theta_1(t)} = e^{i\theta_2(t)}$, alors $\exists k \in \mathbb{Z}$, $\forall t \in I$, $\theta_2(t) - \theta_1(t) = 2k\pi$.

[ **DEMO** : on détermine $\varphi$, $\varphi' = \theta'$ ; on étudie $g = f - \varphi$, qui est constant ... ]

# VII Méthodes d'approximation d'intégrales

Méthode des rectangles au point médian [ TD 11 ] : $\varepsilon \leq M(b-a)^3/24n^2$ [ Taylor avec r∫ entre a et c et b et c ]

Méthode des trapèzes [ TD 11 ] : $\varepsilon \leq M(b-a)^3/12n^2$ [ Calcul de $\int (x-a)(x-b)f''(x)$ par IPP ]

Méthode des trapèzes avec dichotomie [ TD INFO 6 ]
Méthode de Simpson [ TD INFO 6 ] : Approximation de la fonction par un polynôme d'ordre $\leq 2$.

# 11 – Fonctions usuelles

## I Fonctions trigonométriques

### 1 – Fonctions directes

Définition de sin, cos, tan, cotan d'après des mesures algébriques sur le cercle trigonométriques.
sin et cos sont $2\pi$–périodiques ; tan et cotan sont $\pi$–périodiques. sinus, tan, cotan sont impaires ; cos est paire. [~d]
trig($\pi$+x) ; trig($\pi$–x); trig($\pi$/2+x) ; trig($\pi$/2–x)... Formulaire trigonométrique... Cf Nombres complexes
sin et cos sont continues [ demo facile géométrie : sin est 1–lipschitzienne ]
sin' = cos ; cos' = –sin [ demo facile avec demo que $\lim_{x\to 0} \sin(x)/x = 1$ ] $\Rightarrow$ sin et cos $\in C^\infty$

$$\tan' = 1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2} \quad \text{cotan}' = -1 - \text{cotan}^2 = -\frac{1}{\sin^2}$$

### 2 – Fonctions réciproques

#### a – Réciproques de sin et de cos

$\text{Arcsin} = (\sin|_{[-\pi/2,\pi/2]})^{-1}$ est croissante et impaire ; $\text{Arcsin}' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ [ demo rapide ]

$\text{Arccos} = (\cos|_{[0,\pi]})^{-1}$ est décroissante ; $\text{Arccos}' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ [ demo rapide ]

$$\text{Arcsin} + \text{Arccos} = \frac{\pi}{2}$$

$\forall x \in [-1, 1], \cos(\text{Arcsin}(x)) = \sin(\text{Arccos}(x)) = \sqrt{1-x^2}$
$\sin \circ \text{Arcsin} = \text{Id}$
$\cos \circ \text{Arccos} = \text{Id}$
(graphiques de Arcsin ○ sin et de Arccos ○ cos : VVV )

#### b – Réciproques de tan et de cotan

$\text{Arctan} = (\tan|_{]-\pi/2,\pi/2[})^{-1}$ est croissante et impaire ; $\text{Arctan}' = \dfrac{1}{1+x^2}$ [ ~demo ]

$\text{Arccotan} = (\text{cotan}|_{]0,\pi[})^{-1}$ est croissante ; $\text{Arccotan}' = -\dfrac{1}{1+x^2}$ [ ~demo ]

$$\text{Arctan} + \text{Arccotan} = \frac{\pi}{2}$$

$\text{Arctan } a + \text{Arctan } b \equiv \text{Arctan}\left(\dfrac{a+b}{1-ab}\right) [\pi]$ [ EXOS 14 ]

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos \text{Arctan } x = \sin \text{Arccotan } x = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$,

$\forall x > 0$, $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2}$

$\text{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \text{Arccotan}(x)$ [ demo... ]

## II Fonctions logarithmes et exponentielles

### 1 – Logarithme néperien

$\ln x = \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t}$ par définition. ln est donc croissante (sa dérivée est positive)

$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^{*\,2}, \ln(x_1 x_2) = \ln(x_1) + \ln(x_2)$ [ demo : étude de $x \to \ln(x_1x)$ ]
$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ [ demo : utilisation des fonctions puissances ]
Limites classiques : $\lim_{x\to 0} \ln(1+x)/x = 1$ (dérivée en 1)
$\lim_{x\to+\infty} \ln(x)/x = 0$ [ demo : utilisation de $\sqrt{\ }$ ]
$\lim_{x\to 0+} x \ln(x) = 0$
Notation : e est l'antécédent de 1. ln(e) = 1.

## 2 – Exponentielle de base e

$\exp = (\ln)^{-1}$ est croissante, et $\in C^\infty$. $\exp' = \exp$ [ ~demo ] ;

Limites classiques : $\lim_{x \to 0} (\exp(x)-1)/x = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \exp(x)/x = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} x \exp(x) = 0$

$\forall r \in \mathbb{Q}, \exp(r) = e^r$. [ demo progression ] $\Rightarrow$ Notation : $\exp(x) = e^x$.

## 3 – Fonctions logarithmes de base quelconque

Equation fonctionnelle = caractéristique d'une famille de fonctions.

$\{ f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) \} = \mathcal{L}(\mathbb{R}) = \{ a \times \mathrm{Id}, a \in \mathbb{R} \}$. [ demo progression ]

$\{ f \in C^0(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}), \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, f(x_1 . x_2) = f(x_1) + f(x_2) \} = \{ \ln/\ln a, a \in \mathbb{R}_+^*\backslash\{1\}\} \cup \{ 0 \}$

[ demo : on se ramène au cas précédent en étudiant $g = f \circ \exp$ ]

$\forall a \in \mathbb{R}_+^*\backslash\{1\}$, la fonction logarithme de base a est l'application $\log_a = \dfrac{\ln}{\ln a}$.

## 4 – Fonctions exponentielles de base quelconque

$\{ f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, f(x_1 + x_2) = f(x_1) . f(x_2) \} = \{ \exp(\ln(a) \times \mathrm{Id}), a \in \mathbb{R}_+^*\backslash\{1\}\} \cup \{ 0, 1 \}$

[ demo : on se ramène aux fonctions linéaires en étudiant $g = \ln \circ f$ ]

$\forall a \in \mathbb{R}_+^*\backslash\{1\}$, la fonction exponentielle de base a est l'application $\exp_a = e^{\ln(a)\,\mathrm{Id}}$.

On a $\exp_a = (\log_a)^{-1}$.

$\forall r \in \mathbb{Q}, \exp_a(r) = a^r$ [ $\circ \ln$ ] $\Rightarrow$ Notation : $\exp_a(x) = e^{x \ln(a)} = a^x$

## 5 – Cas particulier du logarithme décimal

Notation : $\log = \log_{10}$. (utilisation pour calculer $x^a . y^b / z^c$ avec des tables de logarithmes)

## 6 – Fonctions puissances

Etude de la fonction : $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ avec $b \in \mathbb{R}$.

$x \to x^b = e^{b \ln(x)}$ ( si $b \in \mathbb{Q}$, on a bien $x^b = e^{b \ln(x)}$)

Cette fonction est de classe $C^\infty$. Sa dérivée est $b.x^{b-1}$ [ ~demo ]

$\{ f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, f(x_1 . x_2) = f(x_1) . f(x_2) \} = \{ \exp(a \times \ln), a \in \mathbb{R} \} \cup \{ 0 \}$

# III Fonctions hyperboliques

## 1 – Définition, formulaire

Sinus et cosinus hyperboliques :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}\, x = \dfrac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}$ [ partie paire de $x \to e^x$ ]

et $\mathrm{sh}\, x = \dfrac{\exp(x) - \exp(-x)}{2}$ [ partie impaire de $x \to e^x$ ]

ch + sh = exp

$\mathrm{ch}^2 - \mathrm{sh}^2 = 1$ [ demo rapide ]

| | |
|---|---|
| $\mathrm{ch}(a+b) = \mathrm{ch}\, a\, \mathrm{ch}\, b + \mathrm{sh}\, a\, \mathrm{sh}\, b$<br>$\mathrm{ch}(a-b) = \mathrm{ch}\, a\, \mathrm{ch}\, b - \mathrm{sh}\, a\, \mathrm{sh}\, b$<br>$\mathrm{sh}(a+b) = \mathrm{sh}\, a\, \mathrm{ch}\, b + \mathrm{ch}\, a\, \mathrm{sh}\, b$<br>$\mathrm{sh}(a-b) = \mathrm{sh}\, a\, \mathrm{ch}\, b - \mathrm{ch}\, a\, \mathrm{sh}\, b$ [ demos rapide ] | $\mathrm{sh}\, p + \mathrm{sh}\, q = 2\, \mathrm{sh}((p+q)/2)\, \mathrm{ch}((p-q)/2)$<br>$\mathrm{sh}\, p - \mathrm{sh}\, q = 2\, \mathrm{ch}((p+q)/2)\, \mathrm{sh}((p-q)/2)$<br>$\mathrm{ch}\, p + \mathrm{ch}\, q = 2\, \mathrm{ch}((p+q)/2)\, \mathrm{ch}((p-q)/2)$<br>$\mathrm{ch}\, p - \mathrm{ch}\, q = +2\, \mathrm{sh}((p+q)/2)\, \mathrm{sh}((p-q)/2)$ [~demo ] |
| $\mathrm{ch}(2a) = \mathrm{ch}^2 a + \mathrm{sh}^2 a = 1+2\, \mathrm{sh}^2 a = 2\, \mathrm{ch}^2 a - 1$ | $\mathrm{sh}(2a) = 2\, \mathrm{sh}\, a\, \mathrm{ch}\, a$ |
| $\mathrm{ch}^2 a = (\mathrm{ch}\, 2a + 1)/2$ | $\mathrm{sh}^2 a = +(\mathrm{ch}\, 2a - 1)/2$ |

Calcul de ch na : on écrit $\mathrm{ch}\, na + \mathrm{sh}\, na = \exp(na) = (\mathrm{ch}\, a + \mathrm{sh} a)^n$

$\mathrm{ch}\, na - \mathrm{sh}\, na = \exp(-na) = (\mathrm{ch}\, a - \mathrm{sh} a)^n$ puis on fait des combinaisons linéaires.

Linéarisation : $\mathrm{ch}^n a = (e^x + e^{-x})^n / 2^n = \ldots$ formule du Binôme

Définition correcte des fonctions trigonométriques (ou circulaires) :

Exponentielle complexe : [def] $\forall z \in \mathbb{C}, \exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n!}$ (converge : suite de Cauchy)

$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, \exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) + \exp(z_2)$ [ demo approx ]

Etude de $x \in \mathbb{R} \to \exp(ix)$. On définit $\cos x = \mathrm{Re}\, \exp(ix)$ et $\sin x = \mathrm{Im}\, \exp(ix)$

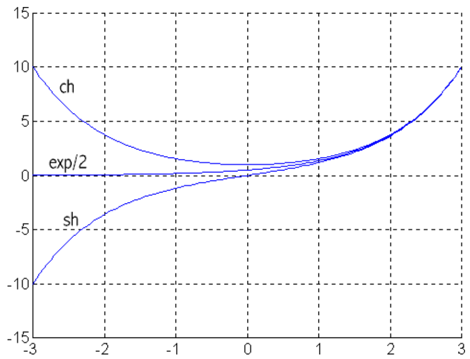
$\cos' = -\sin$ et $\sin' = \cos$ ; la fonction est un morphisme de $(\mathbb{R},+)$ vers $(U, \times)$ [ demo ]

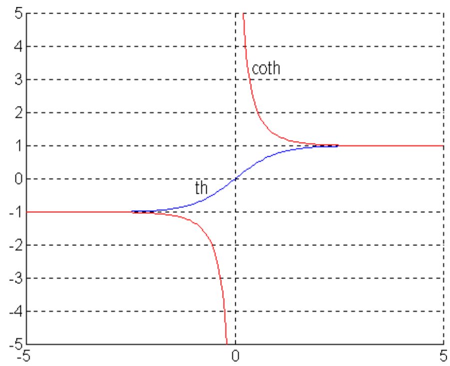
Son noyau est discret (car sinon, la fonction est nulle) ; de la forme $a\mathbb{Z}$. On pose $\pi = a/2$. [ def ]
cos et sin sont $2\pi$–périodiques ; reconstruction des formules usuelles de trigonométrie.
Tangente et cotangente hyperboliques :
th = sh / ch ; coth = ch / sh = 1 / th (non définie en 0).
$\text{th}(a+b) = (\text{th } a + \text{th } b)/(1 + \text{tha thb})$ $\qquad$ $\text{th}(2a) = 2 \text{ th } a \ / \ (1 + \text{th}^2 a)$

$\text{th}(x) = \dfrac{2t}{1+t^2} = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ $\qquad$ $\text{sh}(x) = \dfrac{2t}{1-t^2} = \dfrac{e^{2x}-1}{2e^x}$ $\qquad$ $\text{ch}(x) = \dfrac{1+t^2}{1-t^2} = \dfrac{e^{2x}+1}{2e^x}$ $\qquad$ où $t = \text{th}\left(\dfrac{x}{2}\right)$

$\tan(x) = \dfrac{2t}{1-t^2}$ $\qquad$ $\sin(x) = \dfrac{2t}{1+t^2}$ $\qquad$ $\cos(x) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ $\qquad$ où $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$

## 2 – Etude des fonctions




sh et ch $\in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
sh ' = ch
ch ' = +sh
sh < exp/2 < ch

th ' x = $1/\text{ch}^2 x = 1 - \text{th}^2 x$
coth ' x = $+ 1 - \text{coth}^2 = -1/\text{sh}^2$ (attention)
Au voisinage de $0^+$, on a th < Id < sh.

## 3 – Fonctions réciproques

Argsh = $\text{sh}^{-1}$ $\quad$ Argsh ' (x) = $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ $\quad$ Argsh(x) = $\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

Argch = $(\text{ch}|_{\mathbb{R}+})^{-1}$ $\quad$ Argch ' (x) = $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ $\quad$ Argch(x) = $\ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$

Argth = $\text{th}^{-1}$ $\quad$ Argth ' (x) = $\dfrac{1}{1-x^2}$ $\quad$ Argth(x) = $\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

Argcoth : $x \to (\text{coth}|_{\mathbb{R}+})^{-1}(x)$ si $x > 1$ et $(\text{coth}|_{\mathbb{R}-})^{-1}(x)$ si $x < -1$.

Argcoth ' (x) = $\dfrac{1}{1-x^2}$ $\quad$ Argcoth(x) = $\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{x-1}\right)$

## IV Dérivées et primitives

**$f(x) \rightarrowtail f'(x)$**

$\sin(x) \rightarrowtail \cos(x)$

$\cos(x) \rightarrowtail -\sin(x)$

$\tan(x) \rightarrowtail 1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$

$\mathrm{cotan}(x) \rightarrowtail -1 - \mathrm{cotan}^2(x) = -\dfrac{1}{\sin^2(x)}$

$\mathrm{Arcsin}(x) \rightarrowtail \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\mathrm{Arccos}(x) \rightarrowtail -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\mathrm{Arctan}(x) \rightarrowtail \dfrac{1}{1+x^2}$

$\mathrm{Arccotan}(x) \rightarrowtail -\dfrac{1}{1+x^2}$

$\ln(x) \rightarrowtail \dfrac{1}{x}$

$\exp(x) \rightarrowtail \exp(x)$

$\log_a(x) \rightarrowtail \dfrac{1}{x \ln(a)}$

$a^x \rightarrowtail a^x \,.\, \ln(a)$

$x^a \rightarrowtail a\, x^{a-1}$

$\mathrm{sh}(x) \rightarrowtail \mathrm{ch}(x)$

$\mathrm{ch}(x) \rightarrowtail \mathrm{sh}(x)$

$\mathrm{th}(x) \rightarrowtail 1 - \mathrm{th}^2(x) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$

$\mathrm{coth}(x) \rightarrowtail 1 - \mathrm{coth}(x) = -\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2(x)}$ (attention)

$\mathrm{Argsh}(x) = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) \rightarrowtail \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$\mathrm{Argch}(x) = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) \rightarrowtail \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$\mathrm{Argth}(x)$ ou $\mathrm{Argcoth}(x) = \dfrac{1}{2} \ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right| \rightarrowtail \dfrac{1}{1-x^2}$

**$f(x) \rightarrowtail \int f(x)\, dx$ (– $c^{te}$)**

$\dfrac{1}{a^2+x^2} \rightarrowtail \dfrac{1}{a} \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{x}{a}\right)$

$\tan(x) \rightarrowtail -\ln|\cos(x)|$

$\mathrm{th}(x) \rightarrowtail \ln(\mathrm{ch}(x))$

$\ln(x) \rightarrowtail x \ln x - x$

$\dfrac{1}{\sin(x)} \rightarrowtail \ln\left|\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)\right| = \ln\left(\dfrac{1}{\sin(x)} - \mathrm{cotan}(x)\right)$

$\dfrac{1}{\cos(x)} \rightarrowtail \ln\left|\tan\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right| = \ln\left(\dfrac{1}{\cos(x)} + \tan(x)\right)$

# 12 – Etude pratique d'une fonction réelle

## I Comparaison de fonctions au voisinage d'un point

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $x_0 \in I \cup \{ \text{Inf } I, \text{Sup } I \}$ (éventuellement $\pm\infty$) ; $(f, g) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$

### 1 – Relation de domination

f est dominée par g en $x_0 \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow \exists\, \alpha > 0, \exists\, \beta > 0, \forall\, x \in I, |x - x_0| \le \beta \Rightarrow |f(x)| \le \alpha |g(x)|$

f est dominée par g en $+\infty$ $\Leftrightarrow \exists\, \alpha > 0, \exists\, \beta > 0, \forall\, x \in I, x \ge \beta \Rightarrow |f(x)| \le \alpha |g(x)|$

Notations : $f \underset{x_0}{=} O(g)$ $\quad f(x) \underset{x_0}{=} O(g(x))$

La relation de domination est réflexive et transitive.

$f \underset{x_0}{=} O(g) \Leftrightarrow \exists\, J_{\text{intervalle}} \subset I, x_0 \in J \cup \{\text{Inf } J, \text{Sup } J\}, \exists\, h \in \mathcal{F}(J, \mathbb{R}), \forall\, x \in J, f(x) = g(x)\, h(x)$ et h bornée [ demo ]

Cas particulier : Si $g \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^*)$, $f \underset{x_0}{=} O(g) \Leftrightarrow \exists\, J_{\text{intervalle}} \subset I, x_0 \in J \cup \{\text{Inf } J, \text{Sup } J\}$, $f/g$ bornée dans J

Si $f \underset{x_0}{=} O(g)$ et $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ alors $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$

$f \underset{x_0}{=} O(h)$ et $g \underset{x_0}{=} O(h) \quad \Rightarrow f + g \underset{x_0}{=} O(h)$

$f \underset{x_0}{=} O(h)$ et $g \underset{x_0}{=} O(k) \quad \Rightarrow f\, g \underset{x_0}{=} O(h\, k)$

$f \underset{x_0}{=} O(g) \quad \Rightarrow \lambda\, f \underset{x_0}{=} O(g)$

<u>Remarque</u> : Extension à $\overline{\mathbb{R}}$ valide.

### 2 – Relation de prépondérance

f est négligeable devant g en $x_0 \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ g est prépondérante devant f en $x_0$

$\Leftrightarrow \forall\, \alpha > 0, \exists\, \beta > 0, \forall\, x \in I, |x - x_0| \le \beta \Rightarrow |f(x)| \le \alpha |g(x)|$

Notations : $f \underset{x_0}{=} o(g)$ $\quad f(x) \underset{x_0}{=} o(g(x))$

La relation de prépondérance est transitive.

$f \underset{x_0}{=} o(g) \Leftrightarrow \exists\, J_{\text{intervalle}} \subset I, x_0 \in J \cup \{\text{Inf } J, \text{Sup } J\}, \exists\, h \in \mathcal{F}(J, \mathbb{R}), \forall\, x \in J, f(x) = g(x)\, h(x)$ et $\lim_{x \to x_0} h(x) = 0$

Cas particulier : Si $g \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^*)$, $f \underset{x_0}{=} o(g) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f/g = 0$

Exemples : $\forall\, a > 1, \forall\, \alpha > 0, \forall\, \beta > 0, (\log_a(x))^\alpha \underset{+\infty}{=} o(x^\beta)$ et $x^\beta \underset{+\infty}{=} o(a^x)$ [ ~demo ]

$f \underset{x_0}{=} o(g)$ et $g \underset{x_0}{=} O(h) \quad \Rightarrow f \underset{x_0}{=} O(h)$

$f \underset{x_0}{=} O(g)$ et $g \underset{x_0}{=} o(h) \quad \Rightarrow f \underset{x_0}{=} O(h)$

$f \underset{x_0}{=} o(h)$ et $g \underset{x_0}{=} o(h) \quad \Rightarrow f + g \underset{x_0}{=} o(h)$

$f \underset{x_0}{=} o(h)$ et $g \underset{x_0}{=} O(k) \quad \Rightarrow f\, g \underset{x_0}{=} o(h\, k)$

$f \underset{x_0}{=} o(g) \quad \Rightarrow \lambda\, f \underset{x_0}{=} o(g)$

### 3 – Relation d'équivalence

$f \underset{x_0}{\sim} g \Leftrightarrow f - g \underset{x_0}{=} o(g)$.

$f \underset{x_0}{\sim} g \Leftrightarrow \exists\, J_{\text{intervalle}} \subset I, x_0 \in J \cup \{\text{Inf } J, \text{Sup } J\}, \exists\, h \in \mathcal{F}(J, \mathbb{R}), \forall\, x \in J, f(x) = g(x)\, h(x)$ et $\lim_{x \to x_0} h(x) = 1$

Cas particulier : Si $g \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^*)$, $f \underset{x_0}{=} o(g) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f/g = 1$

C'est une relation d'équivalence. [ DEMO : $f \underset{x_0}{\sim} g \Rightarrow g \underset{x_0}{=} O(f)$ puis facile ]

Si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$ alors $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ [ ~demo ]

Si $f \underset{x_0}{\sim} h$ et $g \underset{x_0}{\sim} k$, alors :

- $fg \underset{x_0}{\sim} hk$ [ demo rapide ]
- $f/g \underset{x_0}{\sim} h/k$ si la division est possible
- $f^\lambda \underset{x_0}{\sim} h^\lambda$ si $f \ge 0$
- Si $k \underset{x_0}{=} o(h)$ alors $f + g \underset{x_0}{\sim} h$ [ ~demo ]
- Si $\exists\, J_{\text{intervalle}} \subset I, x_0 \in J \cup \{\text{Inf } J, \text{Sup } J\}, \forall\, x \in J, h(x) \ge 0$ et $k(x) \ge 0$, alors $f+g \underset{x_0}{\sim} k+h$
- Si $\exists\, \alpha \in \mathbb{R}, k \underset{x_0}{\sim} \alpha\, h$, alors :
  - Si $\alpha \ne -1$, alors $f+g \underset{x_0}{\sim} (1+\alpha)h$
  - Si $\alpha = -1$, alors $f+g \underset{x_0}{=} o(h)$ [ demos Cf. chapitre sur les suites ]

<u>Remarque</u> : ça sert à rien d'écrire $\cos x \underset{0}{\sim} 1 - x^2/2$ ...

Pour étudier la somme $f_1 + f_2 + \ldots + f_n$, on les groupe dans 2 catégories : $f_i \underset{x_0}{\sim} \lambda_i\, .\, g$ et $f_j \underset{x_0}{=} o(g)$. [ exemples ... ]

Si $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ ou $+\infty$ et $f \underset{x_0}{\sim} g$ alors $\ln f \underset{x_0}{\sim} \ln g$. [ ~demo ]

Si $\lim_{x \to x_0} f(x) - g(x) = 0$ et $f \underset{x_0}{\sim} g$ alors $e^f \underset{x_0}{\sim} e^g$. [ ~demo ]

Formes indéterminées : $0/0 \quad \infty/\infty \quad 0\, .\, \infty \quad \infty - \infty \quad (+\infty)^0 \quad 1^\infty \quad 0^0$.

## 4 – Intégration des relations de comparaison

$f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}_+)$. $x_0 \in I$.

$f \underset{x_0}{=} O(g) \Rightarrow \int_{x_0}^x f \underset{x_0}{=} O(\int_{x_0}^x g)$ [ demo rapide ]

$f \underset{x_0}{=} o(g) \Rightarrow \int_{x_0}^x f \underset{x_0}{=} o(\int_{x_0}^x g)$

$f \underset{x_0}{\sim} g \Rightarrow \int_{x_0}^x f \underset{x_0}{\sim} \int_{x_0}^x g$

Mais si g n'est pas à valeurs positives, ce n'est plus vrai. [ EXOS 15 ]

## 5 – Infiniment petits et infiniment grands

$f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, $x_0 \in I \cup \{ \text{Inf } I, \text{Sup } I \}$.

f est un infiniment petit lorsque $x \to x_0$ si $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$

f est un infiniment grand lorsque $x \to x_0$ si $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$

- Notion d'infiment petits simultanés, d'infiniment petit principal.
- Soient f et g deux infiniment petits simultanés lorsque $x \to x_0$.
- Si $\exists \lambda \in \mathbb{R}^*$, $f \underset{x_0}{\sim} \lambda g$, alors f et g sont de même ordre.
- Si $f \underset{x_0}{=} o(g)$, f est d'ordre supérieur à g.

Si f(x) est un infiniment petit lorsque $x \to 0$ et si $\exists \lambda \in \mathbb{R}^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) \underset{0}{\sim} \lambda x^\alpha$, $\alpha$ est l'ordre de l'infiniment petit f(x) et $\lambda x^\alpha$ sa partie principale.

Soient f et g deux infiniment petits simultanés lorsque $x \to 0$, avec $f(x) \underset{0}{\sim} \lambda x^\alpha$ et $g(x) \underset{0}{\sim} \mu x^\beta$.

Alors $f(x)g(x) \underset{0}{\sim} \lambda\mu x^{\alpha+\beta}$ et $f(x)/g(x) \underset{0}{\sim} \lambda/\mu x^{\alpha-\beta}$.

Soient $f_1, f_2, ..., f_n$ n infiniment petits simultanés lorsque $x \to 0$. Si $\exists p \in \mathbb{N}$, $\forall i \in \{1, .., p\}$, $f_i(x) \underset{0}{\sim} \lambda_i x^\alpha$ et $\forall i \in \{p+1, ..., n\}$, $f_i(x) \underset{0}{=} o(x^\alpha)$, alors : si $\Sigma \lambda_i \neq 0$, $\Sigma f_i \underset{0}{\sim} \Sigma \lambda_i x^\alpha$. Sinon, $\Sigma f_i$ est d'ordre supérieur à $\alpha$.

# II Développements limités

## 1 – Définition

$f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, $0 \in I \cup \{ \text{Inf } I, \text{Sup } I \}$. f admet en 0 un développement limité (dl) à l'ordre n s'il existe une fonction polynôme P de degré $\leq n$, telle que $f(x) - P(x) \underset{0}{=} o(x^n)$

c'est-à-dire $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + o(x^n)$

c'est-à-dire $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + x^n \varepsilon(x)$ où $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$

- ( pour les cas où il est question de dl en $x_0$, il faut se ramener en 0 par un changement de variable).
- Si f admet un dl à l'ordre n, la fct. polynôme P de degré $\leq n$ est unique. C'est la partie régulière du dl. [ ~demo ]
- Conséquence : Si f est impaire et admet un dl en 0, sa partie régulière sera aussi impaire.
- Si f admet en 0 un dl, $\lim_{x \to 0} f(x) = \ell = a_0$. [ ~demo ]

## 2 – Obtention d'un développement limité

Utilisation de la formule de Taylor–Young.

$e^x = 1 + x/1! + x^2/2! + x^3/3! + ...$

$\sin x = x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7! + ...$ $\cos x = 1 - x^2/2! + x^4/4! - x^6/6! + ...$

$\text{sh } x = x + x^3/3! + x^5/5! + x^7/7! + ...$ $\text{ch } x = 1 + x^2/2! + x^4/4! + x^6/6! + ...$

$\mathbf{1/(1-x) = 1 + x + x^2 + ... + x^n + o(x^n)}$

Si f a un dl en 0 à l'ordre n, et f définie en 0, alors f continue en 0. $f(0) = a_0$. [ ~demo ]

Si f a un dl en 0 à l'ordre 1, et f définie en 0, alors f dérivable en 0. $f'(0) = a_1$.

Contrexemple pour l'ordre 2 : $x \to x^3 \sin(1/x)$

$\mathbf{(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1) x^2/2! + ... + \alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1) x^n / n! + o(x^n)}$ [ demo Taylor–Young ]

<u>Intégration</u> : Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, $0 \in I$, $f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + o(x^n)$. $F \in \int f(x)dx$.

Alors $F(x) = F(0) + a_0 x + a_1 x^2/2 + ... + a_n x^{n+1}/(n+1) + o(x^{n+1})$ [ demo facile ]

Exemples : $\ln(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 + ... + (-1)^n x^n/n + o(x^n)$

$\text{Arcsin } x = x + x^3/6 + ... + (2n)!\, x^{2n} / (2^n n!)^2 + o(x^{2n+1})$

$\text{Arctan } x = x - x^3/3 + x^5/5 + ... + (-1)^n x^{2n} / (2n+1) + o(x^{2n+1})$

<u>Dérivation</u> : Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, dérivable sur I, $f(x) = P(x) + o(x^n)$ ; $d°P \leq n$ ; $f'(x) = Q(x) + o(x^{n-1})$ ; $d°Q \leq n-1$.

Alors $Q = P'$ [ demo très rapide ] Exemple : $1/(1+x)^2$

## 3 – Opérations sur les développements limités

Soit f et $g \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, $f(x) = P(x) + o(x^n)$ ; $d°P \leq n$ ; $g(x) = Q(x) + o(x^n)$ ; $d°Q \leq n$.

$f(x) + g(x) = P(x) + Q(x) + o(x^n)$ [ ~demo ] Exemple : $½ \ln |(1+x)/(1-x)|$

$f(x)\,g(x) = R(x) + o(x^n)$ où $R(x)$ est le polynôme obtenu en ne conservant dans le produit $P(x)Q(x)$ que des termes de degré inférieur à n. [ ~demo ] Exemple : $e^x \sin x$

## 4 – Composition des développement limités

$f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{F}(J, \mathbb{R})$, $g(J) \subset I$, $\lim_{x \to 0} g(x) = 0$, $f(x) = a_0 + \ldots + a_n x^n + o(x^n)$, $g(x) = b_1 x + \ldots + b_n x^n + o(x^n)$
Alors $f \circ g$ admet un développement limité en 0 à l'ordre n [ ~demo ] Exemple : $e^{\sin x}$
Elevation à une puissance : on se ramène à $(1+u(x))^a$. Cas particulier : l'inverse d'une fonction.
Exemple : $\tan = x + x^3/3 + 2\,x^5/15 + o(x^5)$
$\ln(h(x))$ ; $h(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + o(x^n)$, $a_0 > 0$. $\ln(h(x)) = \ln(a_0) + \ln(1+h(x))$ ; $e^{h(x)}$ : de même
Fonction réciproque : Soit $f \in \mathcal{F}(I, J)$ ayant un dl en 0 à l'ordre n, et réalisant une bijection entre I et J. Alors $f^{-1}$ admet un dl en 0 à l'ordre n. ( on écrit $f^{-1} \circ f = x$ ) Exemple : $\tan = \mathrm{Arctan}^{-1}$.

# III Applications

## 1 – Etude locale d'une fonction

A partir d'un dl de f en $x_0$, on peut déterminer l'équation de la tangente à la courbe en $x_0$, et sa position par rapport à la courbe de f.

## 2 – Partie principale d'une somme d'infiniments petits/grands

Ex : $2\,(1-\cos x)\sin x - x^3 \,.\, \sqrt[4]{(1-x^2)} \underset{0}{\sim} 19\,x^7/160$ [ calculs ordre 7 ]
Ex : $\sqrt{(x^2 + x + 1)} - \sqrt[3]{(x^3 + px^2 + q)} \underset{+\infty}{\sim} 35 / 8\,x$ [ calculs ordre 3 ]

## 3 – Formes indéterminées

Ex : $\dfrac{\sin\dfrac{x}{1-x} - \dfrac{\sin x}{1-\sin x}}{\sin^4 x} \xrightarrow[x\to 0]{} -\dfrac{1}{6}$ [ calculs ordre 4 ]

## 4 – Branches infinies

Ex : $f(x) = x^2 \,\mathrm{Arctan}\,(1/(1+x))$ [ calculs ordre 3 en $+\infty$ ; étude de la fonction ]

# IV Développements limités à connaître

Développements limités à l'ordre 6, pour $x \to 0$.

$\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + O(x^6)$.

$(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha\, x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6} x^3 + \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{24} x^4 + O(x^5)$ avec $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$

$\ln(1 + x) = x - \dfrac{1}{2} x^2 + \dfrac{1}{3} x^3 - \dfrac{1}{4} x^4 + \dfrac{1}{5} x^5 + O(x^6)$.

$\mathrm{Arctan}\, x = x - \dfrac{1}{3} x^3 + \dfrac{1}{5} x^5 + O(x^7)$.

$\mathrm{Arcsin}\, x = x + \dfrac{1}{6} x^3 + \dfrac{3}{40} x^5 + O(x^7)$.

$e^x = 1 + x + \dfrac{1}{2} x^2 + \dfrac{1}{6} x^3 + \dfrac{1}{24} x^4 - \dfrac{1}{120} x^5 + O(x^6)$.

$\sin x = x - \dfrac{1}{6} x^3 + \dfrac{1}{120} x^5 + O(x^7)$.

$\mathrm{sh}\, x = x + \dfrac{1}{6} x^3 + \dfrac{1}{120} x^5 + O(x^7)$.

$\cos x = 1 - \dfrac{1}{2} x^2 + \dfrac{1}{24} x^4 + O(x^6)$.

$\mathrm{ch}\, x = 1 + \dfrac{1}{2} x^2 + \dfrac{1}{24} x^4 + O(x^6)$.

$\tan x = x + \dfrac{1}{3} x^3 + \dfrac{2}{15} x^5 + O(x^7)$.

# V Développements asymptotiques

Ex : Comportement de cotan(x). cotan(x) $\underset{0}{=} \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + o(x^3)$. [ cos/sin ]

Quotient de 2 d.l. dans le cas général : factoriser ce qui gène, et poser h = 1/x pour se ramener en 0.

Branches infinies : $x^2 \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{1+x}\right) \underset{+\infty}{=} x - 1 + \frac{2}{3}x + o\left(\frac{1}{x}\right)$

Echelle de comparaison = famille $(\varphi_k)_{k \in K}$ de fonctions définies sur I,

$\forall (k, k') \in K^2$, $k \neq k' \Rightarrow \varphi_k = o(\varphi_{k'})$ ou $\varphi_{k'} = o(\varphi_k)$

et $\exists k'' \in K, \varphi_k . \varphi_{k'} = \varphi_{k''}$. Ex : $(Id^n)_{n \in \mathbb{Z}}$.

$f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ admet un développement asymptotique dans l'échelle de comparaison $(\varphi_k)_{k \in K}$ si

$\exists (a_{k_1}, a_{k_2}, ..., a_{k_n}) \in \mathbb{R}^n$, $f - \sum a_{k_j} \varphi_{k_j}$ soit négligeable devant $\varphi_{k_1}, \varphi_{k_2}, ..., \varphi_{k_n}$.

Exemple : résolution de x sin x = 1 dans $\mathbb{R}_+$ ( dev. asym. de la suite définie comme l'ensemble des solutions )

# 13 – Polynômes

## I Définition – Structure

### 1 – Anneau des polynômes à une indéterminée sur un corps

Soit **K** un corps commutatif.
Un polynôme à une indéterminée sur le corps **K** est une suite à éléments de **K** presque tous nuls. Donc $\mathbf{K}[X] \subset \mathbf{K}^{\mathbb{N}}$.

- Définition de l'égalité de 2 polynômes. Notation : **K**[X] est l'ensemble des polynômes à une indéterminée sur **K**.
- Addition de 2 polynômes. **K**[X] est un groupe additif abélien (sous–groupe de $\mathbf{K}^{\mathbb{N}}$) [ demo rapide ]
- Définition de la multiplication : $\forall P = (a_i) \in \mathbf{K}[X], \forall Q = (b_i) \in \mathbf{K}[X], PQ = (c_i)$ où $c_i = \sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j}$
- **K**[X] est stable pour la multiplication [ ~demo ]
- $P = (a_i) \in \mathbf{K}[X]$ est un monôme si $\exists n \in \mathbb{N}, a_n \neq 0$ et $\forall i \in \mathbb{N} \setminus \{ n \}, a_i = 0$.
- $\forall P \in \mathbf{K}[X]$, P est une somme de monômes. [ ~d ] Produit de monômes. [ ~d ]
- Associativité pour les produits de monômes [ ~d ]
- $(\mathbf{K}[X], +, \times)$ est un anneau commutatif intègre [ demo : $\times$ commutative, distributive par rapport à +, associative, neutre, intégrité ]
- Plongement de **K** dans **K**[X] : création d'un morphisme injectif d'anneau de **K** vers **K**[X].

### 2 – Algèbre des polynômes à une indéterminée sur un corps

Définition de la loi externe. On retrouve les 4 propriétés.
**K**[X] est une **K** – algèbre commutative.
On note $X = (\delta_{i\,1})_{i \in \mathbb{N}}$. $\forall n \in \mathbb{N}, X^n = (\delta_{i\,n})_{i \in \mathbb{N}}$. [ demo récurrence ]
La famille $(X^i)_{i \in \mathbb{N}}$. est une base de **K**[X]. [ demo rapide : génératrice, libre ]
Notations : $P = \Sigma\, a_i X^i$ ; $P = \Sigma\, b_i X^i$ ; On a alors $PQ = \Sigma\, a_i b_j X^{i+j}$.

### 3 – Degré et valuation d'un polynôme

Soit $P = \Sigma\, a_i X^i \in \mathbf{K}[X]$. Si $P \neq 0$, $d°P = \text{Max}\{ i \in \mathbb{N}, a_i \neq 0 \}$ et $\text{val}(P) = \text{Min}\{ i \in \mathbb{N}, a_i \neq 0 \}$
Par convention, $d°(0) = -\infty$ et $\text{val}(0) = +\infty$

$\forall (P, Q) \in \mathbf{K}[X]^2$,
$d°(PQ) = d°P + d°Q$ $\quad$ $\text{val}(PQ) = \text{val}(P) + \text{val}(Q)$
$d°(P+Q) \leq \text{Max}\{d°P, d°Q\}$ $\quad$ $d°P \neq d°Q \Rightarrow d°(P+Q) = \text{Max}\{d°P, d°Q\}$
$\text{val}(P+Q) \geq \text{Min}\{\text{val}(P), \text{val}(Q)\}$ $\quad$ $\text{val}(P) \neq \text{val}(Q) \Rightarrow \text{val}(P+Q) = \text{Min}\{\text{val}(P), \text{val}(Q)\}$

[ demo : Si $P \neq 0$ et $Q \neq 0$, alors ... pipo ... ]

Les éléments inversibles de **K**[X] sont les éléments de $\mathbf{K}^*$. [ demo facile ] $\Rightarrow$ **K**[X] n'est pas un corps.
Le coefficient dominant d'un polynôme P est le terme d°P de la suite P.
<u>Etude de $\mathbf{K}_n[X] = \{ P \in \mathbf{K}[X], d°P \leq n \}$</u>
$\mathbf{K}_n[X]$ est un **K** – espace vectoriel de dimension n+1. $\quad$ $\mathbf{K}_n[X] = \text{Vect}\{ X^i, 0 \leq i \leq n \}$
Toute famille de n+1 polynômes $(P_i)_{0 \leq i \leq n}$ tels que $d°(P_i) = i$ constitue une base de $\mathbf{K}_n[X]$. [ ~demo ]
C'est une famille de polynômes étagée.

### 4 – Fonction polynôme

Composition des polynômes : $\forall P = \Sigma\, a_i X^i \in \mathbf{K}[X], \forall Q \in \mathbf{K}[X]$, on définit $\quad P \circ Q = \Sigma\, a_i Q^i$
$\forall (P_1, P_2, Q) \in \mathbf{K}[X], \forall \lambda \in \mathbf{K}$,
$(P_1 + P_2) \circ Q = P_1 \circ Q + P_2 \circ Q$
$(P_1 P_2) \circ Q = (P_1 \circ Q)\,(P_2 \circ Q)$ $\quad$ [ demo facile ]
$(\lambda P_1) \circ Q = \lambda\,(P_1 \circ Q)$

Utilisation d'une partition de $\mathbb{N}^2$ : $(\mathbb{N}_k^2)_{k \in \mathbb{N}}$, où $\mathbb{N}_k^2 = \{ (i, j) \in \mathbb{N}^2, i + j = k \}$
Notation : $P \circ Q = P(Q)$ ; $P = P \circ X = P(X)$
La fonction polynôme associée à $P \in \mathbf{K}[X]$ est l'application $\mathbf{K} \to \mathbf{K}$, $x \to P \circ x$, notée $\hat{P}$.
L'application $\Phi : \mathbf{K}[X] \to \mathbf{K}^{\mathbf{K}}$, $P \to \hat{P}$ est un morphisme d'algèbre [ demo rapide ]
$\Phi$ n'est pas toujours injective. Dans $\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$, $\Phi(X^2 + X) = 0$ donc $\text{Ker}\, \Phi \neq \{ 0 \}$.
<u>Algorithme de Hörner</u> $\quad$ Optimisation pour le calcul de $P(x) = \Sigma\, a_i x^i$ $\quad$ [ vague demo ]

```
y ← aₙ ;  pour i allant de n – 1 à 0 faire y ← aᵢ + y x ; fin pour ; renvoyer y ;
```

Alors qu'à l'origine, le calcul nécessite $O(n^2)$, ici, il ne faut que $O(n)$.

# II Arithmétique de K[X]

## 1 – Multiples et diviseurs

$\forall$ (A, B) $\in$ $\mathbf{K}[X]^2$, B | A signifie $\exists$ Q $\in$ $\mathbf{K}$[X], A = BQ C'est une relation réflexive et transitive.
$\forall$ (A, B) $\in$ $\mathbf{K}[X]^2$, A | B et B | A $\Leftrightarrow$ $\exists$ $\lambda \in \mathbf{K}^*$, A = $\lambda$ B. A et B sont dits associés. [ demo facile ]
Notation : $\forall$ A $\in$ $\mathbf{K}$[X], (A) = { AP, P $\in$ $\mathbf{K}$[X] }
$\forall$ A $\in$ $\mathbf{K}$[X], (A) est un idéal de $\mathbf{K}$[X], c'est-à-dire : c'est un groupe additif, et $\forall$ B $\in$ (A), $\forall$ C $\in$ $\mathbf{K}$[X], BC $\in$ (A).
$\forall$ (A, B) $\in$ $\mathbf{K}[X]^2$, B | A $\Leftrightarrow$ (A) $\subset$ (B) $\Leftrightarrow$ A $\in$ (B)
$\forall$ $(A_1, ..., A_n) \in \mathbf{K}^n[X]$, $\forall$ B $\in$ $\mathbf{K}$[X], $\forall$ $(U_1, ..., U_n) \in \mathbf{K}^n[X]$, ($\forall$ $i \in \mathbb{N}_n$, B | $A_i$ ) $\Rightarrow$ B | $\Sigma\, U_i A_i$. [ ~d ]
$\forall$ $(A_1, A_2, B) \in \mathbf{K}^3[X]$, $A_1 \equiv A_2$ [ B ] signifie B | $A_2 - A_1$. C'est une relation d'équivalence compatible avec $\times$ et +.

## 2 – Division euclidienne

$\forall$ (A, B) $\in$ $\mathbf{K}[X] \times \mathbf{K}[X] \setminus \{ 0 \}$, $\exists\,!$ (Q, R) $\in$ $\mathbf{K}^2[X]$, A = BQ + R et d°R < d°B.
[ DEMO : Existence avec algorithme pour diminuer le degré de A, Unicité ]
Exemple : $X^5 - X^3 + X - 2 = (X^2 + 1)(X^3 - 2X) + 3X + 2$
R est le représentant de la classe d'équivalence de A vis–à–vis de la congruence modulo B dont le degré est minimal.
$\forall$ $(A_1, ..., A_n) \in \mathbf{K}^n[X]$, $\forall$ $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbf{K}^n$, $\forall$ B $\in$ $\mathbf{K}[X] \setminus \{ 0 \}$, $\forall$ $i \in \mathbb{N}_n$, $\exists$ $(Q_i, R_i) \in \mathbf{K}^2[X]$, $A_i = BQ_i + R_i$,
$\Sigma\, \lambda_i A_i = B\, \Sigma\, \lambda_i Q_i + \Sigma\, \lambda_i R_i$, avec d°($\Sigma\, \lambda_i R_i$) < d°B, et $\Pi\, A_i \equiv \Pi\, R_i$ [ B ]
Cas particulier : A = (X – a)Q + R ; $\widehat{A}(a)$ = R. On a alors X – a | A $\Leftrightarrow$ $\widehat{A}(a) = 0$ : a est une racine de A.

## 3 – PCGD

$\forall$ $(A_1, ..., A_n) \in (\mathbf{K}[X] \setminus \{0\})^n$, $\exists$ D $\in$ $\mathbf{K}[X] \setminus \{0\}$, tel que l'ensemble des diviseurs communs à $A_1, ..., A_n$ soit l'ensemble des diviseurs de D. Parmi les possibles polynômes D, il n'en existe qu'un seul unitaire. C'est leur pcgd.
[ DEMO : On considère I = { $\Sigma\, U_i A_i$, $(U_1, ..., U_n) \in \mathbf{K}^n[X]$ }, et on choisit un polynôme D de degré minimal dans I ; on montre que I = (D), et que tout diviseur commun à $A_1, ..., A_n$ divise D ; Unicité : $D_1$ et $D_2$ sont associés ]
Notation : $A \wedge B$ Remarque : $A \wedge 0$ est le polynôme unitaire associé à A.

## 4 – PPCM

$\forall$ $(A_1, ..., A_n) \in (\mathbf{K}[X] \setminus \{0\})^n$, $\exists$ M $\in$ $\mathbf{K}[X] \setminus \{0\}$, tel que l'ensemble des multiples communs à $A_1, ..., A_n$ soit l'ensemble des multiples de M. Parmi les possibles polynômes M, il n'en existe qu'un seul unitaire. C'est leur ppcm.
[ ~demo : I = $\cap$ ($A_i$) est un idéal ; on prend pour M le polynôme de I de d° min ... comme le pgcd ] Notation : $A \vee B$

## 5 – Algorithme d'Euclide

$\forall$ (A, B) $\in$ $\mathbf{K}[X] \times \mathbf{K}[X] \setminus \{ 0 \}$, A = BQ + R avec d°R < d°B. Alors $A \wedge B = B \wedge R$. [ double division ]
[ demo : $A = BQ_0 + R_0$ ; $B = R_0 Q_1 + R_1$ ; $R_0 = R_1 Q_2 + R_2$ : divisions euclidiennes... ]
$\wedge$ et $\vee$ sont des lois associatives.

## 6 – Polynômes premiers entre eux

$\forall$ $(A_1, A_2, ..., A_n) \in \mathbf{K}^n[X]$, $A_1, ..., A_n$ sont dits premiers entre eux dans leur ensemble lorsque leurs diviseurs communs sont les éléments de $\mathbf{K}^*$ (les éléments inversibles de $\mathbf{K}$[X]). Leur pgcd est 1.
Théorème de Bezout : $\forall$ $(A_1, ..., A_n) \in \mathbf{K}^n[X]$, $A_1 \wedge ... \wedge A_n = 1 \Leftrightarrow \exists$ $(U_1, ..., U_n) \in \mathbf{K}^n[X]$, $\Sigma\, U_i A_i = 1$
Théorème de Gauss : $\forall$ (A, B, C) $\in$ $\mathbf{K}^3[X]$, ( A | BC et $A \wedge B = 1$ ) $\Rightarrow$ A | C
$\forall$ (A, B) $\in$ $\mathbf{K}^2[X]$, AB et $(A \wedge B)(A \vee B)$ sont associés

## 7 – Polynômes irréductibles

P $\in$ $\mathbf{K}[X] \setminus \mathbf{K}$ est irréductible si ses diviseurs sont les polynômes constants non nuls et les polynômes associés à P.
$\forall$ P $\in$ $\mathbf{K}$[X], d°P = 1 $\Rightarrow$ P irréductible [ ~d ]
Si $\mathbf{K} \subset \mathbf{L}$, alors $\mathbf{K}[X] \subset \mathbf{L}[X]$. Un polynôme irréductible dans $\mathbf{K}$[X] n'est pas forcément irréductible dans $\mathbf{L}$[X].
Ex : $X^2 + 1$ dans $\mathbb{R}$[X] et $\mathbb{C}$[X].
Soit P $\in$ $\mathbf{K}[X] \setminus \mathbf{K}$ . $\exists\,!$ $\lambda \in \mathbf{K}$, $\exists$ $n \in \mathbb{N}$, $\exists$ $(P_1, ..., P_n) \in \mathbf{K}^n[X]$ irréductibles, unitaires et 2 à 2 dictincts,
$\exists$ $(k_1, ..., k_n) \in \mathbb{N}^{*\,n}$, $P = \lambda\, \Pi\, P_j^{k_j}$, l'unicité est vraie à l'ordre près des facteurs.
[ DEMO : existence par récurrence forte ; unicité ]
Utilisation pour déterminer le PCGD ou le PPCM de deux polynômes.

# III Dérivation et racines

On se place dans le cas où **K** est un sous–corps de $\mathbb{C}$.

## 1 – Polynôme dérivé

$\forall$ P $\in$ **K**[X], $P = \Sigma\, a_i X^i$, on note $P' = \Sigma\, i\, a_i X^{i-1} = \Sigma\, (j+1)\, a_{j+1} X^j$.
$\forall$ P $\in$ **K**[X], $P' = 0 \Leftrightarrow P \in$ **K**.
$\forall$ P $\in$ **K**[X] \ K, $d°P' = d°P - 1$ ( Dans $\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}[X]$, $P = X + X^2$ a pour dérivé 1 )
Définition des polynômes dérivés successifs par récurrence.
L'application $P \to P'$ est linéaire. [ demo rapide ]
$(PQ)' = P'Q + PQ'$. [ ~demo pour des monômes unitaires puis généralisation ]
$(P \circ Q)' = (P' \circ Q)\, Q'$ [ ~demo pour des monômes ]
L'application $P \to P^{(n)}$ est linéaire. Fomule de Leibniz : $(PQ)^{(n)} = \Sigma\, C_n^k P^{(k)} Q^{(n-k)}$.

## 2 – Formule de Taylor

Soit P $\in$ **K**[X] et a $\in$ **K**. $d°P = n \geq 0$. On a [ DEMO : $((X-a)^k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbf{K}_n[X]$ ... ]

$$P = \sum_{k=0}^{n} \hat{P}^{(n)}(a) \frac{(X-a)^k}{k!}$$

Autre version : $$P(X+a) = \sum_{k=0}^{n} \hat{P}^{(n)}(a) \frac{X^k}{k!}$$

## 3 – Fonction polynôme et dérivée

Ici, le corps est $\mathbb{R}$. Alors $\hat{P}' = \widehat{P'}$.

## 4 – Racines d'un polynôme

Soit P $\in$ **K**[X]. a $\in$ **K** est racine de P $\Leftrightarrow \Phi(P)(a) = 0 \Leftrightarrow X - a \mid P$
a $\in$ **K** est racine de P d'ordre de multiplicité p $\Leftrightarrow (X-a)^p \mid P$ et $\neg\, (X-a)^{p+1} \mid P$
$\Leftrightarrow P = (X-a)^p\, Q$ et $\hat{Q}(a) \neq 0$
$\Leftrightarrow \hat{P}(a) = 0$ et a racine de P ' d'ordre p – 1 [ demo ]
$\Leftrightarrow \hat{P}(a) = ... = \widehat{P^{(p-1)}}(a) = 0$ et $\widehat{P^{(p)}}(a) \neq 0$

## 5 – Polynômes et fonctions polynômes

Si a est racine de P d'ordre p, alors $p \leq d°P$ et donc $P \neq 0$.
$a \neq b \Rightarrow (X-a) \wedge (X-b) = 1$ [ ~d ]
Un polynôme non nul ne peut avoir plus de racines que son degré.
Si **K** est infini, alors $\Phi$ est injective.

# IV Etude de $\mathbb{R}$[X] et de $\mathbb{C}$[X]

## 1 – Corps algébriquement clos

P $\in$ **K**[X] \ **K** est <u>scindé</u> sur **K** si $\exists\, \lambda \in \mathbf{K}^*$, $\exists\, (a_1, ..., a_p) \in \mathbf{K}^p[X]$, $\exists\, (\alpha_1, ..., \alpha_p) \in \mathbb{N}^p$, $P = \Pi\, (X - a_j)^{\alpha_j}$.
Ces 3 propositions sont équivalentes :

1. $\forall$ P $\in$ **K**[X] \ **K**, P est scindé.
2. $\forall$ P $\in$ **K**[X] \ **K**, $\exists$ a $\in$ **K**, $\hat{P}(a) = 0$. [ demo : $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$ ]
3. $\forall$ P $\in$ **K**[X] \ **K**, $d°P = 1 \Leftrightarrow$ P est irréductible

Un tel corps est dit algébriquement clos.

## 2 – Etude de $\mathbb{C}$[X]

<u>Théorème fondamental de l'algèbre</u> (ou théorème de d'Alembert – Gauss) : $\mathbb{C}$ est algébriquement clos. [ TD ]

## 3 – Etude de $\mathbb{R}$[X]

On définit l'application : $\mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}[X]$, $A \to \bar{A}$. C'est un endomorphisme d'algèbre. [ ~demo ]
$\forall$ A $\in$ $\mathbb{C}$[X], A $\in$ $\mathbb{R}$[X] $\Leftrightarrow$ A $= \bar{A}$.
Si a $\in$ $\mathbb{C}$ est racine de A d'ordre, $\bar{a}$ est racine de $\bar{A}$ d'ordre k. [ ~demo ]
$\forall$ P $\in$ $\mathbb{R}$[X] \ $\mathbb{R}$, P est scindé sur $\mathbb{C}$. Si b $\in$ $\mathbb{C}$ \ $\mathbb{R}$ est racine de P d'ordre k, alors $\bar{b}$ l'est aussi.

Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont donc de 2 types :

- Les polynômes de degré 1
- Les polynômes de degré 2 avec des racines complexes conjuguées

Tout polynôme de degré $\geq 2$ est donc réductible.
Ex : $X^4 + X^2 + 1 = (X^2 + 1)^2 - X^2 = (X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1)$ (+ autre méthode plus générale)

### 4 – Divisibilité et racines

Soient $(P, Q) \in \mathbf{K}^2[X]$. $P \mid Q \Rightarrow \forall a$ racine de P d'ordre k, a est racine de Q d'ordre $\geq k$.
Réciproque : Fausse dans le cas général (ex : $(X^2 + 1)(X - 1)$ et $(X^2 + 2)(X - 1)$)
Si $\mathbf{K}$ est algébriquement clos, elle est vraie :
$\forall (P, Q) \in \mathbf{K}^2[X], P \mid Q \Leftrightarrow \forall a$ racine de P d'ordre k, a est racine de Q d'ordre $\geq k$
[ EXOS 17 ] $\forall \mathbf{K}$ corps, $\exists \widehat{\mathbf{K}}$ corps appelé clôture algébrique de $\mathbf{K}$, $\mathbf{K} \subset \widehat{\mathbf{K}}$, $\forall P \in \mathbf{K}[X]$, P est scindé dans $\widehat{\mathbf{K}}[X]$.
$\rightarrow$ Nouvelle construction de $\mathbb{C}$. $P = X^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]$. On note $\mathbb{C} = \mathbb{R}[X]/(P)$. $\bar{X}$ est noté i.

## V Equations algébriques

### 1 – Définition, Racines

<u>Equation algébrique</u> = équation de la forme $\hat{P}(x) = 0$, où $P \in \mathbb{C}[X]$ et $x \in \mathbb{C}$.
Si $d°P = n \geq 1$, $P(x) = 0$ (notation simplifiée) a n racines, comptées avec leurs ordres de multiplicité.

### 2 – Relations entre racines et coefficients d'une équation algébrique

Etude rapide des cas où $d°P = 2$ et $d°P = 3$.
Soient $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + ... + a_nX^n \in \mathbb{C}[X]$, où $d°P = n \geq 1$, et $x_1, ..., x_n$ : les n racines de P.

En notant $\sigma_k = \sum_{1 \leq i_1 < ... < i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} ... x_{i_k}$, (appelées <u>fonctions symétriques élémentaires</u> des racines de l'équation),
on a $\forall k \in \mathbb{N}_n$, $\sigma_k = (-1)^k a_{n-k} / a_n$. [ DEMO par récurrence sur $n = d°P$ – utilisation de D'Alembert–Gauss ]
$\sigma_1 = \Sigma x_i$ $\sigma_n = \Pi x_i$.

### 3 – Fonctions symétriques des racines d'une équation algébrique

Soit $Q(x_1, ..., x_n)$ une expression polynômiale en $x_1, ..., x_n$ symétrique (inchangée si on réalise une permutation de $x_i$ avec $x_j$) alors il existe une autre expression polynômiale R, telle que $Q(x_1, ..., x_n) = R(\sigma_1, ..., \sigma_n)$
**VERIFICATION :**

| | | | |
|---|---|---|---|
| $d°P = 2$ | $S_p = x_1^p + x_2^p$ [ récurrence ] | $x_1^p x_2^p$ | $x_1^q x_2^p + x_1^p x_2^q$ |
| $d°P = 3$ | $S_p = x_1^p + x_2^p + x_3^p$ [ récur. ] | $T_p = \Sigma x_1^p x_2^p$ [ $S_p^2 = ...$ ] | |
| | $T_{p,q} = \Sigma x_1^p x_2^q$ . [ $S_pS_q = ...$ ] | $\Sigma x_1^p x_2^q x_3^r$ [ factorisation ] | |

Notation : Somme indéterminée $\Sigma$ A = somme de tous les termes contenant A et les autres impliqués par la symétrie.
On a : $(\Sigma x_1)^2 = \Sigma x_1^2 + 2 \Sigma x_1 x_2$. $(\Sigma x_1)^3 = \Sigma x_1^3 + 3 \Sigma x_1^2 x_2 + 6 \Sigma x_1 x_2 x_3$.
Exemples : Si $x_1, x_2, x_3, x_4$ sont les 4 racines de $X^4 - X^2 + X - 2$, calculer $S = \Sigma x_1^2 x_2^3 x_3$. (dur)
Si $x_1, x_2, x_3$ sont les racines de $X^3 - 6X^2 + 11X + \lambda$, trouver $\lambda$ pour que $x_1 - x_2 = 2$. $(\lambda = -6)$
Si $x_1, x_2, x_3, x_4$ sont les 4 racines de $X^4 - X^2 + 2X - 1$, calculer $S = \Sigma x_1^3 x_2^2$. $(S = -2)$
<u>Applications</u> :

- Factorisation de $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ de 2 manières (Racines 5$^{ièmes}$ de l'unité, et changement de variable $y = x + 1/x$), qui permet de déduire que $\cos(2\pi/5) = (\sqrt{5} - 1)/4 \Rightarrow$ Construction d'un pentagone régulier.
- <u>Résolution de l'équation de degré trois</u> : $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, $a \neq 0$.
  On se ramène par translation à une équation de la forme $x^3 + px + q = 0$.
  En appelant $x_1, x_2, x_3$ ses racines, les nombres $\theta_1 = (x_1 + jx_2 + j^2x_3)^3$ et $\theta_2 = (x_1 + j^2x_2 + jx_3)^3$ sont tels que $\theta_1 + \theta_2$ et $\theta_1\theta_2$ sont des expressions symétriques de $(x_1, x_2, x_3)$. On les exprime en fonction de p et de q :
  $\theta_1\theta_2 = -27p^3$ $\theta_1 + \theta_2 = -27q$
  $\theta_1$ et $\theta_2$ sont donc les racines de $t^2 + 27qt - 27p^3 = 0 \Rightarrow$ on peut les calculer.
  On détermine $\mu_1$ et $\mu_2$ des racines cubiques de $\theta_1$ et de $\theta_2$. On a alors un système linéaire de 3 équations en $x_i$.
  D'où : $x_1 = (\mu_1 + \mu_2)/3$ $x_2 = (j^2\mu_1 + j\mu_2)/3$ $x_3 = (j^2\mu_1 + j\mu_2)/3$ (Formules de Cardan)
- Pour la résolution dans $\mathbb{R}$ : $\boxed{\Delta = 4p^3 + 27q^2}$.
  Si $\Delta > 0$, il n'existe qu'une racine réelle : $(\sqrt[3]{\theta_1} + \sqrt[3]{\theta_2})/3$ ; les 2 autres sont complexes conjuguées.
  Si $\Delta = 0$, il existe 3 racines réelles, dont 2 sont confondues.
  Si $\Delta < 0$, il existe 3 racines réelles. (on choisit pour $\mu_2$ le conjugué de $\mu_1$).

- Trisection de l'angle : $\cos(3\varphi) = 4\cos^3(\varphi) - 3\cos(\varphi)$. Pour résoudre $x^3 + px + q = 0$ où $\Delta < 0$, on se ramène par homothétie à une équation de la forme $x^3 - 3x/4 = a/4$ ; Si $|a| \le 1$, on écrit $a = \cos(3\varphi)$. On a donc 3 solutions, $\cos(\varphi)$, $\cos(\varphi + 2\pi/3)$, et $\cos(\varphi + 4\pi/3)$. Exemple : $x^3 - 3x + 1 = 0$.

  Les solutions de $x^3 + px + q = 0$ sont donc $\left\{ \sqrt{\frac{-4p}{3}} \cos\left(\frac{1}{3}\operatorname{Arccos}\left(-4q\left(\frac{-3}{4p}\right)^{\frac{3}{2}}\right) + \frac{2k\pi}{3}\right) \;/\; k \in \{0, 1, 2\} \right\}$

# VI Fractions rationnelles

**K** est un corps commutatif

## 1 – Corps des fractions à une indéterminée sur K

Construction : Dans $\mathbf{K}[X] \times \mathbf{K}^*[X]$, on définit une addition, une multiplication, une relation :

$(A, B) \times (C, D) = (AC, BD)$ $\quad$ $(A, B) + (C, D) = (AD + BC, BD)$ $\quad$ $(A, B)\ \Re\ (C, D) \Leftrightarrow AD = BC$

On démontre que $\times$ est associative, commutative, possède un neutre $(1, 1)$, et est distributive par rapport à + ; la loi + est associative, commutative, possède un neutre $(0, 1)$ ; $\Re$ est une relation d'équivalence compatible avec + et $\times$.

Dans $\mathbf{K}[X] \times \mathbf{K}^*[X]/\Re$, on étend l'addition et la multiplication. On crée un morphisme surjectif de $\mathbf{K}[X] \times \mathbf{K}^*[X]$ vers $\mathbf{K}[X] \times \mathbf{K}^*[X]/\Re$ (qui associe la classe d'équivalence). On définit un opposé, un inverse. $\mathbf{K}[X] \times \mathbf{K}^*[X]/\Re$ est un corps commutatif. Notation : $\mathbf{K}[X] \times \mathbf{K}^*[X]/\Re = \mathbf{K}(X)$. Plongement de $\mathbf{K}[X]$ dans $\mathbf{K}(X)$.

Propriétés : $\forall P \in \mathbf{K}(X), \exists!\ (A, B) \in \mathbf{K}[X] \times \mathbf{K}[X] \setminus \{0\}$, $A \wedge B = 1$ et B unitaire, $F = A/B$. [ ~d Gauss ]

$\mathbf{K}(X)$ est un **K**–espace vectoriel car **K** est un sous–corps de $\mathbf{K}(X)$ : $\mathbf{K} \subset \mathbf{K}[X] \subset \mathbf{K}(X)$.

Degré : Si $F = A/B$, $d°F = d°A - d°B$ [ indep représentant ] ; $d°(F_1F_2) = d°F_1 + d°F_2$ ; $d°(F_1 + F_2) \le \operatorname{Max}\{d°F_1, d°F_2\}$

Racines et pôles : Si $F = A/B$, $A \wedge B = 1$, a est racine de F d'ordre $\alpha$ si a est racine de A d'ordre $\alpha$.

a est pôle de F d'ordre $\alpha$ si a est racine de B d'ordre $\alpha$. [ dépend de **K** ]

Dérivation : Si $F = A/B$, on définit $F' = (A'B - AB')/B^2$ [ indep représentant ]. L'application $F \to F'$ est linéaire.

$\forall (F, G) \in \mathbf{K}^2(X)$, $(FG)' = F'G + FG'$. Définition des dérivées successives par récurrence. Formule de Leibniz.

Rem : Soit $P \in \mathbf{K}[X]$. Alors $\left(\frac{aP + b}{cP + d}\right)' = \frac{ad - bc}{(cP + d)^2} P'$

Pôles de la dérivée : a est pôle d'ordre $\alpha$ de $F = A/B \Rightarrow$ a est pôle de F' d'ordre $\alpha+1$ ; a pôle de F' $\Rightarrow$ pôle de F. [ ~d ]

Fonction rationnelle : L'application $\Phi : F \in \mathbf{K}(X) \to \hat{F} \in \mathcal{F}(\mathbf{K} \setminus \{\text{pôles}\}, \mathbf{K})$ est injective si **K** est infini.

## 2 – Décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples

$\forall F = A/B \in \mathbf{K}(X) \setminus \mathbf{K}[X], \exists!\ (E, R) \in \mathbf{K}^2[X]$, $F = E + R/B$ et $d°R < d°B$. E est la partie entière de F. [~d]

Si $F = A/B \in \mathbf{K}(X) \setminus \mathbf{K}[X]$, $d°F < 0$, $B = B_1 B_2$ où $B_1 \wedge B_2 = 1$, alors $\exists!\ (A_1, A_2) \in \mathbf{K}^2[X]$, $F = A_1/B_1 + A_2/B_2$, où $d°A_1 < d°B_1$ et $d°A_2 < d°B_2$. [ demo existence : Bezout ; unicité ]

Si en plus, $A \wedge B = 1$, alors $A_1 \neq 0$, $A_2 \neq 0$, et $A_1 \wedge B_1 = A_2 \wedge B_2 = 1$.

Généralisation : Si $F = A/B = A/(B_1 B_2 \ldots B_n)$ où $B_1, \ldots, B_n$ sont premiers entre eux 2 à 2 et $d°F < 0$, alors $\exists!\ (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{K}^n[X]$, $F = \Sigma A_j / B_j$ et $\forall j \in \mathbb{N}_n$, $d°A_j < d°B_j$.

Si en plus, $A \wedge B = 1$, alors $\forall j \in \mathbb{N}_n$, $A_j \wedge B_j = 1$. [ ~demo par récurrence sur n ]

Si $F = A/B \in \mathbf{K}(X) \setminus \mathbf{K}[X]$, $d°F < 0$, $B = C^n$ alors $\exists!\ (A_0, \ldots, A_{n-1}) \in \mathbf{K}^n[X]$,

$F = A_{n-1}/C + \ldots + A_0/C^n$ où $\forall i \in \{0, \ldots, n-1\}$, $d°A_i < d°C$. [ demo par divisions euclidiennes ; unicité ]

Si en plus, $A \wedge B = 1$, $A_0 \neq 0$. ( Analogies avec la formule de Taylor )

Résumé : [ Théorie générale de la décomposition ] Soit $F = A/B \in \mathbf{K}(X) \setminus \mathbf{K}[X]$, $A \wedge B = 1$ et B unitaire.

$B = \Pi\, (C_j)^{n_j}$ où $\forall j \in \mathbb{N}_p$, $C_j$ irréductibles et 2 à 2 distincts et $n_j \in \mathbb{N}^*$.

Alors $\exists\ (A_{j,k})$, $F = \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=0}^{n_j-1} \frac{A_{j,k}}{C_j^{n_j-k}}$ où $\forall j \in \mathbb{N}_p$, $\forall k \in \{0, \ldots, n_j - 1\}$, $d°A_{j,k} < d°C_j$.

## 3 – Décomposition d'une fraction rationnelle de $\mathbb{C}(X)$

On a ici $C_j = X - a_j$, et $A_{j,k} \in \mathbb{C}$. Si a est un pôle de F, $F = \frac{A}{(X-a^\alpha)C} = F_a + G$. où a n'est pas pôle de G.

$F_a$ est appelée la partie polaire de F par rapport au pôle a. Elle n'a que a comme pôle.

Partie polaire relative à un pôle simple : $F = \frac{A}{B} = \frac{A}{(X-a)C} = \frac{\lambda}{X-a} + G$. Alors $\lambda = \frac{A(a)}{C(a)} = \frac{A(a)}{B'(a)}$.

Exemple : $1/(X^3 - 1) = 1/3(X-1) + 1/3j^2(X-j) + 1/3j(X-j^2)$.

Partie polaire relative à un pôle multiple : Soit $H = (X-a)^\alpha F = A/C = \lambda_0 + \lambda_1(X-a) + \ldots + \lambda_{\alpha-1}(X-a)^{\alpha-1} + G(X-a)^\alpha$.

Pour trouver $\lambda_k$, on dérive H k fois et on l'applique au point a. $\lambda_k = H^{(k)}(a)/k!$ [ Taylor ]

Exemple : $(X^8 + X^2 + 1)/(X^3(X^2+1)) = X^3 - X + 1/X^3 + 1/2(X - i) + 1/2(X + i)$

### 4 – Décomposition d'une fraction rationnelle de $\mathbb{R}(X)$

$d°C_j = 1$ ou 2. Ex : $1/(X^3 - 1)$. Notion d'élément simple de $n^{\text{ième}}$ espèce.
Pour trouver les coefs. d'un élément de $2^{\text{ème}}$ espèce, on le multiplie par F puis on remplace X par une de ses 2 racines complexes. Il vient alors une égalité de 2 complexes, qui permettent de déterminer les 2 coefficients.
Exemple : $(X^4 + 1)/X^2(X^2 - 1)(X^2 + 1)^2 = -1/X^2 - 1/4(X + 1) + 1/4(X - 1) + 1/(X^2+1)^2 + 1/2(X^2+1)$
( utilisation du fait que l'expression est paire ; développement limité et équivalent à l'infini )

## VII Complément : polynômes d'interpolation

### 1 – Interpolation

On cherche à remplacer une fonction par une fonction polynôme sur un intervalle.
$\forall\ (\alpha_0, ..., \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}, \forall\ (\beta_0, ..., \beta_n) \in \mathbb{R}^{n+1}, \exists\,!\ P \in \mathbb{R}_n[X], \forall\ i \in \{0, ..., n\}, \hat{P}(\alpha_i) = \beta_i$.

[ demo : l'application $\mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}^{n+1}$, $P \to (\hat{P}(\alpha_0), ..., \hat{P}(\alpha_n))$ est un isomorphisme d'espace vectoriel ]

$f_i : P \in \mathbb{R}_n[X] \to \hat{P}(\alpha_i)$ est une forme linéaire.
$(f_i)_{0 \le i \le n}$ est une base du dual de $\mathbb{R}_n[X]$. [ demo : elle est libre ].
On cherche une base de $\mathbb{R}_n[X]$ telle que $(f_i)_{0 \le i \le n}$ soit sa base duale.

On notant $Q_i = \dfrac{\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} X - \alpha_j}{\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \alpha_i - \alpha_j}$, la famille $(Q_i)_{0 \le i \le n}$ est bien la base cherchée.

On a alors $P = \sum_{i=0}^{n} \beta_i . Q_i$ : polynôme d'interpolation de Lagrange.

### 2 – Evaluation de l'erreur

On étudie l'application $g_x : t \in [a, b] \to f(t) - \hat{P}(t) - \lambda\, \hat{N}_n(t)$ où $N_n = \Pi(X - \alpha_i)$.
et où $\lambda$ est choisi tel que $g_x(x) = 0$. $g_x$ s'annule donc en n+2 points ; $g_x^{(n+1)}$ s'annule donc en un point. Il vient :

$$\left|f(x) - \hat{P}(x)\right| \le \frac{\mathrm{Max}\left|\hat{N}_n[a,b]\right| . \mathrm{Max}\left|f^{(n+1)}[a,b]\right|}{(n+1)!}$$

### 3 – Optimisation des abscisses $(\alpha_i)$

Le meilleur choix des abscisses $\alpha_i$ est donné par les racines des polynômes de Tchebychev $T_n(x) = \cos(n \operatorname{Arccos}(x))$

[ EXOS 18 + TD INFO 7 ]

# 14 – Calcul de primitives et d'intégrales

## I Fonction polynômiale en sin(x) et cos(x)

$F = \int \sin^p x \cos^q x \, dx$

Si p ou q est impair : Supposons $q = 2q' + 1 \to F = \int \sin^p x \, (\cos^2 x)^{q'} \cos x \, dx = \int u^p(1-u^2)^{q'} du$ où $u = \sin(u)$

Exemple : $\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx = \sin^3 x/3 - \sin^5 x/5 + c^{te}$.

Si p et q sont pairs : $p = 2p'$ et $q = 2q'$. Supposons $p' \geq q'$. $F = \int (\sin x \cos x)^{2q'} \sin^{2(p'-q')} x \, dx$ ; on linéarise et on se ramène au cas précédent. Exemple : $\int \sin^2 x \cos^4 x \, dx = x/16 - \sin(4x)/64 + \sin^3(2x)/48 + c^{te}$.

## II Fonction rationnelle

Eléments simples de 1ère espèce : $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-a)^k} = \begin{cases} \ln|x-a| + c^{te} & (k=1) \\ \dfrac{1}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + c^{te} & (k>1) \end{cases}$

Eléments simples de 2ème espèce : Mettre le dénominateur sous la forme canonique $((x-p)^2 + q^2)^k$ ; faire apparaître la dérivée du dénominateur au numérateur, ce qui fait apparaître un terme facilement intégrable plus un terme de la forme $\displaystyle\int \frac{dx}{((x-p)^2 + q^2)^k}$. Si $k = 1$, on reconnaît la dérivée d'Arctan ; sinon, on pose $x - p = q\tan\varphi$. Le changement de variable permet de se ramener à calculer un terme du type $\int \cos^a x \, dx$.

Ex : $\displaystyle\int \frac{x+1}{(x^2+x+1)^3} dx = \frac{-1}{4\,(x^2+x+1)^2} + \frac{2\sqrt{3}}{9} \text{Arctan}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{2}{9}\frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{12}\frac{(2x^2+2x-1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} + c^{te}$

[ on se sert des formules en tan(t/2) ]

En posant $I_k = \displaystyle\int \frac{dx}{((x-p)^2+q^2)^k}$, on peut établir une relation de récurrence entre $I_k$ et $I_{k-1}$. (IPP)

## III Fonction rationnelle de sin(x) et cos(x)

$F = \int R(\sin x, \cos x) \, dx$. Problème de définition de la primitive $\to$ choix d'un intervalle.

Changement de variable : $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ ; $dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$.

$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$ $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ $\tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}$

On se ramène à une fonction rationnelle.

Exemple : $\boxed{\displaystyle\int \frac{dx}{\sin(x)} = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + c^{te}}$ $\boxed{\displaystyle\int \frac{dx}{\cos(x)} = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + c^{te}}$.

Ou encore : $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin(x)} = \ln\left|\frac{1}{\sin(x)} - \text{cotan}(x)\right| + c^{te}$ $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos(x)} = \ln\left|\frac{1}{\cos(x)} + \tan(x)\right| + c^{te}$.

Cas particuliers :

| | | |
|---|---|---|
| $F = \int G(\sin(x)) \cos(x) \, dx = \int G(u) \, du$ | $u = \sin(x)$ | $x \to \pi - x$ |
| $F = \int G(\cos(x)) \sin(x) \, dx = -\int G(u) \, du$ | $u = \cos(x)$ | $x \to -x$ |
| $F = \int G(\tan(x)) \, dx = \int \frac{G(u)\,du}{1+u^2}$ | $u = \tan(x)$ | $x \to \pi + x$ |

Lorsque l'expression sous l'intégrale est inchangée par l'une des 3 substitutions de x **(ne pas oublier dx)**, on pourra faire un changement de variable qui permettra de calculer l'intégrale. [ ADMIS ]

Exemple : $\int \sin^3 x \, dx / (1 + \cos^3 x) = ½ \ln(u^2 - u + 1) - \text{Arctan}((2u-1)/\sqrt{3})/\sqrt{3} + c^{te}$ où $u = \cos(x)$

## IV Fraction rationnelle en sh(x) et ch(x)

### 1 – Polynôme en sh(x) et ch(x)

$F = \int \text{sh}^p x \, \text{ch}^q x \, dx$

Si p ou q est impair : Supposons $q = 2q' + 1 \to F = \int \text{sh}^p x \, (\text{ch}^2 x)^{q'} \text{ch}x \, dx = \int u^p(1+u^2)^{q'} du$ où $u = \text{sh}(u)$

Si p et q sont pairs : $p = 2p'$ et $q = 2q'$. Supposons $p' \geq q'$. $F = \int (\text{sh}x \, \text{ch}x)^{2q'} \text{sh}^{2(p'-q')} x \, dx$ ; on linéarise et on se ramène au cas précédent. $\text{sh}x \, \text{ch}x = \text{sh}(2x)/2$ ; $\text{sh}^2 x = (\text{ch}(2x) - 1)/2$.

### 2 – Fraction rationnelle en sh(x) et ch(x)

$F = \int R(\text{sh}x, \text{ch}x) \, dx$. Problème de définition de la primitive $\to$ choix d'un intervalle.

Changement de variable : $t = \text{th}(x/2)$ ; $dx = 2dt/(1 - t^2)$

$$\text{sh}x = \frac{2t}{1-t^2} \quad \text{ch}x = \frac{1+t^2}{1-t^2} \quad \text{th}x = \frac{2t}{1+t^2}$$

Ex : $\int \frac{dx}{\text{sh}\,x} = \ln\left|\text{th}\left(\frac{x}{2}\right)\right| + c^{te} \quad \int \frac{dx}{\text{ch}\,x} = 2 \text{ Arctan th}\left(\frac{x}{2}\right) + c^{te}$

Autre changement de variable : $u = e^x$ ; $dx = du/u$

$$\text{sh}x = \frac{u^2-1}{2u} \quad \text{ch}x = \frac{u^2+1}{2u} \quad \text{th}x = \frac{u^2-1}{u^2+1}$$

Exemple : $\displaystyle\int \frac{dx}{\text{sh}^3 x + \text{ch}^3 x - 1} = -\frac{2}{3(u-1)} - \frac{4}{9}\ln|u-1| + \frac{2}{9}\ln(u^2+2u+3) - \frac{5\sqrt{2}}{9}\text{Arctan}\left(\frac{u+1}{\sqrt{2}}\right) + c^{te}$

où $u = e^x$

Cas particuliers :

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $F = \int G(\text{sh}(x))\,\text{ch}(x)\,dx = \int G(u)\,du$ | $u = \text{sh}(x)$ | |
| | $F = \int G(\text{ch}(x))\,\text{sh}(x)\,dx = \int G(u)\,du$ | $u = \text{ch}(x)$ | (pas de méthode pour |
| | $F = \int G(\text{th}(x))\,dx = \int F(u)\,du\,/\,(1-u^2)$ | $u = \text{th}(x)$ | prévoir) |

## V Primitives du produit d'un polynôme et d'une exponentielle

$\int e^{\lambda x} P(x)\,dx = e^{\lambda x} Q(x) + c^{te}$ où $d°P = d°Q$ [ demo facile par récurrence ]

→ Pour trouver Q, il suffit de dériver $e^{\lambda x} Q(x)$ puis d'identifier.

ex : $\int x^2 \sin x\,dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + c^{te}$.

## VI Intégrales abéliennes attachées à une courbe unicursale

### 1 – Courbe unicursale

Courbe unicursale = Courbe paramétrée : $x = R(t)$ et $y = S(t)$ où R et S sont des fonctions rationnelles.

### 2 – Intégrale abélienne

Intégrale abélienne = $\int F(x,y(x))\,dx$ où $(x,y(x))$ sont les coordonnées d'un point qui décrit une courbe unicursale.
On peut alors calculer l'intégrale : $\int F(x,y(x))\,dx = \int F(R(t),S(t))\,R'(t)\,dt$.

### 3 – Intégrale homographique par rapport à x : $\int F\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$

On pose $y = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} \Rightarrow x = \frac{dy^n - b}{-cy^n + a}$ : c'est bien une primitive abélienne.

$\int F\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx = \int F\left(\frac{dy^n-b}{-cy^n+a}, y\right) \frac{ad-bc}{(-cy^n+a)^2}\, n\, y^{n-1}\,dy$. (Ne pas oublier dx)

Exemple : $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,\frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1} + \ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| + c^{te}$

### 4 – Intégrale du type $\int F\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$

On a $y^2 = ax^2 + bx + c$ : équation d'une conique. $\Delta = b^2 - 4ac$. $y^2 - a(x + b/2a)^2 = \Delta/-4a$.

On l'écrit sous la forme $\displaystyle\underbrace{\frac{y^2}{\left(\frac{\Delta}{-4a}\right)}}_{y^*} + \underbrace{\frac{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}{\left(\frac{\Delta}{4a^2}\right)}}_{x^*} = 1$

#### a – 1er cas : a < 0

Si $\Delta > 0$ :

Alors c'est une demi–ellipse. On choisit un paramètre θ tel que

$x^* = \sin^2\theta$ et $y^* = \cos^2\theta$. $\rightarrow \int F(x,\sqrt{(ax^2+bx+c)}) = \int G(\cos\theta, \sin\theta)$.

x et y peuvent s'exprimer rationnellement en fonction de $\tan(\theta/2)$ : c'est bien une primitive abélienne.
Exemple : $\int (-2x^2 + 3x + 2)^{-3/2}\, dx = (2/25)\ (4x - 3)/\sqrt{(-2x^2 + 3x + 2)} + c^{te}$.
Si $\Delta \le 0$ : L'intégrale ne peut être définie sur un intervalle.

### b – 2ème cas : a > 0

On aboutit à l'équation d'une demi–hyperbole. Suivant le signe de $\Delta$, on choisit un paramètre $\theta$ tel que

$x^* = \mathrm{sh}^2\theta$ et $y^* = \mathrm{ch}^2\theta$ (Si $\Delta < 0$)

ou $x^* = \mathrm{ch}^2\theta$ et $y^* = \mathrm{sh}^2\theta$ (Si $\Delta > 0$) $\to \int F(x,\sqrt{(ax^2 + bx + c)}) = \int G(\mathrm{ch}\theta, \mathrm{sh}\theta)$.

Exemple : $\int dx/(x + \sqrt{(x^2+x)}) = \theta/2 - ½\, e^{-\theta} + c^{te}$ où $\theta = \ln(2\sqrt{(x^2+x)} + 2x + 1)$

$\int dx/(x + \sqrt{(x^2+x+1)})^2 = ...$ DIY.