[MP – Mécanique]

Sommaire

Divers

❍ Distinguer : Force de tension du fil $\vec{T}$ (vectoriel, en newton)
Tension du fil T (scalaire, en newton aussi)

❍ Sur une courbe y = f(x) d'abscisse curviligne s :

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + y'^2}$$

$y' = \tan\theta$ [Cf TD 7/10/2000]

Ordres de grandeur

❍ **Préfixes**

10^{-18}	a	atto
10^{-15}	f	femto
10^{-12}	p	pico
10^{-9}	n	nano
10^{-6}	µ	micro
10^{-3}	m	mili
10^{0}		
10^{3}	k	kilo
10^{6}	M	méga
10^{9}	G	giga
10^{12}	T	téra
10^{15}	P	peta
10^{18}	E	exa

❍ **Surfaces, Volume**

1 are	100 m²
1 hectare	10 000 m²
5 10^{-5} L	volume d'une goutte (ou 1/20 mL)

Rem : un litre s'écrit L, non l.

❍ **Masse**

9 10^{-31} kg	masse d'un électron
1,7 10^{-27} kg	masse d'un neutron = u. m. a.
6 10^{23} kg	masse de la Terre
2 10^{30} kg	masse du Soleil

❍ **Energie**

1 eV = 1,6 . 10^{-19} J

❍ **Distance**

1,2	fm	diamètre d'un noyau atomique
3	fm	rayon de l'électron
0,5	Å	rayon d'un atome d'hydrogène
1	Å	angström, taille d'une molécule...
4	Å	arête de la maille de $Cu_{(s)}$
0,5	µ	longueurs d'onde du visible
10	µ	taille d'un chromosome
0,1	mm	taille d'un virus
1,6	km	un miles anglais
1 852	m	un mille marin
6	10^{3} km	rayon de la Terre
36	10^{3} km	altitude des satellites géostatio.
40	10^{3} km	circonférence de la Terre
400	10^{3} km	distance Terre-Lune
	10^{6} km	rayon du Soleil
10	10^{6} km	distance minimale Terre-Vénus
150	10^{6} km	distance Terre-Soleil
5	10^{9} km	rayon du système solaire
	10^{13} km	une année lumière
4	10^{13} km	distance Soleil-Proxima Centauri
	10^{15} km	diamètre de la nébuleuse d'Orion
	10^{16} km	distance Soleil-Nébuleuse d'Orion
	10^{18} km	diamètre de la voie lactée

❍ **Masse volumique**

5000	kg m^{-3}	masse vol. moyenne de la Terre
1000	kg m^{-3}	masse volumique de l'eau
0,6	kg m^{-3}	masse volumique de l'air

1 Wh = 3600 J
1 cal = 4 J

❍ **Pression**

1 mm Hg = 133 Pa
1 atm = 1,013 bar = 1,013 10^5 Pa = 760 mm Hg

❍ **Vitesse**

1	km. s^{-1}	vitesse moyenne d'une particule de gaz usuel
8	km. s^{-1}	vitesse d'un satellite de basse altitude (1^e vitesse cosmique)
11	km. s^{-1}	vitesse de libération (2^e vitesse cosmique)
30	km. s^{-1}	vitesse moyenne de la Terre dans le référentiel héliocentrique

❍ **Divers**

Angle entre le plan équatorial et le plan de l'écliptique : 23°
Résolution de l'œil ~ 10^{-3} rad.
Luminosité du soleil : 2 . 10^{27} kW ; flux surfacique du soleil sur Terre : 1 kW.m^{-2}.
Température de surface du soleil : 5 800 K.
Charge d'une mole d'électrons : $\mathcal{N}$. e = 1 $\mathcal{F}$ = 96 500 C. mol^{-1}
Conductivité du cuivre : 6 . 10^7 S m^{-1}.
Capacité thermique massique de l'eau : c_{eau} = 4,18 kJ K^{-1} kg^{-1} à 15°C sous 1 atm
Le point triple de l'eau est atteint pour P = 600 Pa et T_R = 273,16 K = 0,01°C. (Définition du Kelvin)
Champ disruptif de l'atmosphère : 10^7 V m^{-1}.
Champ magnétique terrestre : 2 10^{-5} T.
Masse molaire de l'air : 29 g. mol^{-1}.

❍ **Constantes**

$R = 8{,}314$ J K^{-1} mol^{-1}	Constante des gaz parfaits
$\mathcal{N}_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ mol^{-1}	Nombre d'Avogadro
$k = R/\mathcal{N}_A = 1{,}4\ 10^{-23}$ J K^{-1}	Constante de Boltzman
$h = 6{,}6\ 10^{-34}$ J s	Constante de Planck
$1/(4\pi\varepsilon_0) = 9\ 10^9$ m F^{-1}	Constante de Coulomb
$\mathcal{G} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ m^3 kg^{-1} s^{-2}	Constante de gravitation
$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C	Charge élémentaire
$V_m = 22{,}4$ L. mol^{-1}	Volume molaire (0°C, 1 atm)
$\varepsilon_0 = 10^{-11}$ F m^{-1}	Permittivité du vide
$\mu_0 = 4\pi\ 10^{-7}$ N A^{-2}	Perméabilité du vide
$\sigma = 6\ 10^8$ W m^{-2} K^{-4}	Constante de Stephan (corps noirs)

Table des moyennes des fonctions circulaires

$\langle\sin\rangle = \dfrac{2}{\pi}$	sur $[0, \pi]$
$\langle\sin^2\rangle = \dfrac{1}{2}$	sur $\mathbb{R}$
$\langle\sin^3\rangle = \dfrac{4}{3\pi}$	sur $[0, \pi]$
$\langle\sin^4\rangle = \dfrac{3}{8}$	sur $\mathbb{R}$

1 – Cinématique des solides

I Description d'un système matériel

∗ point matériel. 3 ddl.
∗ système de N points : 3N coordonnées de position

II Cas particulier du solide

1 – Définition

Solide= système matériel tel que $\|\vec{M_1M_2}\| = c^{te}$ pour tout couple (M_1, M_2) du solide.
Repérage : 3 points non alignés, ou 1 point et 2 angles → 3 coordonnées de position et 3 d'orientation.

2 – Référentiel lié au solide

III Quelques rappels sur les référentiels

1 – Cas particulier : R' est en translation par rapport à R

$d\vec{U}/dt\,|_R = d\vec{U}/dt\,|_{R'}$. [~d]

2 – Cas particulier : R' est en rotation par rapport à R autour d'un axe fixe

$$\frac{d\vec{U}}{dt}\bigg|_R = \frac{d\vec{U}}{dt}\bigg|_{R'} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{U} \qquad (1)$$

3 – Cas général

Composition des vecteurs rotation : $\vec{\Omega}_{R_1/R_3} = \vec{\Omega}_{R_1/R_2} + \vec{\Omega}_{R_2/R_3}$. La relation (1) est générale.
Ex : vitesse de rotation de la Terre pour calculer la durée d'un jour sidéral ;
vecteur vitesse en coordonnées sphériques...

IV Champ des vitesses d'un solide

$$\vec{v}_{B/R} = \vec{v}_{A/R} + \vec{BA} \wedge \vec{\Omega}_{S/R} \qquad (2)$$

Donc parler de la vitesse d'un solide n'a pas de sens, sauf si $\vec{\Omega} = \vec{0}$.
Ex : RSG d'une roue sur le sol ; RSG dans un train épicycloïdal.

2 – Notion de torseur

I Définition

Soit un ensemble discret de points (M_i) et un champ de vecteurs définit en ces points : $\vec{U}(M_i)$.
La résultante du champ vectoriel est $\vec{R} = \Sigma\, \vec{U}(M_i)$
Le moment en O, point quelconque est $\vec{m}_O = \Sigma\, \vec{OM_i} \wedge \vec{U}(M_i)$.
$\{\vec{R}, \vec{m}\}$ est le torseur associé au champ de vecteurs $\vec{U}(M_i)$.
On a $\vec{m}_O = \vec{m}_{O'} + \vec{OO'} \wedge \vec{R}$. (déf pour un champ continu...)

II Propriétés

* Equiprojectivité : $\vec{R} \,.\, \vec{m} = c^{te}$.
* Axe central : il existe un axe unique tel que $\forall$ A $\in$ axe, $\vec{m}_A \,/\!/\, \vec{R}$. [~d]

III Cas particuliers

1 – Glisseur

C'est un torseur auquel on peut associer un vecteur unique appliqué en 1 point. $\rightarrow \exists$ G, $\vec{m}_G = \vec{0}$.
Ex : poids dans un champ de pesanteur uniforme, poussée d'un barrage simplifié (le centre de poussée est à 2/3 en profondeur).

2 – Couple

C'est un torseur de résultante nulle. Il est représentable par 2 vecteurs opposés. $\vec{m}$ est uniforme.
Tout torseur est équivalent à un couple + un glisseur

IV Torseur cinématique d'un solide { $\vec{\Omega}$, $\vec{v}_A$ }

Résultante cinématique : $\vec{\Omega}$
Moment cinématique en A : $\vec{v}_A$

3 – Bases de la mécanique newtonnienne

I Mécanique newtonnienne (non relativiste)

* Le temps est universel (exemple du wagon ; ce fait est remis en cause par la relativité restreinte)
* La géométrie de l'espace est euclidienne (remis en cause par la relativité générale)

II Torseurs cinétique { $\vec{P}$ ou $\vec{R}_c$, $\vec{L}_O$ ou $\vec{\sigma}_O$ } et dynamique { $\vec{S}$ ou $\vec{R}_d$, $\vec{D}_O$ ou $\vec{\delta}_O$}

1 – Torseur cinétique

Résultante cinétique : $\vec{P}_{(S/R)} = \Sigma\, m_i\, \vec{v}_{Mi/R}$. (ou quantité de mouvement)
Moment cinétique en O : $\vec{\sigma}_O = \vec{L}_{O\,(S/R)} = \Sigma\, \vec{OM_i} \wedge m_i\, \vec{v}_{Mi/R}$.
(extension aux systèmes continus...)
Barycentre : On a $\vec{P}_{(S/R)} = m\, \vec{v}_G$. [d]

2 – Théorème de Koenig pour le moment cinétique

On définit le référentiel barycentrique R* par : R* est lié à G et $\vec{\Omega}_{R^*/R} = 0$.
Prop : $\vec{P}^*$ est nul donc $\vec{L}^*$ est uniforme. $\vec{L}^*(S) = \vec{L}_A(S/R^*) = \vec{L}_G(S/R)$.
Théorème de Koenig : $\boxed{\vec{L}_O(S/R) = \vec{OG} \wedge \vec{P}(S/R) + \vec{L}^*(S)}$.

3 – Torseur dynamique

C'est un torseur { $\vec{S}$, $\vec{D}$ } défini par les $m_i\, \vec{a}_{Mi/R}$.

$\dfrac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{D}_O + \vec{P} \wedge \vec{V}(O)$. [d]

ou encore : $\boxed{\vec{D}_O = \dfrac{d\vec{L}_O}{dt} + m\,\vec{v}_O \wedge \vec{v}_G}$.

Si O est fixe, ou si O = G, ou si $\vec{V}(O) \,/\!/\, \vec{V}(G)$, alors $d\vec{L}_O/dt = \vec{D}_O$.

III Relation fondamentale de la dynamique des systèmes

Il existe une classe de référentiels appelés galiléens tels que

$_O\{ E \rightarrow \mathcal{S} \} = {}_O\{ S(\mathcal{S}/R_g), D_O(\mathcal{S}/R_g) \}$

où $_O\{ E \rightarrow \mathcal{S} \}$ est le torseur des actions extérieures à $\mathcal{S}$.

IV Conséquences

1 – Principe d'inertie

Soit un référentiel d'étude galiléen R_g. Le système étudié $\mathcal{S}$ est isolé (pas de forces extérieures).
Alors il y a inertie de translation : $\vec{V}(G/R_g) = \vec{c}^{te}$, et de rotation : $\vec{L}^* = \vec{c}^{te}$.
Un système est pseudo isolé si $\vec{R}_{E\rightarrow\mathcal{S}} = \vec{0}$ et $\vec{m}_{O\,E\rightarrow\mathcal{S}} = \vec{0}$.
Ex : Sur une patinoire, deux masses identiques liées par une tige de longueur a, de masse négligeable. On donne un coup de pied sur M_2. Les trajectoires de M_1 et de M_2 sont des cycloides. $\omega = -v_0/a$.

2 – Référentiels galiléens

Soit R_{g_1} un référentiel galiléen et R_{g_2} un référentiel.
R_{g_2} est galiléen $\Leftrightarrow$ R_{g_1} est en translation rectiligne uniforme par rapport à R_{g_1}. [d]
On connaît des référentiels plus ou moins galiléens :

Copernic > Héliocentrique > Géocentrique > Terrestre.

3 – Loi des actions réciproques (ou principe de l'action et la réaction)

Soient $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ deux systèmes disjoints. On a

$\vec{R}_{\mathcal{S}_1\rightarrow\mathcal{S}_2} = -\vec{R}_{\mathcal{S}_1\rightarrow\mathcal{S}_2}$

$\vec{m}_{O\,\mathcal{S}_1\rightarrow\mathcal{S}_2} = -\vec{m}_{O\,\mathcal{S}_1\rightarrow\mathcal{S}_2}$

C'est pourquoi lors de l'interaction de 2 points matériels M_1 et M_2, la force $\vec{F}_{M1\rightarrow M2}$ est parallèle à $\vec{M_1M_2}$.

V Théorème de la résultante dynamique/cinétique

Dans un référentiel galiléen, pour un solide, on a : $\boxed{m\,\dfrac{d\vec{v}_G}{dt} = \vec{S} = \vec{R}_{ext}}$.

Ex : sablier sur une balance. $\mathcal{S}$ = { sablier + sable }. $m\,\vec{a}_{G_\mathcal{S}} = -m\,g\,\vec{e}_z + P_{balance}\,a\,\vec{e}_z$.
La balance ne mesure pas le même poids (au début, il est plus fort, puis plus bas).

VI Théorème du moment dynamique/cinétique

Dans un référentiel galiléen, pour un solide, on a $\vec{D}_O = \vec{m}_{O\,ext}$.
Et si O fixe, ou O = G, ou $\vec{v}_O \,/\!/\, \vec{v}_G$, alors $d\vec{L}_O/dt = \vec{m}_{O\,ext}$.

VII Référentiel non galiléen

Dans le torseur des actions mécaniques, il faut ajouter (pour le PFD) les forces d'inertie d'entrainement et de Coriolis, qui se calculent pour des points ou des masses élémentaires ($\rightarrow$ qu'il faut intégrer).
Rem : si la force d'inertie est uniforme (inertie de translation), on sait que la résultante sera un glisseur où l'axe central est en G (analogue au poids).
Ex : positions d'équilibre d'une tige qui tourne avec un pivot $(A,\vec{z})$. L'angle α est tel que $\sin\alpha = 0$ ou $\cos\alpha = \dfrac{3\,g}{2\,\ell\,\omega^2}$.

4 – Energie mécanique

I Energie cinétique d'un système

$\mathcal{E}_K = \Sigma \frac{1}{2} m_i v^2_{Mi/R}$.

Théorème de Koenig relatif à l'énergie cinétique : $\boxed{\mathcal{E}_K = \frac{1}{2} m v^2_G + \mathcal{E}_K^*}$. [demo]

II Théorème de l'énergie cinétique/de la puissance cinétique

1 – Puissance d'une force

$\mathcal{P}_{\vec{F}} = \vec{F}\,\vec{v}$.

Rem : lors d'un RSG, aucune force ne travaille car $\vec{v}_{CIR} = 0$. [Cf Exo Dynamique du Solide Cas général I]

2 – Théorème de la puissance cinétique

Théorème de la puissance cinétique : $d\mathcal{E}_K/dt = \mathcal{P}_{ext} + \mathcal{P}_{int}$. [demo]

3 – Forces intérieures

$\mathcal{P}_{int} = \sum_{i<j} f_{i,j} \frac{dr_{i,j}}{dt}$ [demo]

où $r_{i,j} = \|\vec{M_iM_j}\|$ et $f_{i,j} \,.\, \vec{e}_{i,j} = \vec{F}_{M_i \to M_j}$.

Rem : $\mathcal{P}_{int}$ est donc indépendant du référentiel. Si $r_{ij} = c^{te}$, alors $\mathcal{P}_{int} = 0$.

⌦ Dans le cas de 2 points, $\mathcal{P}_{int} = f_{12}\,\dot{r}$. ☠ Il ne faut pas la compter deux fois.

4 – Forme intégrée du théorème

$\Delta\mathcal{E}_K = W(\vec{F}_{ext}) + W(\vec{F}_{int})$.

Rem : $W(\vec{F}_{int})$ est indépendant du référentiel.

III Energie mécanique

1 – Energie potentielle d'une force

$\vec{F} = -\,\vec{grad}\,\mathcal{E}_P$. $W_{\vec{F}} = -\Delta\mathcal{E}_P$.

2 – Energie potentielle du système

$\Delta\mathcal{E}_K + \Delta\mathcal{E}_P = W_{\vec{F}\text{ ne dérivant pas d'une énergie potentielle}}$.

Ex : Choc de plein fouet de 2 protons en dimension 1. Calcul de la distance minimale ($\mathcal{E}$ constante)

IV Détermination pratique de l'énergie potentielle

1 – Poids dans un champ $\vec{g}$ uniforme

$\mathcal{E}_P = mgz + c^{te}$ où z est la côte (altitude) du centre de gravité du système, dirigé vers le haut.

2 – Fil élastique ou ressort

$\mathcal{E}_P = \frac{1}{2} k (\ell - \ell_0)^2 + c^{te}$

3 – Fil idéal

On considère un fil parfaitement souple, inextensible, de masse nulle.

On montre que $\mathcal{P}_{fil} = 0$. Conclusion, $\mathcal{E}_P = c^{te}$.

4 – Forces d'inertie centrifuge (cas d'une rotation uniforme)

$\boxed{\mathcal{E}_P = -\frac{1}{2}\, m\, \omega^2\, r^2 + c^{te}}$ pour un point M de masse m

Pour un système, on réalise la somme des énergies potentielles ($\int$ dans le cas d'un solide continu).

Ex : problème de 2 corps reliés par un fil suspendu à une poulie. L'un des deux corps glisse sur un plan incliné.
On cherche l'équation du mouvement.
1e méthode : conservation de l'énergie. (Correct)
2e méthode : théorème du moment cinétique et de la résultante cinétique. (Long)
3e méthode : PFD à chacune des masses. (Efficace)
⌦ Pour les problèmes à 1 degré de liberté, la conservation de l'énergie est la méthode appropriée.

V Positions d'équilibre

1 – Systèmes à un degré de liberté

Soit α le paramètre qui donne la position (angle, abscisse, etc.) d'équilibre.
On montre que $\mathcal{E}_K$ se met sous la forme $f(\alpha)\ (d\alpha/dt)^2$.

$$\mathcal{E}_M = \mathcal{E}_P(\alpha) + f(\alpha) \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = c^{te}$$

$$\frac{d\mathcal{E}_P}{d\alpha}.\frac{d\alpha}{dt} + f'(\alpha)\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^3 + 2\, f(\alpha)\, \frac{d\alpha}{dt}\frac{d^2\alpha}{dt^2} = 0$$

La solution $d\alpha/dt = 0$ est la solution parasite. Elle a été introduite lors de la définition de la puissance : $\mathcal{P} = \vec{f}\,\vec{v}$.

$$\frac{d\mathcal{E}_P}{d\alpha} + f'(\alpha) \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + 2\, f(\alpha)\, \frac{d^2\alpha}{dt^2} = 0$$

α_0 correspond à une position d'équilibre $\Leftrightarrow \left(\frac{d\alpha}{dt} = 0 \text{ et } \alpha = \alpha_0\right) \Rightarrow \frac{d^2\alpha}{dt^2} = 0.$

$\Leftrightarrow \frac{d\mathcal{E}_P}{d\alpha}(\alpha_0) = 0.$

$\Leftrightarrow$ Extrémum d'énergie potentielle en α_0.

La position est stable suivant s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum. [dessins]

2 – Systèmes à plusieurs degrés de liberté

Les extréma d'énergie potentielle $\left(\frac{\partial\mathcal{E}_P}{\partial\alpha_1} = \frac{\partial\mathcal{E}_P}{\partial\alpha_2} = \dots = \frac{\partial\mathcal{E}_P}{\partial\alpha_n} = 0\right)$ correspondent aux positions d'équilibre.

Pour déterminer si une position d'équilibre est stable, il n'y a pas de loi générale. Il faut étudier les petits mouvements autour de la position d'équilibre.

Ex : tige tournante (la même qu'en 3–VII). $\mathcal{E}_P(\alpha) = -\frac{m\, g\, \ell \cos a}{2} + \frac{m\, \omega^2\, \ell^2 \sin^2 \alpha}{6}$.

Dans le référentiel lié à la tige, la réaction de l'axe ne travaille pas, et la force de Coriolis non plus.

Ex : pont levis OA de masse m, de longueur L, qui soulève une masse m' à l'aide d'un fil de longueur ℓ et d'une poulie P tel que $\vec{OP} = H\, \vec{e}_z$. On note α l'angle entre le pont levis et la verticale.

$$\mathcal{E}_P = \frac{m\, g\, L \cos a}{2} + m'\, g \sqrt{L^2 + H^2 - 2\, H\, L \cos \alpha}.$$

5 – Solide en rotation autour d'un axe fixe

I Moment cinétique en O (O ∈ axe)

$\vec{\Omega}_{S/R} = \omega \vec{e}_z$.

$\vec{L}_O = \iiint \vec{OM} \wedge \vec{v}\, dm = \iiint - z\, r\, \omega\, \vec{e}_r\, dm + (\iiint r^2\, dm)\, \omega\, \vec{e}_z$ (en coordonnées cylindriques)

$= \vec{L}_{O\perp} + \vec{L}_{O/\!/}$

On pose $\vec{L}_{O/\!/} = J_\Delta\, \vec{\Omega}$, où $J_\Delta = \iiint r^2\, dm > 0$ est indépendant de O (du moment que O ∈ axe).

J_Δ est appelé le moment d'inertie du solide S par rapport à Δ.

$\vec{L}_{O\perp} = \vec{0}$ pour (entre autres) Δ axe de symétrie pour S ou si le plan $z = 0$ est plan de symétrie pour S.

II Axes principaux d'inertie en un point

Soit un solide S et un point O ∈ axe.

Soit (R, x, y, z) un repère lié au solide.

$\vec{L}_O = \iiint \vec{OM} \wedge dm\, \vec{v}_M = \iiint \vec{OM} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{OM})\, dm$ est donc linéaire par rapport à $\vec{\Omega}$.

On peut écrire la matrice qui donne $\vec{L}_O$ en fonction de $\vec{\Omega}$.

Cette matrice est symétrique donc diagonalisable (euh) → il existe 3 directions propres Δ, orthogonales telles que

$\exists J_\Delta \in \mathbb{R}_+, \quad \vec{L}_O = J_\Delta\, \vec{\Omega}$.

Ces 3 axes sont appelés <u>axes principaux d'inertie</u>.

III THMC appliquée au cas du solide en rotation autour d'un axe fixe

On définit le moment cinétique par rapport à un axe Δ :

$L_\Delta = \vec{L}_O\, \vec{u} = J\, \omega$ si u est unitaire sur Δ et O ∈ Δ.

On définit de même le moment des efforts extérieurs par rapport à Δ :

$m_\Delta = \vec{m}_O\, \vec{u} = (\vec{OM} \wedge \vec{F})\, \vec{u}$.

Rem : L_Δ et m_Δ sont indépendants de O (du moment que O ∈ Δ)

On a : $\boxed{m_{\Delta\, E \to S} = \frac{dL_\Delta}{dt} = J \frac{d\omega}{dt}}$.

Rem : il est indispensable que l'axe soit fixe (sinon, il faut dériver $\vec{u}_\Omega$ aussi).

<u>Calcul pratique de m_Δ</u> :

* Utiliser la définition : $m_\Delta = (\vec{OM} \wedge \vec{F})\, \vec{u}$.
* Si le problème est plan : $\vec{F}$ ∈ plan ⊥ Δ passant par M. $m_\Delta = \pm$ (roe) × bras de levier × intensité de la force.
* Cas d'un couple des les éléments sont ⊥ à Δ. $m_\Delta = \pm$ (roe) × distance des 2 points d'action × intensité.

Ex : pendule pesant : $J\, \ddot{\theta} = - m\, g\, \|\vec{OG}\| \sin\theta$. On retrouve le cas du pendule simple.

IV Quelques moments d'inertie

* Cerceau (centre ∈ Δ) : $J_\Delta = \iiint r^2\, dm = m\, R^2$.
* Cylindre homogène plein (d'axe Δ) : $J_\Delta = \iiint r^2\, dm = \frac{1}{2}\, m\, R^2$.
* Tige filiforme homogène (Δ ⊥ tige, et la coupe en son centre) : $J_\Delta = \iiint r^2\, dm = \frac{1}{12}\, m\, \ell^2$.
* Tige filiforme homogène (Δ ⊥ tige, et la coupe en une extrémité) : $J_\Delta = \iiint r^2\, dm = \frac{1}{3}\, m\, \ell^2$.
* Sphère pleine homogène (Δ diamètre) : $J_\Delta = \iiint r^2\, dm = \frac{2}{5}\, m\, R^2$

<u>Théorème de Huygens</u> : $\boxed{J_{O\vec{z}} = J_{G\vec{z}} + m\, d^2}$ où d est la distance OG. [demo avec Koenig ; $\vec{OG} \perp \vec{z}$]

Donc $J_{M\vec{z}}$ est maximal pour M = G.

Ex : cerceau homogène planté à un clou. $T = 2\pi \sqrt{\frac{2R}{g}}$.

Ex : treuil. Cylindre plein de rayon a, de masse m_0 tourne autour de Δ. Une corde est enroulée sur le cylindre et porte une masse m de cote z. Le fil est idéal, il n'y a pas de frottements. Alors $\ddot{z} = -\frac{g}{1 + \frac{m_0}{2m}}$.

[PFD à m, TMC à m_0. On introduit la force de tension du fil ou isole {m, m_0, fil}. Thmc en O]

V Energie mécanique

1 – Energie cinétique

Soit S un solide. Oz = Δ est l'axe de rotation fixe de S. $\boxed{\mathcal{E}_K = \frac{1}{2} J_\Delta \omega^2}$.

2 – Puissance des forces

$\mathcal{P}_{int} = 0$. $\mathcal{P}_{ext} = m_\Delta \omega$.

Analogies :

Point matériel en mouvement	Solide en rotation autour d'un axe fixe
M	J
$\vec{v}$	ω
$\vec{F}$	m_Δ
(PFD) $F = m\, dv/dt$	$J\, d\omega/dt = m_\Delta$ (THMC)
$\mathcal{E}_K = \frac{1}{2} m v^2$	$\frac{1}{2} J_\Delta \omega^2 = \mathcal{E}_K$
$\mathcal{P} = \vec{F}\,\vec{v}$	$m_\Delta\, \omega = \mathcal{P}$
$\delta W = \vec{F}\, \vec{d\ell}$	$m_\Delta\, d\theta = \delta W$

Exemple : treuil (le même qu'en IV). Méthode énergétique. Efficace.

VI Couple de rappel élastique

∗ Torsion d'un fil. Modélisation linéaire du couple : $m_{\Delta\ \text{fil} \to S} = -C(\theta - \theta_0)$

∗ Ressort spirale. (plan) ∗ Energie potentielle. $\mathcal{E}_P = \frac{1}{2} C\, (\theta - \theta_0)^2$

Ex : cylindre de masse m de rayon a supportant une aiguille de masse m_0 et de longueur ℓ. Le cylindre peut tourner autour de son axe. On exerce une force de rappel de l'aiguille vers le haut en $-C\,\theta$.

On n'a pas de solution analytique simple

[Méthode thmc + Méthode énergique (mieux)]

Ex : Cobaye portant des haltères qui tourne sur un tabouret. Estimations.

<u>Volant d'inertie</u> : accumulateur d'énergie sous forme $\mathcal{E}_K = \frac{1}{2} J\, \omega^2$.

Ex : moteur → volant → machine tournante.

Le moteur exerce un couple $\Gamma(t) = \frac{1}{2}\Gamma_0(1 + \cos(\omega_0 t))$ et la machine tournante un couple résistant $-a\,\dot{\theta}$.

Équation différentielle du disque : $J\ddot{\theta} = \frac{\Gamma_0}{2}(1 + \cos(\omega_0 t)) - a\dot{\theta}$: Le couple est régulé.

Amplitude des oscillations forcées : $\Omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{4\,a^2}{\Gamma_0^2} + \dfrac{4\,\omega_0^2\,J^2}{\Gamma_0}}}$. On remarque que J ↗ ⇒ oscillations ↘.

VII Equilibrage d'un rotor

Soit un objet qui tourne suivant un axe fixe. L'axe est une tige rigide verticale reliée au chassis en A et en B (pivots).

1 – Equilibrage statique

$\vec{F}_A + \vec{F}_B = -m\,\omega^2\, a\, \vec{e}_r$. L'usure est très rapide car la force est tournante. (a est la distance de G à (AB))

La condition d'équilibre statique est réalisée si G est sur l'axe de rotation (AB).

2 – Equilibrage dynamique

On suppose la condition d'équilibrage statique réalisée. ($\vec{F}_A$, $\vec{F}_B$) est un couple.

$\vec{L}_O = J_D\, \omega\, \vec{e}_Z + \vec{L}_{O\perp}$. On suppose ω constant. $\vec{L}_{O\perp} = \vec{I}\,\omega$, où $\vec{I} \perp \vec{e}_z$. $\vec{I}\,\omega^2 = \vec{F}_{A\perp}\, \|\vec{AB}\|$.

La condition d'équilibrage dynamique est réalisée si l'axe de rotation est axe principal d'inertie.

Ex : tige de longueur ℓ tourante orientée de α par rapport à la verticale.

$\vec{L}_G = \dfrac{m\,\omega\,\sin\alpha\,\ell^2}{12}\,\vec{e}_Y$. $\|\vec{F}_A\| = \dfrac{m\,\omega^2\,\sin\alpha\,\cos\alpha\,\ell^2}{12\,\|\vec{AB}\|}$.

6 – Contact entre deux solides

I Aspect cinématique

Modélisation : le contact est ponctuel.

1 – Vitesse de glissement

On pose $\vec{v}_{g\,2/1} = \vec{v}_{I \in S_2/R} - \vec{v}_{I \in S_1/R} = \vec{v}_{I \in S_2/S_1}$.

2 – Rotation

On pose aussi $\vec{\Omega}_{S_2/S_1} = \vec{\Omega}_\perp + \vec{\Omega}_{/\!/}$. ($\perp$ et $/\!/$ au plan tangent commun)

$\vec{\Omega}_\perp$ est le pivotement, $\vec{\Omega}_{/\!/}$ est le roulement.

II Aspect dynamique

1 – Frottement de glissement

♦ Au niveau microscopique, c'est pas simple. Imbriquage.

♦ Au niveau macroscopique, on propose des lois approchées simples : lois de Coulomb.

Glissement $\vec{v}_g \neq \vec{0} \Leftrightarrow \|\vec{T}\| = f\,\|\vec{N}\|$ avec $\vec{T}$ opposé à $\vec{v}_g$.

Pas de glissement $\vec{v}_g = \vec{0} \Leftrightarrow \|\vec{T}\| < f\,\|\vec{N}\|$ f : coefficient de frottement

Ex : métal/métal 0,2 bois/bois 0,5 pneu route 0,8

♦ Modèle légèrement plus sophistiqué :

f_S : coefficient de frottement statique f_D : coefficient de frottement dynamique

Glissement $\vec{v}_g \neq \vec{0} \Rightarrow \|\vec{T}\| = f_S\,\|\vec{N}\|$

Pas de glissement $\vec{v}_g = \vec{0} \Rightarrow \|\vec{T}\| < f_D\,\|\vec{N}\|$ où $f_D < f_S$. (style hystérésis)

♦ Représentation graphique : cône de frottement. Le demi angle au sommet est α_0 / $\tan \alpha_0 = f$.

$\vec{R} = \vec{T} + \vec{N}$ est incluse dans le cône $\Leftrightarrow$ il y a non glissement.

Ex : parallélépipède sur un plan incliné. Glissement $\Leftrightarrow \tan \alpha > f$.

2 – Roulement et pivotement

Il y a des moments de frottement de pivotement et de roulement, mais leur influence est très faible, on ne les étudie pas.

III Aspect énergétique du glissement

$\mathcal{P}_{contact} = \vec{F}_{1\to 2} \cdot \vec{v}_{g\,2/1} = \vec{T}_{1\to 2}\,\vec{v}_{g\,2/1} \leq 0$.

Cas particuliers : $\vec{T} = \vec{0}$ (pas de frottement) ou $\vec{v}_g = \vec{0}$ (RSG) $\Rightarrow \mathcal{P}_{contact} = 0$.

En général, l'énergie mécanique du système diminue.

Ex : parallélépipède sur un plan incliné avec une vitesse initiale vers le haut... $\Delta x = -\dfrac{v_0^2}{2g(\sin \alpha + f\cos \alpha)}$

[pfd ou énergie : $W_{frott} = T\,\Delta x < 0$ et $\Delta\mathcal{E}_M = W_{frott}$]

Ex : cube d'arête a soumis à une force de traction F $\vec{e}_x$. Il y a pivotement $\Leftrightarrow f > ½$.

[on se place toujours au débuts de mouvements ; thmc sur Δ et pdfs]

Ex : cylindre laché sans vitesse sur initiale... $\tan \alpha < 3f \Leftrightarrow$ non glissement.

[thmc et thrc ; $\vec{v}_g < 0$ contradictoire ; $\vec{v}_g > 0$ ok ; RSG $T < f\,N$ conserv $\mathcal{E}$]

⌦ Il vaut mieux commencer par l'étude du RSG et la conservation de $\mathcal{E}$.

Ex : Archet sur une corde vibrante. Modélisation... Oscillations non sinusoïdales (son enrichi en harmoniques)
Fréquence très légèrement inférieure à celle de la corde pincée ; L'amplitude croit avec $(f_S - f_D)N$.

7 – Mécanique du solide pour un mouvement quelconque

I Cas d'un mouvement où $\vec{\Omega}$ a une direction constante

On se place dans le cas où $\vec{\Omega}$ a une direction constante.
Décomposition du mouvement en translation liée au point A + rotation d'axe fixe dans R '.
Rem : Pour A = G, R ' = R*.

Ex : Cylindre qui roule sur un plan. $\vec{a}_G = \frac{2\,g\,\sin\alpha}{3}\,\vec{e}_x$. 3 méthodes : RFD en G, TMC en I, Energie.

Ex : Vélo et cycliste qui donne une accélération $\dot{v}$. Chaque roue est caractérisée par (m, a, J). 2d est la distance entre les 2 axes des roues ; le centre de gravité du cycliste est au milieu, à une hauteur h.

$\vec{L}_{I_1} = h\,M\,V\,\vec{e}_y + 2\,J\,\omega\,\vec{e}_y$.

TMC en I_1 (Koenig$_L$) $\Rightarrow N_2 = \frac{mg}{2} - \frac{\dot{v}}{2d}\left(\frac{Mh + 2J}{a}\right)$. Si $|\dot{v}| > \left|\frac{mg}{2}\frac{2d}{Mh + \frac{2J}{a}}\right|$, l'une des deux roues décole.

II Axe instantané de rotation

L'axe central du torseur cinématique est appelé axe instantané de rotation.

III Moment cinétique

∗ Mouvement plan ⇒ On re ramène dans R* à une rotation autour d'un axe fixe.
∗ Cas général : Linéarité des $\vec{\Omega}$ et des $\vec{L}$ associés.

Ex : roulement à billes. La bille de rayon R a son rayon à une distance a de l'axe de rotation Δ.
Le plateau du bas (contenant I) est fixe ; le plateau du haut (contenant J) est mobile.

On pose $\vec{\Omega} = \Omega_r\,\vec{e}_r + \Omega_\theta\,\vec{e}_\theta + \Omega_z\,\vec{e}_z$.

RSG en deux points $\Rightarrow \vec{\Omega} \wedge 2R\,\vec{e}_z = \omega\,a\,\vec{e}_\theta \Rightarrow \Omega_q = 0$ et $\Omega_r = -\frac{\omega\,a}{2\,R}$.

$\vec{\Omega} = -\frac{\omega\,a}{2\,R}\,\vec{e}_r + \Omega_z\,\vec{e}_z$ et $\vec{L}^* = \frac{2}{5}\,m\,R^2\,\vec{\Omega}$. Calcul de $\vec{v}_G$.

Moment cinétique en I : $\vec{L}_I = -\frac{7}{10}\,m\,R\,a\,\omega\,\vec{e}_r + \frac{1}{5}\,m\,R^2\,\Omega_z\,\vec{e}_z$. (Koenig$_L$)

Le TMC en I donne Ω_z, F_{jr} et $F_{j\theta}$.

IV Energie cinétique et puissance

1 – Energie cinétique

$\boxed{\mathcal{E}_K = \frac{1}{2}\,\vec{v}_A\,\vec{p} + \frac{1}{2}\,\vec{\Omega}\,\vec{L}_A}$.
A est un point quelconque du solide.

2 – Puissance des actions extérieures

$\boxed{\mathcal{P} = \vec{R}\,\vec{v}_A + \vec{\Omega}\,\vec{m}_A}$. Ex : toupie symétrique. Précession φ, nutation θ, rotation propre ψ. On a :

$\vec{\Omega}_{toupie} = \frac{d\varphi}{dt}\,\vec{e}_\varphi + \frac{d\theta}{dt}\,\vec{e}_\theta + \frac{d\psi}{dt}\,\vec{e}_\psi$. $\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \vec{L}_3 \approx \vec{L}_3$.

En supposant $\frac{d\psi}{dt} >> \frac{d\varphi}{dt}$ et $\frac{d\theta}{dt}$, on aboutit à :

$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{mga}{J_\Delta\omega}, \frac{d\theta}{dt} = 0$ et $\frac{d^2\psi}{dt^2} = 0$.

Ex : le gyroscope. Effet gyroscopique = stabilisation de l'orientation du solide par rotation.

$\frac{d\vec{L}^*}{dt} = \frac{J\,d\omega}{dt}\,\vec{u} + J\omega\,\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{m}_G$. Si Jω est grand, $\frac{d\vec{u}}{dt}$ est petit.

Gyroscope = système symétrique par rapport à un axe Δ en rotation rapide autour de Δ et en rotation libre autour de G. (dessin). $\vec{L}^* = c^{te}$ dang un référentiel galiléen. L'axe de rotation est fixe. Utilisation pour déterminer la position ou réaliser un dispositif antiroulis.

8 – Lois de conservation ou intégrales premières

Intégrale première = équation différentielle d'ordre 1 obtenue en écrivant la conservation d'une grandeur cinétique.

I Intégrale première de l'énergie mécanique

$\mathcal{E}_M = \mathcal{E}_K$ (1er ordre)+ $\mathcal{E}_P$ (0^e ordre) = c^{te}.

II Intégrales premières déduites de la résultante cinétique

∗ Si le système est isolé, $\vec{p} = c^{te} \rightarrow \vec{v}_G = c^{te}$.

∗ Si $R_{x\,E\rightarrow S} = 0$, $p_x = c^{te} \rightarrow v_{Gx} = c^{te}$.

Ex : glissement parfait d'une masse m sur un plan incliné M qui glisse aussi sur le sol. Calcul de l'accélération du plan incliné. [p_x et $\mathcal{E}$ se conservent] $\Rightarrow \ddot{x} = -\dfrac{g \tan \alpha}{\dfrac{M+m}{m \cos^2\alpha} - 1}$ avec les conditions initiales : vitesses nulles.

Ex : chariot M et pendule m, ℓ. Période des oscillations : $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{6g}{\ell}\,\dfrac{M+m}{4M+m}}$. ($\mathcal{E}$ et p_x)

III Conservation d'une composante de $\vec{L}_O$

Ex : pendule sphérique (ou objet qui glisse sur un bol hémisphérique). Conservation de $L_{O\,z}$ et de $\mathcal{E}_M$.

D'où $\sin^2\theta\,\dot{\varphi} = C_{\text{constante}}$.

Energie potentielle effective : $\mathcal{E}_M = U_{eff} + \mathcal{E}_K(\mathfrak{R}_{\text{éférentiel lié à }(O,\vec{e}_z,\vec{e}_\varphi)}) = U_{eff} + \frac{1}{2}\, m\, \ell^2\, \dot{\theta}$.

IV Cas d'un choc : conservations de $\vec{p}$, $\vec{L}$, etc pendant une durée très brève

Principe des chocs : les forces qui sont bornées ne sont plus prises en compte.

$\Delta\vec{p} = \vec{R}\,\Delta t$ $\qquad\qquad \Delta\vec{L}_O = \vec{m}_O\,\Delta t$

Ex : clou et marteau. Choc mou $\Rightarrow \mathcal{E}_M \neq c^{te}$.

1^e phase : choc très bref.

2^e phase : enfoncement. Les forces sont bornées

L'enfoncement $e = \dfrac{M^2\, V_0^2}{2\,(M+m)\,(f_D - (M+m)g)}$.

$|\Delta\mathcal{E}_K / \mathcal{E}_{K\,\text{marteau}}| = m / (M+m)$ → pour les géologues ou les menuisiers, on propose des marteaux ≠...

Ex : balançoire. C'est un oscillateur paramétrique (pour qu'il tourne, on modifie ses paramètres J et a).

θ varie entre $-\alpha$ et α. ThEc entre différents instants. On a : $1 - \cos\alpha = \dfrac{\Gamma_f(J_2 + J_1)\,\alpha}{m(a_1J_1 - a_2J_2)}$.

Ex : percussion d'un pendule pesant. [...] La réaction de l'axe est bornée si J = mab → forme des marteaux.

Ex : rebond d'une sphere sur une surface avec frottements... Hyp : la balle glisse sur le mur pendant tout le choc et la vitesse de glissement est négative. [...]

V Problèmes avec fils et poulies

Fil idéal : masse nulle, tension uniforme (analogies avec la pression des gaz).

Poulie sans frottement : moment d'inertie nul, tension uniforme sur la poulie.

Ex : pas lent. La force exercée par l'opérateur est 3 fois moins grande mais il faut qu'il tire plus longtemps.

Ex : deux singes pour une banane (l'un grimpe, l'autre ne bouge pas). Ils arrivent en même temps

(ThMc $\Rightarrow L_\Delta = c^{te}$ ou pfd $\Rightarrow v_1 = v_2$)

Ex : ressort (fil non idéal) qui a une masse linéique au repos μ ; raideur k. Lorsque l'on le place verticalement, sa longueur devient $\ell' = \ell_0 + \dfrac{mg}{2k}$. $\left(\text{pdf à un élément ; relation } dx - dx_0 = s\,T = \dfrac{dx_0\,T}{k\,\ell_0}\right)$

Dans ce cas, $T(x_0)$ est affine est s'annule en ℓ_0.

Ex : fil (de masse non nulle) sur une poulie de moment d'inertie non nul. TMC $\Rightarrow z = z_0\,\text{ch}(\alpha t)$.

Ex : deux singes ; poulie de moment d'inertie non nul. Alors le singe qui grimpe arrive plus vite (TMC).

9 – Oscillateurs

I Oscillateur harmonique à une dimension

• 2 cas : ∗ $\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2\, x$.

∗ $\mathcal{E}_P = \mathcal{E}_P(x_0) + \mathcal{E}_P'(x_0)\,(x - x_0) + \frac{1}{2}\,\mathcal{E}_P''(x_0)\,(x - x_0)^2 + ...$

Si x_0 est une position d'équilibre et $\mathcal{E}_P''(x_0) \neq 0$, on pose $X = x - x_0$.

La force associée est donc $\vec{f} = -\,\overrightarrow{\text{grad}}\,\mathcal{E}_P = -\,\mathcal{E}_P''(x_0)\,X\,\vec{e}_x$. TRC → $m\,\frac{d^2X}{dt^2} = -\,\mathcal{E}_P''(x_0)\,X$.

Un oscillateur harmonique se caractérise par un puits de potentiel parabolique.
Les trajectoires de phases d'un oscillateur harmonique sont des ellipses.

• Remarques générales sur les trajectoires de phase :

∗ elles sont décrites dans le sens horaire.

∗ pour une équation différentielle autonome, du type $F\left(\frac{d^2X}{dt^2}, \frac{dX}{dt}, X\right) = 0$ c'est-à-dire quand t n'intervient pas explicitement, les trajectoires de phases ne peuvent pas se couper : il n'y a que des "évolutions spontanées".

∗ dans le plan de phase, un attracteur est tel que toutes les trajectoires de phases convergent vers lui.

∗ le portrait de phase d'un système *réversible* (oscillateur non amorti par exemple) est invariant par symétrie par rapport à l'axe Ox.

II Oscillateur harmonique à une dimension amorti

• Amortissement linéaire. $\frac{d^2Z}{dt^2} + 2\lambda\,\frac{dZ}{dt} + \omega_0^2\,Z = 0$ avec $2\lambda = \frac{\omega_0}{Q}$.

Les termes constant ne doivent pas apparaître dans l'équation différentielle si l'origine est bien choisie.

Si $\Delta\mathcal{E}$ est l'énergie perdue pendant une période, on établit que $\mathcal{E} \approx Q\,\Delta\mathcal{E}$.

O est l'attracteur dans la plan de phase.

• Oscillateur amorti par un frottement solide. Succession de demi-périodes, la transition s'effectuant à vitesse nulle. Les amplitudes des oscillations sont en progression arithmétique.

• Oscillateur amorti excité par un échelon : on effectue un changement d'origine. Les conditions initiales ne sont alors pas nulles.

III Oscillateur harmonique entretenu

1 – Oscillateur entretenu par une source sinusoïdale

$\frac{d^2Z}{dt^2} + 2\,\lambda\,\frac{dZ}{dt} + \omega_0^2\,Z = \omega_0^2\,a\cos(\omega t)$. (ressort, frottement fluide, action ext.)

$Z(t) = Z_{transitoire}(t) + Z_{forcé}(t)$. $Z_{transitoire}$ est obtenu en résolvant l'équation différentielle sans second membre.

On trouve $Z_{forcé}$ grâce aux images complexes. Le portrait de phase est assez compliqué, une ellipse y est attracteur.

Le régime forcé est indépendant des conditions initiales.

Ex : pendule que l'on fait osciller horizontalement.

2 – Oscillateur auto entretenu

Un oscillateur est auto-entretenu lorsqu'une source extérieure d'énergie vient compenser les pertes dues aux frottements. Contrairement aux oscillations forcées, la source d'énergie est asservie aux oscillations.

Le modèle le plus simple est celui de Van der Pol :

$$\frac{d^2X}{dt^2} + 2\,\lambda\,\frac{dX}{dt}\,(X^2 - X_0^2) + \omega_0^2\,X = 0.$$

∗ Si $\lambda << 1$, X est voisin de $a\cos(\omega t + \varphi)$. En bricolant ($W_{frot} \to 0$), on obtient $a = 2X_0$.

D'où une ellipse attractrice.

∗ Si $\lambda >> 1$, le cycle attracteur est déformé, et x(t) n'est pas sinusoïdal. En bricolant, on trouve quand même une amplitude voisine de $2X_0$.

3 – Oscillateurs paramétriques

Les oscillations sont entretenues par la modification d'un des paramètres de l'oscillateur en fonction du temps.
Dans l'équations différentielle, les coefficients ne sont alors pas constants.

• Ex : balançoire (Cf avant)

• Ex : pendule que l'on fait osciller verticalement.

$$\ddot{\theta} = \left(-\omega_0^2 + \frac{\omega^2 a}{\ell}\cos(\omega t)\right)\sin\theta.\ \text{Résonance pour } \omega = 2\omega_0.$$

• Ex : opérateur qui oscille un fil tendu pris dans une poulie et avec une masse de l'autre côté.
ThMc sur l'axe de la poulie :

$$\ell\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{\theta}\,\dot{\ell} + g\sin\theta = 0 \quad \text{avec } \ell = \ell_0 + a\cos(\omega t).$$

En simplifiant : $(\ell_0 + a\cos\omega t)\,\ddot{\theta} - 2\,a\,\omega\sin(\omega t)\,\dot{\theta} + g\,\theta = 0$.

∗ Si $a = 0$, $\theta = \theta_0\cos(\omega_0 t + \varphi)$ "calcul pertubationnel".

∗ Si $a << \ell_0$, $\theta = \theta_0(t)\cos(\omega_0 t + \varphi)$ où $\theta_0(t)$ est lentement variable.

En regroupant des termes et en effectuant des moyennes, on obtient :

∗ Si $\omega = 2\omega_0$, $\dfrac{d(\theta_0^2)}{dt} = \dfrac{7\,a\,\omega_0^2\sin(2\varphi)}{2\,g}\,\theta_0^2$. $\Rightarrow \theta_0$ est une exp. croissance si $\sin(2\varphi) > 0$.

∗ Sinon, θ_0 est constant.

Cette résonance à la fréquence double de la fréquence propre est caractéristique des oscillations paramétriques.

IV Oscillateur non harmonique : le pendule

∗ Le mouvement d'un pendule est régi par l'équation différentielle : $d^2\theta/dt^2 + \omega_0^2\sin\theta = 0$.
On aborde ici le cas des grandes oscillations. Le pendule effectue des tours sans position de vitesse nulle si son énergie est suffisante pour atteindre la position $\theta = \pi$. Par exemple, s'il est lancé à $\theta = 0$ avec la vitesse angulaire ω_1, le mouvement est révolutif si $\omega_1 > 2\,\omega_0$ (si le fil est souple, la condition devient $\omega_1 > \sqrt{5}\,\omega_0$).
Selon les conditions initiales, on a un mouvement oscillatoire ($\mathcal{E}$ faible) ou révolutif ($\mathcal{E}$ important).
Si on introduit un amortissement, le pendule finit par acquérir un mouvement oscillatoire amorti autour de l'un des attracteurs : $\theta_{\text{attracteur}} \in 2\,\pi\,\mathbb{Z}$.
∗ La formule de Borda donne une meilleure approximation de la période d'oscillation, qui fait intervenir l'angle maximal θ_0 : $T = T_0\sqrt{1 + \dfrac{\theta_0^2}{16}}$.
Ex : pendule isochrone.

V Oscillateurs couplés

♦ N oscillateurs linéaires non amortis couplés.

Ex : triangle ressort. C'est immonde. Bref, on a $\dfrac{d^2x_i}{dt^2} = f(x_1, ..., x_N)$ où x_i est une variable.

C'est un système de N équations différentielles à N inconnues.
La matrice du système est symétrique donc diagonalisable (car actions réciproques).

Il existe un changement de base où $\dfrac{d^2X_i}{dt^2} = -\,\omega_i^2\,X_i$. ω_i sont les pulsations propre du système à N degrés de liberté.

La solution générale est une combinaison linéaire de vibrations sinusoïdales de pulsations égales aux pulsations propres : c'est une combinaison linéaire des "<u>modes propres</u>".

2N conditions initiales (x_i et $\dot{x}_i$) et 2N coefficients à trouver.

♦ Ex : Deux masses identiques accrochées à 3 ressorts (k, ℓ_0 ; k', ℓ'_0 ; k, ℓ_0) accrochés au masses et au bâti. En notant Z_1 et Z_2 les cotes des masses par rapport à leur position d'équilibre, $X = Z_1 + Z_2$ et $Y = Z_1 - Z_2$, X et Y sont sinusoïdales du temps, de pulsations ω_0 et $\sqrt{\omega_0 + 2\omega'_0}$. Si le couplage est faible ($k' << k$), les deux pulsations propres sont proches ; il y a un phénomène de <u>battement</u>. Il y a échange permanent d'énergie entre les 2 oscillateurs.

♦ Ex : N masses accrochées à N + 1 ressorts. Méthode de résolution par des suites définies par une relation de récurrence, en utilisant des images complexes. Les pulsations propres sont $\omega_p = \omega_0\sqrt{1 - \cos\left(\dfrac{p\pi}{N+1}\right)}$.

Solution générale : $$x_n = \sum_{p=0}^{N} A_p\,\sin\left(\frac{pn\pi}{N+1}\right)\cos(\omega_p t + \varphi_p)$$

2N paramètres inconnus : A_p et φ_p.

2N conditions initiales : x_n et $\dot{x}_n$.