

$s(x, t) = s_0 \cos(\omega_1 t - \omega_1 x/v_1) \cos(\omega_2 t - \omega_2 x/v_2)$. v_2 est appelée vitesse de groupe ; c'est la vitesse de l'enveloppe, support de l'information. Si le milieu n'est pas dispersif, $v_1 = v_2$. Sinon, $v_2 = v_g \neq v_1$, et $v_g = \frac{d\omega}{dk}$

⊗ Il faut prendre $\frac{d\omega}{dk}$ pour $\omega = \omega_{\text{porteuse}} = \omega_1$.

• Cas plus général : signal modulé en crête. $s(x, t) = \int_0^\infty S(\omega) \cos(\omega t - k(\omega)x) d\omega$ si le signal n'est pas périodique.

La phase est $\varphi = \omega t - k(\omega)x$. Il y a une crête \Leftrightarrow les signaux sont en phase $\Leftrightarrow \varphi$ est indépendant de ω (ordre 1)
 $\Leftrightarrow x = v_g t$ avec $v_g = \frac{d\omega}{dk}$.

Pour des développements à des ordres > 1 , on constate que le signal se déforme.

Si la propagation est non dispersive, on retrouve $v_g = v_\varphi$.

2 – Propagation des ondes électromagnétiques dans le vide

I Equation de propagation

$\Delta \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$. De même pour \vec{B} , \vec{A} et V , si \vec{A} vérifie la jauge de Lorentz : $\text{div } \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0$.

II Solutions en ondes planes

Une onde est plane si dans un plan orthogonal à la direction de propagation, \vec{E} et \vec{B} sont uniformes. Les plans orthogonaux à la direction de propagation sont appelés plans d'onde.

III Ondes planes progressives

L'onde électromagnétique est transverse : $\vec{E}_{\text{propagation}}$ et $\vec{B}_{\text{propagation}}$ sont orthogonaux à la direction de propagation.

Les équations de Maxwell donnent : $\vec{B} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c}$.

Si l'onde est plane et non progressive, $\vec{E}_{\text{propagation}}$ et $\vec{B}_{\text{propagation}}$ restent orthogonaux à la direction de propagation. Rem : souvent, $\vec{E} \perp \vec{B}$. Pour que ça ne soit pas le cas, on peut superposer un \vec{B} (courant) et un \vec{E} (charges) séparément.

IV Ondes planes progressives monochromatiques

On définit le vecteur d'onde : $\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{u}$. En notations complexes, les OPPMs sont de la forme :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})) \text{ et } \vec{B} = \vec{B}_0 \exp(i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})) \text{ avec } \vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}.$$

Des calculs montrent qu'alors, on peut remplacer $\vec{\nabla}$ par $-i \vec{k}$.

V Propagation de l'énergie

Pour une OPP : $e_{\text{vol}} = \epsilon_0 E^2$ Les contributions de \vec{E} et de \vec{B} sont égales.
 $\vec{R} = \frac{E^2}{\mu_0 c} \vec{e}_x$. Faiblard pour un laser (évaluation)

VI Polarisation d'une onde plane progressive

Polarisation = orientation du champ \vec{E} .

- Polarisation rectiligne. \vec{E} garde une direction constante.
- Polarisation elliptique d'une OPPM. Pour l'observateur ébloui, la polarisation elliptique est dite gauche s'il voit \vec{E} tourner dans le sens direct. Bestiaire...

On peut décomposer une OPPM en 2 ondes polarisées rectilignement (y et z) ou en 2 ondes polarisées circulairement [demo si l'onde de départ est rectiligne]

[+] Réflexion-réfraction dans le plan |, suivant la polarisation de \vec{E} :

⊗⊙ il y a réflexion-réfraction sans changement de polarisation.

↖↗ il n'y a que réfraction (sans trop changer de polarisation).

Cela permet de créer des lunettes qui filtrent la lumière du soleil réfléchi sur la mer. [ne garde que $\uparrow\downarrow$]
(Cf. fin du cours d'optique)

3 – Rayonnement dipolaire électrique

Soit une charge q qui bouge selon Oz. Soit $p = qz$.

I Potentiels

Avec la jauge de Lorentz, et pour $z_{\max} \ll \lambda$,

$$\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0 \dot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{4 \pi r} \vec{e}_z \quad V(M, t) = \frac{p\left(t - \frac{r}{c}\right) \cos \theta}{4 \pi \epsilon_0 r^2} + \frac{\mu_0 c \dot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right) \cos \theta}{4 \pi r}$$

II Calcul du champ rayonné

On traite le cas du rayonnement : $r \gg \lambda \gg z_{\max}$.

- Technique de dérivation : $\text{grad}\left(f\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) = -\frac{\dot{r}}{c} \vec{e}_r$
- Calcul complet : utilisation des lois $\vec{B} = r\dot{\theta} \vec{A}$ etc.

$$\vec{E}(M, t) = \frac{\mu_0 \ddot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right) \sin \theta}{4 \pi r} \vec{e}_\theta \quad \vec{B}(M, t) = \frac{\mu_0 \dot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right) \sin \theta}{4 \pi c r} \vec{e}_\phi$$

- Calcul light : on ne garde que les termes prépondérants.

III Structure du champ rayonné à grande distance

On considère toujours $r \gg \lambda \gg z_{\max}$.

- $\vec{B}(M, t) = \frac{\vec{e}_r \wedge \vec{E}(M, t)}{c}$. Localement, on a une structure d'onde plane progressive.
- Polarisation rectiligne de \vec{E} dans le plan défini par \vec{p} et \vec{r} , suivant \vec{e}_θ .
- Amplitude de l'onde : décroît comme $1/r$ et proportionnelle à $\sin \theta$ et à \ddot{p} .

IV Puissance rayonnée

Par le calcul du vecteur de Poynting, on trouve $\frac{d\mathcal{P}}{d\Omega}(M, t) = \frac{\mu_0 \dot{p}^2\left(t - \frac{r}{c}\right) \sin^2 \theta}{16 \pi^2 c}$.

Il n'y a pas de terme en $(1/r)^m$ car il y a conservation d'énergie.

Cette grandeur est proportionnelle à $\sin^2 \theta$.

Diagramme de rayonnement = surface des points P tels que $OP(\theta, \varphi) = k \frac{d\mathcal{P}}{d\Omega}(\theta, \varphi)$. Ressemble à ∞ .

Puissance totale rayonnée à travers une sphère de rayon r : $\mathcal{P} = \frac{\mu_0 \dot{p}^2\left(t - \frac{r}{c}\right)}{6 \pi c}$ (Formule de Larmor)

Pour une variation sinusoïdale, $\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{12 \pi c}$. Pour une charge accélérée, $\mathcal{P} = \frac{\mu_0 a^2 q^2}{6 \pi c}$.

V Exemples de rayonnement par accélération de charges (ou rayonnement dipolaire)

- Antenne : des électrons ont des mouvements sinusoïdale le long de l'antenne.
Rem : En réception, une antenne capte \vec{E} .
- Rayonnement synchrotron : dans un cyclotron-like, il y a une grande déperdition d'énergie par rayonnement. Intérêt pour fabriquer des rayons X.
- Diffusion par les atomes. Champ extérieur variable \Rightarrow moment induit variable \Rightarrow rayonnement.
Explication de la couleur du ciel. Les hautes fréquences sont favorisées.
Polarisation de la lumière diffusée par l'atmosphère : si l'observateur vise une direction orthogonale aux rayons solaires, alors la lumière diffusée est polarisée rectilignement.

4 – Interaction entre une onde électrom. et un métal

I Métal

Loi de conduction : (BF) $\vec{j} = \sigma (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$

(HF) $\vec{j} = \underline{\sigma} \vec{E}$ avec $\underline{\sigma} = \frac{\sigma_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}$

Valeur critique : $f \sim 10^{10}$ Hz

II Propagation d'une OPPM dans un métal ohmique

On suppose $f < 10^{10}$ Hz. On cherche une solution des équations de Maxwell.

[utilisation de $-i\vec{k}$] C'est une onde transverse ; la relation de dispersion est $k^2 = -i \mu_0 \sigma \omega$.

Donc $k = \pm \frac{1-i}{\delta}$ avec δ : épaisseur de peau. La solution est de la forme $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \exp\left(i\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)\right)$.

Il y a donc propagation et atténuation. L'oscillation est quasiment invisible.

Bilan d'énergie : $-\frac{d\langle R \rangle}{dx} = \sigma \langle E^2 \rangle$. [demo + longue verification]

III Réflexion d'une OPPM sur un plan métallique sous incidence normale

On considère une onde incidente $\vec{E}_i(x, t) = E_{i0} \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y$.

Onde incidente \Rightarrow courants de surface du métal \Rightarrow dipôles oscillants (électrons) \Rightarrow onde émise
 \Rightarrow onde réfléchi dans le vide, et champ opposé au champ de l'onde incidente dans le métal

On a : $\omega = \omega_r = \omega_t$, et $\vec{k}_r = -k_{\text{vide}} \vec{e}_x$ et $\vec{k}_t = k_{\text{metal}} \vec{e}_x$. [demo]

Continuité sur le plan $x = 0$ donne le coefficient de réflexion : $\frac{E_{0r}}{E_{0i}} = r = -1 + (1+i) \frac{\delta \omega}{c}$ pour $\delta \omega \ll c$.

La réflexion est quasiment totale.

IV Réflexion d'une OPPM sur un plan conducteur parfait sous incidence normale

$\sigma = \infty, \delta = 0, \rho = 0, \vec{j} = \vec{0}, \vec{E}_t = \vec{0}$. Continuité sur le plan implique : $r = -1$.

• Structure du champ électromagnétique résultant de la superposition du champ incident et du champ réfléchi :

$$\vec{E}(x, t) = 2 E_0 \sin(kx) \sin(\omega t) \vec{e}_y. \text{ On parle d'onde stationnaire.}$$

Ventre d'oscillation = abscisses x où l'amplitude est maximale.

Nœuds d'oscillation = abscisses x où l'amplitude est nulle.

Rem : les solutions stationnaires (c'est-à-dire $s(x, t) = F(x) G(t)$) et permanentes (sinusoïdales) de l'équation de D'Alembert sont harmoniques (sommées de 2 OPPM de même amplitude qui se propagent en sens inverse).

On a : $\vec{B}(x, t) = 2 (E_0/c) \cos(kx) \cos(\omega t) \vec{e}_z$. Donc \vec{E} et \vec{B} vibrent en quadrature.

• Vecteur de Poynting : $\vec{R} = (E_0^2/\mu_0 c) \sin(2kx) \sin(2\omega t) \vec{e}_x$. L'énergie ne traverse pas les nœuds. Pas de propagation d'énergie. On a de plus : $\langle e_{\text{vol}} \rangle_t = \epsilon_0 E_0^2$ indépendant de x .

• Charges et courants surfacique : $\sigma = 0$ et $\vec{j}_s = (2 \vec{E}_0 / \mu_0 c) \cos(\omega t) \vec{e}_y$.

• Pression de radiation : $\mathcal{P}_{\text{rad}} = (2 E_0^2 / \mu_0 c^2) \cos^2(\omega t)$. [AN : faible]

[approche en ne considérant que l'onde incidente, ou par considérations volumiques, ou photoniques]

V Propagation dans un plasma

Hypothèses : • Pas de forces d'interaction entre particules : plasma "dilué".

• Ions immobiles

• $v \ll E$.

• déplacement des électrons $\ll \lambda$.

Loi de conduction : $\underline{\sigma} = -i \frac{N e^2}{m \omega}$. On cherche une solution en OPPM.

Relation de dispersion : $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\mu_0 N e^2}{m} = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$ avec ω_p appelée pulsation de plasma.

• Si $\omega < \omega_p$: onde stationnaire. Réflexion. Pas de perte d'énergie lors de la réflexion.

• Si $\omega > \omega_p$: onde progressive. Le plasma est transparent pour cette onde.

Dans ce cas, $v_\phi = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}} > c$. Mais ce n'est pas ce qui porte l'information.

$v_g = c \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2} < c$. On a donc $v_g v_\phi = c^2$ (ce qui s'avèrera être vrai lorsqu'il n'y a pas de dissipation d'énergie).

On a de plus v_g = vitesse de propagation de l'énergie. Analogie avec un fluide pour le débit massique ($D = \rho S v$)

Débit d'énergie = $e_{\text{vol}} S v_{\text{énergie}} = R S$. Bref : $v_{\text{énergie}} = \frac{R}{e_{\text{vol}}}$.

Attention : dans e_{vol} , il faut compter e_K .

5 – Guides d'ondes

Un guide d'onde est un dispositif qui permet d'avoir un meilleur rapport $\frac{\text{signal détecté}}{\text{signal émis}}$ grâce à des parois réfléchissantes.

I Exemple : mode "TE_{0p}" d'un guide rectangulaire

• Guide rectangulaire = tuyau à section rectangulaire (dimensions a et b).

TE : transverse électrique (c'est-à-dire $\vec{E}_z = \vec{0}$)

o_p : indépendant de x ; mode p. On a donc $\vec{E} = E_0(y) \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x$.

En l'injectant dans l'équation de D'Alembert, on obtient : $E_0''(y) = -\alpha^2 E_0(y)$ avec $\alpha^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2$.

Les conditions limites impliquent qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha b = p\pi$.

La solution générale est de la forme $E_0(y) = A \cos\left(\frac{p\pi y}{b} + \Phi\right)$ avec $\Phi = (p+1)\pi/2$? $0 : \frac{\pi}{2}$.

• b fixé : le mode TE_{0p} peut se propager si $\omega > \frac{p\pi c}{b} = \omega_{c,p}$: pulsation de coupure.

En notant λ_0 la longueur d'onde dans le vide, l'onde passe si $\lambda_0 < 2b/p$.

Pas de propagation possible si $\lambda > 2b$. Propagation "monomode" (p=1) si $\frac{1}{2} \lambda_0 < b < \lambda_0$.

Vitesse de phase : $v_\phi = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{p^2 \lambda_0^2}{4b^2}}} > c$. Vitesse de groupe : $v_g = \frac{c^2}{v_\phi} = c \sqrt{1 - \frac{p^2 \lambda_0^2}{4b^2}}$.

• On peut calculer \vec{B} avec MF. On constate que $\vec{B} \perp \vec{E}$ et $B_z \neq 0$. L'onde n'est pas transverse magnétique.

Interprétation avec la réflexion de signaux sur les parois...

• Densités superficielles de charges (discontinuité de \vec{E}).

• Densités superficielles de courant (discontinuité de \vec{B}).

Cf Schéma plus loin.

II Autres modes de propagation

• Modes TM_{0p} : \vec{B} est orthogonal à la direction de propagation, et est indépendant de x.

Si on cherche des solutions du type $\vec{B} = B_0(y) \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x$, on arrive à la solution nulle.

Si on cherche des solutions du type $\vec{B} = B_0(y) \cos(\omega t - kz) \vec{e}_y$, on arrive à la solution nulle.

Donc le mode TM_{0q} est impossible. Le plus simple des modes TM est le mode TM₁₁.

Rem : Le mode TEM est impossible.

• Cas général : on a 6 fonctions de \mathbb{R}^4 (dépendant de x, y, z, t) dans \mathbb{R} à déterminer : E_x, \dots, B_z .

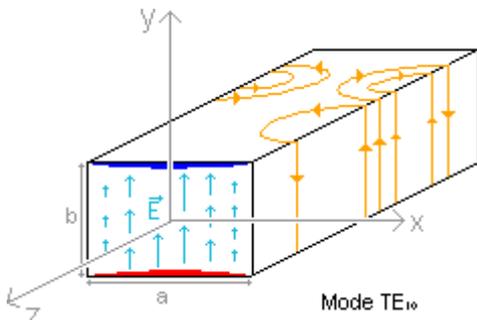
MF et MA montrent qu'en fait, il suffit de connaître $E_{0z}(x, y)$ et $B_{0z}(x, y)$.

• Détermination des modes TE_{pq} : $E_{0z} = 0$. Les solutions des équations de D'Alembert qui vérifient les conditions limites

suivent la relation de dispersion : $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{p^2 \pi^2}{a^2} - \frac{q^2 \pi^2}{b^2}$ avec p et q $\in \mathbb{N}$.

Une longueur λ_0 ne peut passer que si $\exists (p, q) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0,0)\}, \frac{4}{\lambda_0^2} > \frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2}$.

Pour avoir un guide monomode (λ_0 donné) : seul le mode TE₁₀ (p=1, q=0) passe, ce qui aboutit à : $b < \frac{\lambda_0}{2} < a < \lambda_0$.



• Bilan de puissance pour le mode TE₁₀ : Calcul de $\langle \langle R_z \rangle \rangle_x$ et de $\langle \langle e_{vol} \rangle \rangle_x$ pour constater : $v_{\text{énergie}} = v_g$.

III Guides cylindriques

• Guide creux : $E_r = f(r) g(\theta) \exp(i(\omega t - kz))$, de même pour E_θ et E_z . Il existe toujours des modes TE et TM.

TEM reste impossible.

• Guide coaxial : le TEM est possible. [calculs !]

\vec{E} est radial et \vec{B} est orthoradial

OPTIQUE PHYSIQUE

1 – Chemin optique

Soit une source optique. On cherche à trouver des relations entre les phases des ondes en des points différents de l'espace.

Rayon lumineux = trajectoire tangente en tout point au vecteur d'onde.

I Cas d'une OPPM

• On pose $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(i(\omega t + \Phi))$

\vec{k} est uniforme. On a : $\Phi(M) = \Phi(O) - \vec{k} \cdot \vec{OM}$.

$\varphi_{O \rightarrow M} = \Phi(M) - \Phi(O) = -\vec{k} \cdot \vec{OM}$. (si \vec{OM} est colinéaire à \vec{k} , on peut simplifier...)

Dans un milieu transparent non vide, on définit l'indice n du milieu tel que $n = \frac{c}{v_\varphi}$. On a alors $k = n \frac{2\pi}{\lambda_0}$.

Chemin optique : $(AB) = n\bar{AB}$ si A et B sont dans un milieu d'indice n . On a : $\varphi_{A \rightarrow B} = \Phi(B) - \Phi(A) = -\frac{2\pi}{\lambda_0} (AB)$.

⚠ Attention aux conventions d'orientation pour la phase.

• Cas d'une onde sphérique : on a la même relation.

• Traversée d'un dioptre. $\vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_r + \vec{E}_t$. \vec{E}_\parallel est continu \Rightarrow la projection de \vec{k} sur le dioptre est la même.

Réflexion : $\theta_r = \theta_i$. Réfraction : $n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t$. [demo]

• Evolution de la phase. Lors de la traversée d'un dioptre (réfraction), $\Delta\Phi = 0$.

Pour la réflexion : $n_1 > n_2$ $\Delta\Phi = 0$. (quand il peut y avoir réflexion totale, pas de $\Delta\Phi$)

$n_1 < n_2$ $\Delta\Phi = \pi$.

Métal $\Delta\Phi = \pi$.

• Passage d'une onde par un point de convergence : $\Delta\Phi = \pi$

• Onde à travers plusieurs milieux : $(AB) = \sum n_i \bar{O}_i O_{i+1}$. Grâce à ça, $\varphi_{A \rightarrow B} = -\frac{2\pi}{\lambda_0} (AB)$.

• Faisceau lumineux réel (limité en taille) : si largeur $\gg \lambda$ et dimensions caractéristiques du système optique $\gg \lambda$, on peut faire l'approximation d'onde plane.

• Onde dans un milieu d'indice continument variable : $(AB) = \int n(P) \bar{d\ell}_P$.

II Principe de Fermat et théorème de Malus

1 – Théorème de Malus

Surface d'onde relative à une source S = ensemble des points M tels que (SM) est constant = ensemble des points M tels que la durée de propagation de S à M est constante.

(Th. de Malus) "Les rayons lumineux sont orthogonaux aux surfaces d'onde." [~démô 3 milieux]

2 – Chemin optique entre 2 points conjugués par un système stigmatique

Un système est stigmatique pour (A, A') si tout rayon passant par A passe par A' .

Le théorème de Malus affirme qu'alors, (AA') a la même valeur pour tous les rayons lumineux. [sphère A']

Applications : • Miroir plan : $(AA') = 0$

• Miroir stigmatique pour un couple (A, A') donné. On cherche une surface telle que $\bar{AI} + \bar{IA}' = c^{te}$.
On obtient une ellipsoïde de révolution de foyers A et A' ou un hyperboloïde de révolution de foyers A et A' .

• Surface réfractante stigmatique pour un couple (A, A') : existe (surface du 4^e ordre) mais n'est stigmatique que pour ce couple.

• Stigmatisme approché du miroir sphérique. On retrouve des relations ...

3 – Principe de Fermat

Soient A et B deux points. Pour chaque courbe Γ passant par A et B , on définit l'intégrale d'action $L = \int_\Gamma n \, d\ell$.

(Pr. De Fermat) "La courbe Γ qui correspond au rayon lumineux AB est telle que L est extrémale vis à vis des chemins voisins."

Exemples : • Milieu homogène (n uniforme) : L minimale pour la ligne droite.

- Couple de points conjugués : L est constante donc extrémale.
- Loi de Descartes pour la réfraction : $(AI) + (IB)$ extrême.
- Il peut y avoir deux minima relatifs, et aussi un maximum

Rem : le principe de Fermat peut être une base de l'optique géométrique.

Interprétation ondulatoire : on place une source en A . Si (AB) est non extrême, les phases sont aléatoires, la somme des ondes sera nulle. Si (AB) est extrême, les phases seront voisines d'une phase moyenne Φ_0 , et le champ résultant aura une phase voisine de Φ_0 . Donc parmi les chemins possibles des rayons lumineux, il y aura non destruction que pour (AB) extrême.

Limitations de l'optique géométrique : elle suppose que les faisceaux lumineux ont une structure très proche de structures d'onde planes. Elle n'explique pas des phénomènes de diffraction mais permet l'étude de tout système où les distances caractéristiques sont très grandes devant la longueur d'onde.

2 – Ondes lumineuses

I Ondes électromagnétiques

γ	X	UV	Visible	IR	Radio
1 nm	50 nm	400 nm	800 nm	1 mm	
Source : noyau	Sources : électrons des couches à énergie haute	Domaine de l'optique : les sources sont les molécules et les atomes. L'émission est aléatoire (phase inconnue).			Ondes que l'on peut fabriquer artificiellement. On est maître de leur phase, etc.

On ne sait pas faire de matériel électronique qui puisse suivre en temps réel des fréquences du visible ($\sim 10^{15}$ Hz).
Pour les ondes optiques, on ne peut que mesurer la moyenne quadratique de E.

II Caractéristiques d'une onde lumineuse

- Emission d'un atome (ou d'une molécule) : Onde quasimonochromatique limitée dans le temps.

$$E(t) = F(t) \cos(\omega t + \Phi) \quad \text{avec } F : \text{enveloppe}$$

Pour l'émission d'une source réelle : $E(t) = \sum_{N \text{ atomes}} F_i(t) \cos(\omega t + \Phi_i) = E_0(t) \cos(\omega t + \Phi(t))$

$E_0(t)$ et $\Phi(t)$ sont à variation très lente par rapport à la pulsation ω . D'où les simplifications :

* Dorénavant, on considère $E_0 = c^te$.

* On divise l'onde en trains d'onde de durée τ fixe, où Φ est constant sur chaque train d'onde.

- Profil spectral d'un train d'onde : $E(t) = F(t) \cos(2\pi\nu_0 t + \Phi) = \int_0^\infty f(\nu) \cos(2\pi\nu t + \Phi(\nu)) d\nu$ avec $f(\nu)$ en forme de cloche centrée en ν_0 .

* Ex : si $f(\nu)$ est une fonction rectangle de largeur $\Delta\nu$ centré en ν_0 et $\Phi(\nu) = 0$, $E(t)$ est un sinus de fréquence ν_0 modulé par un sinus cardinal de largeur $\tau = 2/\Delta\nu$.

* Ex : si $f(\nu) = f_0 \exp\left(-\frac{|\nu - \nu_0|}{\Delta\nu}\right)$ et $\Phi(\nu) = 0$, $E(t)$ est un sinus de fréquence ν_0 modulé par une fonction lorentzienne, et $\tau = 1/(\pi \Delta\nu)$

De manière générale, $\tau \approx \frac{1}{\Delta\nu}$, et typiquement, pendant τ se produisent 10^4 petites oscillations.

$$T_{\text{visible}} \approx 10^{-14} \text{ s}$$

$$T_{\text{train}} \approx 10^{-11} \text{ s}$$

$$T_{\text{capteur}} \approx 10^{-6} \text{ s}$$

II Détecteur

Tous les détecteurs optiques sont sensibles à $\langle E^2 \rangle_{\tau_D} = K \langle \|\vec{R}\|^2 \rangle$, avec τ_D : temps de réponse du détecteur.

Œil : $\tau_D = 0,1 \text{ s}$.

Cellule photoélectrique : $\tau_D = 1 \mu\text{s}$.

Photomultiplicateur : $\tau_D = 10^{-11} \text{ s}$.

Pour les détecteurs usuels, $\tau_D \gg \tau$: on fait une moyenne sur un grand nombre de trains d'onde.

- Superposition de 2 OPPMs sur un détecteur, si \vec{E}_1 et \vec{E}_2 sont parallèles.

* si $\omega_1 \neq \omega_2$, $\langle E^2 \rangle_{\tau_D} = \langle E_1^2 \rangle_{\tau_D} + \langle E_2^2 \rangle_{\tau_D}$.

* si $\omega_1 = \omega_2$ et si les sources sont distinctes, $\langle E^2 \rangle_{\tau_D} = \langle E_1^2 \rangle_{\tau_D} + \langle E_2^2 \rangle_{\tau_D}$.

* si $\omega_1 = \omega_2$ et si les 2 ondes proviennent d'une même source,

$$\langle E^2 \rangle_{\tau_D} = \langle E_1^2 \rangle_{\tau_D} + \langle E_2^2 \rangle_{\tau_D} + \text{terme d'interférence.}$$

- Représentation scalaire d'une onde lumineuse : dans le cas où E_1 et E_2 sont approximativement parallèles, on note

* \underline{s} : (signal lumineux), grandeur proportionnelle à la mesure du champ électrique. On a : $\underline{s} = \underline{s}_0 \exp(i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}))$.

* I : (intensité lumineuse, ou éclairement) un nombre tel que $I = K \langle \underline{s}^2 \rangle_{\tau_D}$

Superposition d'ondes :

Dans le cas usuel ($\omega_1 \neq \omega_2$ ou sources distinctes), $I = I_1 + I_2$. On dit que les ondes sont incohérentes.

Dans le cas rare ($\omega_1 = \omega_2$ et même sources), $I = I_1 + I_2 + \text{terme d'interférence}$. Les ondes sont cohérentes.

Ex : bulle de savon. Le déphasage dépend de l'épaisseur. Interférences constructrices ou destructrices.

3 – Interférences lumineuses

I Superposition de 2 ondes quasimonochromatiques

- On utilise l'approximation scalaire (même polarisation).
On considère 2 OPPQM qui se croisent en M (entre autres).

Si $\omega_1 = \omega_2$ et $\Phi_2(M, t) - \Phi_1(M, t) = \varphi_M$ constante, alors en M, $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\varphi_M)$. [$I = K \langle (s_1 + s_2)^2 \rangle$]
On dit qu'il y a interférence. Cette relation peut être appelée "relation fondamentale des interférences à 2 ondes".

On écrit cette relation sous la forme $I = (I_1 + I_2)(1 + C \cos \varphi)$, où $C = 2 \frac{\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}$ est appelé le contraste (ou visibilité).

C est maximal pour $I_1 = I_2$. Dans ce cas, $|C| = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$.

S'il y a N ondes cohérentes, il faut écrire : $I = K \langle (s_1 + \dots + s_N)^2 \rangle$.

- Réalisation de 2 ondes cohérentes : lame semi transparente et miroir ou 2 trous (diffraction)
Une condition nécessaire pour l'observation d'interférences est que les ondes soient issues d'une même source primaire. Interféromètre = système qui fabrique les 2 ondes à partir de l'onde primaire.
Champ d'interférence(s) = région de l'espace par où passent les 2 ondes, et où a lieu l'interférence.

- Détermination du déphasage φ_M

* Si la source primaire est ponctuelle,

$$\Phi_1(M) - \Phi(S) = -\frac{2\pi}{\lambda} (SM)_1 + \varphi_{supp1} \quad \text{et} \quad \varphi_M = -\frac{2\pi}{\lambda} ((SM)_2 - (SM)_1) + \varphi_{supp} \quad (\varphi_{supp} \in \pi\mathbb{Z})$$

$$\boxed{\varphi_M = -\frac{2\pi}{\lambda} \delta_M + \varphi_{supp}} \quad \text{avec } \delta_M = (SM)_2 - (SM)_1 : \text{différence de marche}$$

Ceci à condition que $\Phi(S)$ soit identique pour les 2 trains d'onde, c'est-à-dire si $\delta_M \ll L_C$.

$L_C = c\tau$ est appelée la longueur de cohérence et $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \delta + \varphi_{supp}\right)$.

Dans le cas contraire, il n'y a pas d'interférence.

- * Interférence entre 2 OPPM dirigées par \vec{k}_1 et \vec{k}_2 ($L_C = \infty$; $\tau = \infty$)

$$I_{max} = I_1 + I_2 + 2(I_1 I_2)^{1/2} \quad \text{pour } p \in \mathbb{Z} \quad \text{"frange claire"}$$

$$I_{min} = I_1 + I_2 - 2(I_1 I_2)^{1/2} \quad \text{pour } p \in \mathbb{Z} + 1/2 \quad \text{"frange sombre"}$$

$$\boxed{\varphi_M = (\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \cdot \vec{OM} + \Phi_0}$$

Sur les franges, $\varphi = 2p\pi$ et $\delta_M = \left(-p + \frac{\varphi_{supp}}{2\pi}\right)\lambda$ où $p \in 1/2 \mathbb{Z}$. p est appelé "ordre d'interférence".

Frange centrale = { M / $\delta_M = 0$ }. Si $\varphi_{supp} = 0$, cela correspond à une frange claire.

Dans une frange claire, $\Phi_0 + (\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \cdot \vec{OM} = 2p\pi \Rightarrow$ il s'agit d'un plan orthogonal à $\vec{k}_1 - \vec{k}_2$.

Interfrange i = écart entre 2 franges claires successives. Lors de la traversée d'une interfrange,

$$\Delta p = 1 \quad \Delta \delta = \lambda \quad \Delta \varphi = 2\pi \quad \Delta x = i$$

Petit calcul dans un repère $(\vec{k}_1 + \vec{k}_2, \vec{k}_1 - \vec{k}_2)$ donne $i = \frac{\lambda}{2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \approx \frac{\lambda}{\alpha}$. AN : c'est petit.

Application : vélocimétrie Doppler (microbilles dans un écoulement gazeux ; freq. de clignotement)

II Etude des interférences produites par 2 trous fins percés dans un écran (trous d'Young)

- Description :
- lumière rigoureusement monochromatique ($\tau = \infty, \Delta v = 0, L_C = \infty$)
 - source primaire rigoureusement ponctuelle
 - la distance entre les 2 trous est a ; celle entre les trous et l'écran est D.

L'équation des franges claires est celle d'une nappe d'une hyperboloïde de révolution à 2 nappes, d'axe $T_1 T_2$:

$$\delta_M = T_1 M - T_2 M = p\lambda - \delta_0 = c^e$$

A l'écran, on verra des morceaux d'hyperboles mais en fait, les franges sont pratiquement rectilignes.

Calcul de l'intensité lumineuse sur l'écran : $\delta_M \approx \frac{a x}{D}$ en M(x, y) où x pointe vers le haut. $i = \frac{\lambda D}{a}$

Extension : interférences créées par 2 fentes fines parallèles (fentes d'Young). On peut de plus rajouter des sources. On peut retrouver l'expression approchée de δ par un peu de géométrie...

III Systèmes interférentiels à 2 ondes

Il existe 2 systèmes différents :

- Systèmes à division de front d'onde : il y a division géométrique des faisceaux au niveau de la source (Young...)
- Systèmes à division d'amplitude : il y a division par une lame semiréfléchissante d'un faisceau unique.

IV Dispositifs à division de front d'onde

Pour chaque dispositif, on peut déterminer à partir de δ_M où de φ :

- la forme des franges
- la frange centrale
- l'interfrange

- Trous et fentes d'Young : source et écran à distances finies. Alors $\delta_M = a \left(\frac{X}{d} + \frac{x}{D} \right)$.

Rem₁ : si la source est étalée suivant x, il y a brouillage entre les différents systèmes de frange.

Rem₂ : tous les rayons lumineux d'une source non ponctuelle ne sont pas cohérents.

- Trous et fente d'Young avec source et observation à l'infini. [Gauss]

2 méthodes (Gauss et prod. scalaire) des 2 côtés $\Rightarrow \delta_M = a \left(-\frac{x}{f'_2} - \frac{X}{f'_1} \right)$.

Interfrange angulaire : λ / a (angle entre O₂ et franges claires sur l'écran)

Rem : la frange centrale est positionnée sur l'image géométrique de la source (si on enlève les trous)

- Miroirs de Fresnel : on peut se ramener au trous d'Young avec S₁ et S₂, images de S par les 2 miroirs.

Rem : la droite qui lie S₁ et S₂ est presque verticale.

- Biprisme de Fresnel : approximation en OPPM. $\varphi_M = -\frac{4\pi}{\lambda} (n - 1) A x$. [2 méthodes : OPPM et Malus]

- Demi lentilles de Binet : on se ramène aux trous d'Young.

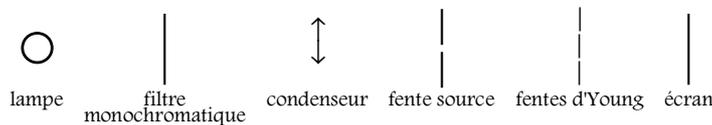
- Demi lentilles de Meslin : $\varphi_{supp} \neq 0$.

Trous d'Young	Young ∞	Mir. de Fresnel	Bip. de Fresnel	D. L. de Binet	D. L. de Meslin
					

V Cohérence spatiale pour les interféromètres à division de front d'onde

On considère des fentes d'Young éclairées par une source classique (pas un laser).

Les lumières émises par chaque atome sont incohérentes.



Soit e la taille du trou de la fente source.

En supposant que la lumière qui sort de la fente source est la somme de lumière incohérentes entre elles, on peut intégrer les intensités trouvées plus haut. On obtient

$$I(x) = I_0 \left(1 + \text{sinc} \left(\frac{\pi a e}{\lambda d} \right) \cos \left(\frac{2 \pi a x}{\lambda D} \right) \right)$$

Donc si l'épaisseur de la fente n'est pas très petite devant $\lambda d / a$, il y aura un brouillage du au fait que les interférences correspondant aux différents X ne sont pas en phase.

AN : il faut $e < 0,1$ mm, ce qui laisse passer peu de lumière.

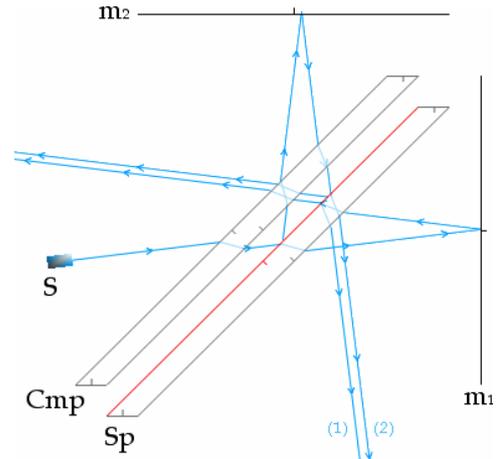
Conclusion : pour une source large spatialement incohérente, il y a une perte de contraste.

Rem : on peut mesurer e de cette manière (mesure du diamètre apparent d'une étoile).

VI Interféromètre à division d'amplitude

• Principe

On traite le cas de l'interféromètre de Michelson. La séparatrice Sp est une lame semiréfléchissante. m₁ et m₂ sont deux miroirs orientables et mobiles. La lame Cmp sans couche réfléchissante, de même épaisseur est appelée la compensatrice. Grâce à Cmp, il y a 4 traversées de lames pour les voies (1) et (2). Donc δ ne dépend plus de n donc plus de λ. Le système devient alors équivalent à une séparatrice d'épaisseur nulle.



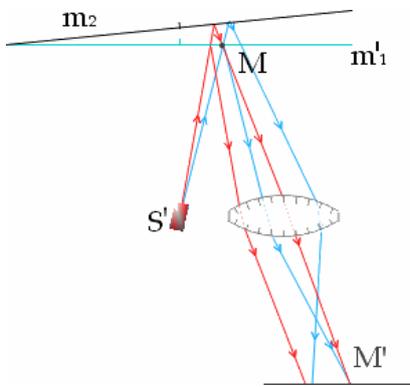
Principe de l'interféromètre de Michelson

• Interférences avec une source ponctuelle

En introduisant les images de S par m₁+Sp et Sp+m₂, S₁ et S₂, on se ramène aux trous d'Young. Les franges sont des hyperboloïdes de révolution de foyers S₁ et S₂.

• Source ponctuelle monochromatique et réglage en "coin d'air"

On incline m₂ d'un angle α. On introduit l'image m'₁ de m₁ par Sp, et S' l'image de S par Sp. On trouve donc un système équivalent.



Réglage en coin d'air

On fait l'observation sur m'₁, avec l'approximation α et β << 1 rad, si β est l'angle d'incidence du rayon bleu sur m'₁.

Le théorème de Malus donne (MM')₁ = (MM')₂ donc δ_M = δ_{M'}.

Etudier en m'₁ revient à étudier sur l'écran.

On a alors : δ = 2 α x : on voit des franges verticales, dites franges d'égal épaisseur (car elles correspondent à une même "épaisseur" de la zone m'₁-m₂ traversée : α x).

Application TP : calculer n_{butane} - n_{air} en comptant le nombre N de franges décalées lorsque l'on ouvre un briquet près d'un miroir.

$$\text{Alors } n_{\text{butane}} = n_{\text{air}} + \frac{N \lambda}{2 e_{\text{épaisseur du gaz}}}$$

• Anneaux d'égal inclinaison (l'angle (S'₁M_∞, S'₁O_∞) est constant pour un anneau) : réglage en lame à faces parallèles avec une source ponctuelle monochromatique.

On suppose cette fois que l'on translate m₂ vers le haut de e. Equivalent aux trous d'Young. On fait l'observation à l'infini (lentille). On a alors δ = 2 e (1 - r²/2 f'²). Les anneaux ne sont pas équidistants : i = λ f' / 2 e r.

L'ordre d'interférence au centre est p = 2 e / λ. ⚡ Ce n'est donc pas la frange centrale.

VIII Localisation des franges du coin d'air avec une source large à l'infini

Source ponctuelle à l'infini = source ponctuelle dans le foyer objet d'une lentille OU laser.

Source large = source non ponctuelle.

Source large à l'infini = somme de src. ponctuelles dans le foyer objet d'une lentille : OPPMs de directions différentes.

• Dans le cas d'une source ponctuelle à l'infini : Les franges sont des plans orthogonaux à (k₁ - k₂), et i = λ/2α, la frange centrale passant la l'arête du dièdre (c'est-à-dire m₂ ∩ m'₁).

• Si on a 2 sources ponctuelles à l'infini, elles sont incohérentes ⇒ on superpose l'intensité. Le seul paramètre des franges qui est différent est l'orientation. Dans une zone proche des miroirs, le brouillage est assez faible.

Cette surface, où les interférences dus aux différents points de la source coïncident, est la surface de localisation.

Aspect des franges : lignes verticales.

• Application : métrologie. On détecte les défauts d'un miroir. Les franges sont en fait des courbes de niveau en δ. On peut faire une mesure de la profondeur d'un défaut. La précision est très grande (~ 10 nm).

IX Localisation des franges pour un réglage en lame à faces parallèles avec une source large

Dans le cas de l'observation à l'infini, il n'y a pas de brouillage : δ = 2 e cos θ ne dépend pas de la source.

X Généralisation : localisation des franges avec une source large

En général, si on élargit la source, il y a un brouillage des franges, SAUF si on observe les franges sur la surface de localisation, définie par l'ensemble des points d'intersection de 2 rayons émergents du même rayon incident. [important]

La surface de localisation dépend de la direction moyenne des rayons, et du système optique.

4 – Interférences à 2 ondes avec des sources non monochr.

La source est ponctuelle, ou alors elle est large et on observe sur la surface de localisation.
 Non monochromatique ⇒ superposition de signaux monochromatiques.

I Doublet du sodium

Doublet = 2 raies voisines de même intensité.

Spectre d'émission : 2 raies très voisines vers $\lambda_0 = 589 \text{ nm}$. $\Delta\lambda \sim 0,1 \text{ nm}$. Elles ont même intensité (histoire de spins).
 On définit le nombre d'ondes : $\sigma = 1/\lambda$.

Interférogramme = diagramme $I(\delta)$.

On a $I = I_1 + I_2 =$ un sinus modulé par un sinus lent.

Entre 2 franges : $\Delta\delta = \lambda_0$.

Variation de phase rapide de 2π .

Entre 2 extinctions de contraste : $\Delta\delta = 1/\Delta\sigma = \lambda_0^2/\Delta\lambda$.

Variation de phase lente de π .

Si on a N franges entre 2 extinctions de contraste, on a : $\Delta\lambda = \lambda_0/N$.

II Raie quasimonochromatique

- Origines :
 - Doppler ⇒ $I_\sigma(\sigma)$ gaussienne (les atomes vont dans tous les sens)
 - Chocs ⇒ $I_\sigma(\sigma)$ lorentzienne

Notations : $dI = I_\lambda(\lambda) d\lambda$. Pour des petites variations, $\Delta\sigma = \sigma_0^2 \Delta\lambda$.

- Cas taupinal : $I_\sigma(\sigma)$ est en escalier (rectangle centré en σ_0 et de largeur $\Delta\sigma$).

Alors $I(\delta) = I_0(1 + C(\delta) \cos(2\pi\sigma_0\delta))$ avec $C = \text{sinc}(\pi\delta\Delta\sigma)$

Nombre de franges dans la zone centrale : $N = \Delta\delta / \lambda_0 = 2\lambda_0 / \Delta\lambda$.

- Cas général : les signaux sont en phase pour $\delta = 0$ mais petit à petit, ils sont brouillés ⇒ plus d'interférence.

- On suppose que $f : u \rightarrow I_\sigma(\sigma_0 + u)$ est paire en u . $dI(\delta) = I_\sigma(\sigma)(1 + \cos(2\pi\sigma\delta)) d\sigma$.

$$I(\delta) = \int_0^\infty I_\sigma(\sigma) d\sigma + \int_0^\infty I_\sigma(\sigma) \cos(2\pi\sigma\delta) d\sigma = I_0 + I_1(\delta)$$

avec I_0 : intensité sans interférence et $I_1(\delta) \propto \cos(2\pi\sigma_0\delta) \hat{f}(\delta)$.

$$I(\delta) = I_0(1 + C(\delta) \cos(2\pi\sigma_0\delta)) \quad \text{avec} \quad I_0 C(\delta) = \int_{-\infty}^\infty f(u) \cos(2\pi u\delta) du \propto \hat{f}(\delta).$$

- Transformée de Fourier

cloche de largeur $\Delta\sigma \rightarrow$ cloche de largeur $1/\Delta\sigma$.

Ex : $f(u) = J \exp(-|u|/\Delta u)$. Alors sa transformée de Fourier est une lorentzienne.

- Autre interprétation de l'extinction de C : trains d'onde quasimonochromatiques de durée τ .

Longueur de cohérence : $L_c = c\tau$. Si $\delta > L_c$, les trains d'onde qui se superposent ne sont pas issus d'un même train d'onde primaire. Ils sont donc incohérents.

- Application : spectrométrie par transformée de Fourier.

$$I(\delta) = (1 + C(\delta) \cos(2\pi\sigma_0\delta)) \quad C(\delta) = \hat{f}(\delta) \quad \text{FT}^{-1}$$

Principe Interférogramme $I(\delta) \rightarrow$ contraste $C(\delta) \rightarrow \hat{f}(\delta) \rightarrow f(u) \rightarrow I_\sigma(\sigma)$.

* Cas d'une source monochromatique

On calcule $f(\sigma) = \int_0^L I(\delta) \cos(2\pi\sigma\delta) d\delta =$ somme de 3 sinc. Incertitude $\approx 1/L$.

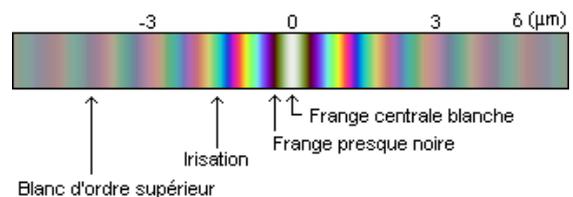
* Cas d'un doublet : on peut superposer. $\Delta\sigma$ de limite chameau/dromadaire = limite de résolution $\approx 2/L$.

III Interférences en lumière blanche

$\lambda \in [0,4 \mu\text{m} ; 0,8 \mu\text{m}]$ donc $\Delta\lambda \approx \lambda$: pas du tout OPFM.
 Frange centrale blanche, vague frange noire puis irisations puis brouillage pour $\delta > 3 \mu\text{m}$: c'est le blanc d'ordre supérieur.

Teinte plate = contact optique = réglage pour $\delta = 0$ sur tout l'écran.

Analyse du blanc d'ordre supérieur à l'aide d'un prisme : il y a un spectre cannelé (pour tout δ , certaines fréquences manquent).



IV Exemples d'interférence à N ondes cohérentes

On additionne les valeurs instantanées de $s(t)$ ou les amplitudes complexes (mieux).

* 4 trous percés dans un écran opaque. Utilisation d'un rayon fictif pour le calcul de ϕ . On obtient un quadrillage.

* Interféromètre de Pérot-Fabry : 2 plaques de verre bisautées ayant la couche interne métallisée. Modèle idéalisé.

s_i après $2i-2$ réflexions est une suite géométrique. On peut calculer la somme.

Bref, $I(M) = \frac{I_0}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2\left(\frac{2\pi e}{\lambda} \cos \theta\right)}$. Anneaux d'égalé inclinaison, très minces.

Utilisation en spectromètre : on peut mesurer des $d\lambda$ très petits (\rightarrow RedShift)

Critère de Rayleigh : deux pics sont à la limite de la fusion en un pic \Leftrightarrow le max de l'un et le max/2 de l'autre ont la même abscisse.

Pouvoir de résolution : $R = \frac{\lambda}{(\lambda_2 - \lambda_1)_{\min}} = \frac{\pi e \sqrt{\mathcal{F}}}{\lambda}$ avec $\mathcal{F} = \frac{4R}{(1-R)^2}$.

5 – Diffraction

I Généralités

• Quelques cas où on observe la diffraction...

• La relation d'incertitude de Heisenberg permet d'expliquer la diffraction d'un laser par une fente.

Le fait de mettre une fente d'épaisseur e revient à mesurer la position x d'un photon à e près.

Alors l'incertitude sur l'angle de sortie est $\Delta\theta = \lambda/e =$ ouverture angulaire du faisceau.

• L'optique géométrique = optique sans diffraction est valable si les longueurs caractéristiques des inhomogénéité sont très grandes devant λ .

II Tentative de solution rigoureuse

Soit une source enfermée par une surface Σ opaque. On creuse un trou dans Σ : c'est la pupille.

Le mathématicien affirme que si l'on connaît \vec{E} sur Σ , on peut connaître \vec{E} partout.

$\vec{E}_{\text{surface opaque}} = \vec{0}$.

$\vec{E}_{\text{pupille}} = ?$

d'où approximations

III Solution approchée : principe de Huygens-Fresnel

• Si la largeur de la pupille est assez grande devant λ , et si les ondes ont une incidence proche de la normale, alors :

$\underline{s}(P) = \underline{s}(P)$ selon les lois de l'optique géométrique.

Chaque élément de surface de la pupille dS est équivalent à une source secondaire qui émet une onde sphérique d'amplitude proportionnelle à $\underline{s}_{\text{indirect}}(P)$. Ces ondes secondaires sont appelées ondelettes.

$d\underline{s}_P(M) = \frac{K \underline{t}(P) \underline{s}_i(P) \exp(i \phi_{P \rightarrow M})}{PM} dS$.

Onde diffractée = superposition des ondelettes.

Pour une diffraction à l'infini (diffraction de Fraunhofer), $PM \approx$ constant, qui rentre dans K .

On a alors : $d\underline{s}_P(M) = K \underline{t}(P) \underline{s}_i(P) \exp(i \phi_{P \rightarrow M}) dS$.

• Interprétation : c'est comme les ondes que l'on voit sur la surface de l'eau.

• Transparence = Fonction de transmission d'une pupille :

Soit Π le plan de sortie de la pupille et $P \in \Pi$.

On définit : $\underline{s}_{i \text{ rien}}(P)$: amplitude en P sans obstacle

$\underline{s}_{i \text{ géom}}(P)$: amplitude en P avec obstacle selon l'optique géométrique

Alors $\underline{t}(P) = \frac{\underline{s}_{i \text{ géom}}(P)}{\underline{s}_{i \text{ rien}}(P)}$.

Ex : pour un trou, $\underline{t}(P) = \chi_{\text{trou}}(P)$ Pour un prisme $\underline{t}(P) = \underline{t}_0 \exp\left(-\frac{2i\pi}{\lambda}(n-1)e\right)$. Pour une diapo, $\underline{t}(P) = \underline{t}_0 \underline{t}'(P)$.

IV Expression de l'amplitude diffraction à l'infini avec une OPPM incidente

Soit O un point de la pupille

Alors l'amplitude totale en M est :

$\underline{s}(M) = K \underline{s}_i(O) \exp(i \phi_{O \rightarrow M}) \iint_{\Sigma} \underline{t}(P) \exp(i(\vec{k}(M) - \vec{k}_i) \cdot \vec{OP}) dS$.

En coordonnées cartésiennes, avec

$$\vec{u} = \alpha \vec{e}_x + \beta \vec{e}_y + \gamma \vec{e}_z$$

$$\vec{v} = \alpha_i \vec{e}_x + \beta_i \vec{e}_y + \gamma_i \vec{e}_z$$

$$\mathfrak{s}(\alpha, \beta) = \mathfrak{K} \mathfrak{s}_i(\mathcal{O}) \exp(i \varphi_{\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{M}}) \iint_{\Sigma} \mathfrak{t}(\mathcal{P}) \exp\left(\frac{2i\pi}{\lambda}((\alpha - \alpha_i)x + (\beta - \beta_i)y)\right) dx dy$$

Si on tient compte des lentilles,

$$\mathfrak{s}(X, Y) = \mathfrak{K} \mathfrak{s}_i(\mathcal{O}) \exp(i \varphi_{\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{M}}) \iint_{\Sigma} \mathfrak{t}(\mathcal{P}) \exp\left(\frac{2i\pi}{\lambda}\left(\left(\frac{X}{f'_2} + \frac{X_s}{f'_1}\right)x + \left(\frac{Y}{f'_2} + \frac{Y_s}{f'_1}\right)y\right)\right) dx dy$$

V Diffraction à l'infini d'une OPPM par une ouverture rectangulaire

$$\bullet \mathfrak{s}(\mathcal{M}) = \mathfrak{K} \mathfrak{s}_i(\mathcal{O}) \exp(i \varphi_{\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{M}}) ab \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{\lambda}(\alpha - \alpha_i)a\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{\lambda}(\beta - \beta_i)b\right).$$

$$I(\mathcal{M}) = \mathfrak{K}' I_i (ab)^2 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi}{\lambda}(\alpha - \alpha_i)a\right) \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi}{\lambda}(\beta - \beta_i)b\right).$$

$\Delta\alpha = 2\lambda/a$ (cohérent avec le principe d'incertitude d'Heisenberg).

90% de l'intensité est dans le pic central, qui se trouve au niveau de l'image géométrique de la source (si on enlève le cache avec les trous).

Forme des taches...

- Calcul direct dans le cas de la fente fine. On retrouve le même résultat.
- Pupille prismatique. Le maximum de diffraction correspond là encore à l'optique géométrique.

VI Diffraction d'une OPPM par un trou circulaire

Largeur angulaire de la tache $\propto \lambda/R$. (pas de calculs, tout admis)

Diamètre de la figure de diffraction : $\Delta\theta = 1,22 \frac{\lambda}{R}$. (y paraît qu'il faut le savoir)

VII Propriétés de la figure de diffraction à l'infini

- La tache de diffraction est au voisinage de l'image géométrique de la source. Cela peut se voir avec l'expression de $\mathfrak{s}(\mathcal{M})$ avec les lentilles : si les termes dans l'exponentielle sont nuls, toutes les ondes secondaires arrivent en phase en \mathcal{M} d'où une intensité maximale.
- Diffraction \rightarrow élargissement, blur de l'image.
- $\uparrow \downarrow \uparrow$ (calculs) est équivalent à $\uparrow \downarrow$ (montage).
- Dilatation de la pupille : $x \ast \mu \Rightarrow \Delta\alpha \ast = 1/\mu$. [demo]
- Translation de la pupille : $x \ast \Delta x \Rightarrow \mathfrak{s}(\alpha, \beta) \ast \exp\left(\frac{2i\pi}{\lambda}(\alpha - \alpha_i)\Delta x\right)$; $I(\alpha, \beta)$ inchangé
- Rotation de la pupille : la figure de diffraction tourne aussi.

VIII Diffraction à l'infini d'une OPPM par N pupilles identiques

$$\mathfrak{s}(\alpha, \beta) = \mathfrak{K} \sum_{m=1}^N \mathfrak{s}_i(\mathcal{O}_m) \exp(i \varphi_{\mathcal{O}_m \rightarrow \mathcal{M}}) \iint_{\text{pupille } m} \mathfrak{t}(\mathcal{P}) \exp\left(\frac{2i\pi}{\lambda}((\alpha - \alpha_i)x + (\beta - \beta_i)y)\right) dx dy.$$

$$= \mathfrak{s}_i(\mathcal{O}) \exp(i \varphi_{\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{M}}) f_D(\alpha, \beta) f_i(\alpha, \beta).$$

avec $f_D(\alpha, \beta) = \mathfrak{K} \iint_{\text{pupille}} \mathfrak{t}(\mathcal{P}) \exp\left(\frac{2i\pi}{\lambda}((\alpha - \alpha_i)x + (\beta - \beta_i)y)\right) dx dy$ (diffraction par une pupille unique)

$$f_i(\alpha, \beta) = \sum_{m=1}^N \exp\left(\frac{2i\pi}{\lambda}(\vec{u} - \vec{u}_i)\vec{\mathcal{O}}\mathcal{O}_m\right) \quad (\text{interférences entre les ondes émises par les pupilles})$$

Exemple : fentes d'Young avec incidence normale. On trouve des interférences modulées par un terme de diffraction en sinc^2 .

Petite période angulaire : $\lambda/a = i/\alpha$.

Grande période angulaire : λ/e .

IX Théorème de Babinet

Pupilles complémentaires : \mathfrak{t}_1 et \mathfrak{t}_2 sont complémentaires si $\forall x, y, \mathfrak{t}_1(x, y) = 1 - \mathfrak{t}_2(x, y)$. (fente et cheveu). Alors les figures de diffraction sont égales, sauf à l'image géométrique de la source.

$$\mathfrak{s}_1(\alpha, \beta) = \text{non-diffraction}(\alpha, \beta) - \mathfrak{s}_2(\alpha, \beta)$$

où la non-diffraction correspond à la diffraction par une pupille intégralement transparente.

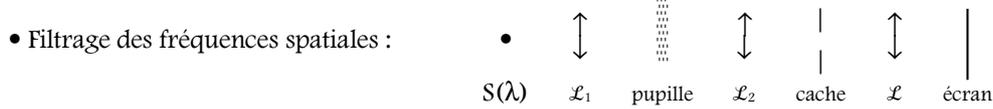
X Filtrage des fréquences spatiales

• Si $\alpha_i = \beta_i = 0$ et \mathbf{t} indépendant de x , on a $\mathbf{s}(\alpha) = \mathcal{K} \mathbf{s}_i(O) \exp(i \varphi_{O \rightarrow M}) \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{t}(x) \exp\left(\frac{2 i \pi}{\lambda} \alpha x\right) dx$.

Donc $\mathbf{s}(\alpha)$ est une image du spectre en fréquence de $\mathbf{t}(x)$.

• Ex : si $\mathbf{t}(x) = t_0 \left(1 + m \cos\left(\frac{2 \pi x}{a}\right)\right)$, $\mathbf{s}(\alpha)$ est une somme de 3 sinc, pour $\alpha \in \left\{-\frac{\lambda}{a}; 0; +\frac{\lambda}{a}\right\}$.

Pour $L \gg a$, I se présente comme la somme de 3 pics pour ces valeurs de α .



A l'écran, on a l'image géométrique de la pupille par \mathcal{L} . Le cache permet d'éliminer certaines fréquences. Ici, il sert de passe-bas (\rightarrow lissage, antibruit) ; si il est sous la forme |, il sert de passe-haut (\rightarrow strioscopie, contours)

XI Diffraction et résolution d'un instrument d'optique

On traite le cas de la lentille, avec une monture de rayon R. R fini \Rightarrow l'image A' de A est une tache.

Rayon de la tache image : $r = 0,64 \lambda p'/R$.

Plus petite distance entre 2 objets pour pouvoir les discerner : λ (vrai pour tous les instruments d'optique).

6 – Réseaux

I Définition

Réseau = pupille plane de fonction de transparence périodique à une dimension.

Pas = période spatiale du réseau, noté a .

Trait = motif élémentaire du réseau. Dans un réseau, il y a N traits.

En pratique, $a \approx 1 \mu\text{m}$ et $N \approx 10^4$.

Types de réseau :
 * Réseau par transmission : verre taillé ou diapo
 * Réseau par réflexion : métal taillé

II Etude de la diffraction par un réseau

Etude en M à l'infini.

$\mathfrak{S}(M) = \mathfrak{s}_0(M) f_D(M) f_I(M)$ avec $|\mathfrak{s}_0|$ indépendant de M
 $f_D(M)$: amplitude diffractée par un trait
 $f_I(M)$: interférence due à N fentes infiniment fines placées en O_m .

$$\mathfrak{S}(M) = \mathfrak{s}_0(M) f_D(M) \sum_{i=1}^N \exp\left(\frac{2i\pi}{\lambda} (\sin \theta - \sin \theta_i) x_{O_1}\right). \quad [\text{demo}]$$

Les maxima de $|f_I|^2$ correspondent à $\sin \theta - \sin \theta_i = \frac{p\lambda}{a}$, avec $p \in \mathbb{Z}$ ("l'ordre")

"relation fondamentale des réseaux"

Pour $p \neq 0$, un réseau est un disperseur.

On a : $I = I_0 |f_D|^2 \frac{\sin^2\left(\frac{N\Phi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\Phi}{2}\right)}$, en posant $\Phi = \frac{2\pi a}{\lambda} (\sin \theta - \sin \theta_i)$.

$|f_I|^2 = N^2$ pour $\Phi \in 2\pi\mathbb{Z}$. L'amplitude du maximum secondaire est de $\frac{4}{9\pi^2} N^2$.

Entre 2 maxima principaux, il y a $N-1$ annulations.

III Techniques de fabrication

Critère essentiel : périodicité des traits.

Gravage mécanique sur plaque de résine ou de verre > matricage sur un réseau gravé > réseau holographique (photo d'interférences) > photo de trous

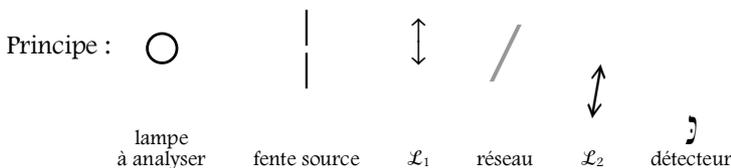
IV Minimum de déviation (à p fixé)

$D = \theta - \theta_i$ dépend de $\theta \Rightarrow$ en pratique, il doit toujours être attaqué par un faisceau parallèle.

Extrémum pour $\theta = \pm \theta_i$. [demo similaire à celle des relations pour le prisme]

D'où $2 \sin\left(\frac{D_{\min}}{2}\right) = \frac{p\lambda}{a}$.

V Spectromètre à réseau



Lorsque l'on fait tourner le réseau, les images (λ_i) de la source se déplacent et passent devant la fente de sortie. A chaque orientation du réseau correspond une valeur de λ . On peut ainsi obtenir le spectre lumineux.

* Résolution pour une fente source infiniment fine : Rayleigh $\Rightarrow R_{\text{intrinsèque}} = \frac{\lambda}{(\lambda_2 - \lambda_1)_{\min}} = N p$

* Résolution effective : bien moins grande ; $R_{\text{effective}} = \frac{\lambda f_1}{a e}$.

7 – Notes de TP d'optique

Collimateur = dispositif fixé à une source qui délivre un faisceau parallèle.

Utilisation d'un viseur

- Régler l'oculaire de façon à voir net le réticule.
 - Viser un objet directement et régler l'objectif pour le voir net.
- La distance objet net-viseur est alors constante.

Polarisation de la lumière

- Intensité d'une lumière polarisée rectilignement transmise à travers un filtre polariseur : $I = I_0 \cos^2 \alpha$.
- Action d'une lame $\lambda/4$: rajoute $\pi/4$ à une composante de l'onde. $\lambda = 4 (n_x - n_y) e$. Elle n'est quart-d'onde que pour une fréquence bien déterminée.

Rectiligne incliné de $\alpha \rightarrow$ Elliptique dont les axes sont ceux de la lame. Le rapport grand/petit est de $\tan \alpha$

Elliptique de rapport $\tan \alpha \rightarrow$ Rectiligne incliné de α .

- Algorithme

```
add_monochromatic_filter();
add_analyser();
a = get_minimum_from_analyser();
if (last_err == ERR_NO_MIN) /* lumière isotrope */
{
    add_lambda_4_lame_between_filter_and_analyser();
    b = get_minimum_from_last_analyser();
    if (b == 0) printf("Polarisation circulaire");
    else printf("Polarisation naturelle");
}
else if (a == 0) printf("Polarisation rectiligne");
else printf("Polarisation elliptique");
```

- Explications :

* Si $a = 0$, il est clair que la lumière est polarisée rectilignement. L'analyseur donne la direction.

* Si $a \neq 0$ (et $\text{last_err} \neq \text{ERR_NO_MIN}$), une direction est privilégiée par l'onde (donc ça n'est ni une polarisation naturelle, ni une polarisation circulaire). La direction de l'analyseur donne la direction du petit axe. Pour connaître le rapport α de l'ellipse, on place une lame $\lambda/4$ entre l'analyseur et le filtre. Si un axe de la lame coïncide avec un des axes de l'ellipse, on obtient une lumière polarisée rectilignement ; son inclinaison par rapport à un axe de la lame donne α .



* Si $b = 0$ et $\text{last_err} = \text{ERR_NO_MIN}$, la lumière avant l'analyseur est polarisée rectilignement. Donc avant la lame, c'est une polarisation elliptique isotrope : circulaire.

* Si $b \neq 0$ et $\text{last_err} = \text{ERR_NO_MIN}$, la lumière est naturelle.

Rem : on exclut le cas d'une lumière partiellement polarisée.

Goniomètre

- Réglage Régler l'oculaire de la lunette de façon à voir net le réticule (qui s'allume).
Si collimateur préréglé : régler l'objectif de la lunette pour voir l'image de la fente nette.
Sinon, avec un miroir collé sur l'objectif, régler l'objectif pour voir 2 images.
- Mesures θ_i n'est pas connu avec précision. Pour calculer le pas d'un réseau, repérer le minimum de déviation à droite et à gauche : $D_m = \frac{1}{2} (\alpha_1 - \alpha_2)$.