[MP – ELECTROMAGNETISME]

Sommaire

Divers

Les lignes de champ

• Détermination des équations lignes de champ

Soit $\vec{U}$ un champ vectoriel. Equation des lignes de champ : ($\vec{U}$, (dx, dy, dz)) liée.

$\frac{dx}{U_x} = \frac{dy}{U_y} = \frac{dz}{U_z}$ en coordonnées cartésiennes

$\frac{dr}{U_r} = r\,\frac{d\theta}{U_\theta} = \frac{dz}{U_z}$ en coordonnées cylindriques

$\frac{dr}{U_r} = r\,\frac{d\theta}{U_\theta} = r\sin\theta\,\frac{d\varphi}{U_\varphi}$ en coordonnées sphériques

Autre moyen de déterminer l'équation des lignes de champ si $\mathrm{div}\,\vec{U} = 0$:

$\Phi(\vec{U}) = c^{te}$.

• Propriété : Les lignes ne se croisent qu'en des points où $\vec{U} = \vec{0}$.

• Théorème de l'extrémum (étude du champ $\vec{E}$)

Si P est un maximum de potentiel, alors $\rho(P) > 0$.

Si P est un minimum de potentiel, alors $\rho(P) < 0$.

ou encore $\rho(P) = 0 \Rightarrow$ V non extrémal en P.

Divers

Deux charges identiques se repoussent. Deux courants identiques s'attirent.

Définitions de la résistance : $R = \frac{\int \vec{F}_{elec}\, \vec{d\ell}}{q\, I} = \frac{\mathcal{P}_{joule}}{I^2}$.

Fonctions usuelles

f est une gaussienne $\Leftrightarrow \exists\, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) = a + b \exp\left(-\frac{x^2}{c^2}\right)$.

f est une lorenztienne $\Leftrightarrow \exists\, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{a}{b + c\, x^2}$.

Le photon

Energie : $\mathcal{E} = h\,\nu$.

Quantité de mouvement : $p = \frac{h\,\nu}{c}$.

ELECTROMAGNETISME

1 – Charges et courants

I Charges

Modélisation	Expression de la charge
Volumique	$dq = \rho\, d\tau$
Surfacique	$dq = \sigma\, dS$
Linéique	$dq = \lambda\, d\ell$
Ponctuelle	q_i

$\sigma = \int_{epaisseur} \rho(z)\, dz$

$\lambda = \iint_{section} \rho\, dS$

II Courants

I_Σ = charges traversant Σ dans le sens de $\vec{n}$ / durée.

Modélisation	*	Intensité
Volumique	$\vec{j}\, d\tau$.	$I_\Sigma = \iint_\Sigma \vec{j}\, d\vec{S} = \Phi_S(\vec{j})$
Surfacique	$\vec{j}_S\, dS$	$I_{\delta\ell} = \int_\Delta \vec{j}_S\, \vec{n}\, d\ell$
Linéique	$I\, \vec{d\ell}$	$I = \iint_{section} \vec{j}\, d\vec{S}$
Ponctuelle	$q\, \vec{v}$	$I = \iint_\Sigma \rho_m\, \vec{v}\, d\vec{S}$.

$\vec{j}_S = \int_{epaisseur} \vec{j}\, dz$

$\vec{j} = \rho_m\, \vec{v}$

* : Grandeur vectorielle qui intervient dans la loi de Biot & Savart, la loi de Laplace, le calcul du moment magnétique par intégration, l'expression du potentiel vecteur par intégration. Elle est indépendante des conventions d'orientation.

III Equation locale de conservation de la charge

Soit un volume v de surface fermée Σ orientée vers l'extérieur.

Pour un champ vectoriel $\vec{U}$ quelconque, $\Phi_\Sigma(\vec{U}) = \oiint_\Sigma \vec{U}\, d\vec{S} = \iiint_v \mathrm{div}\, \vec{U}\, d\tau$ (Théorème d'Ostrogradsky)

où $\mathrm{div}\, \vec{U} = \dfrac{\partial U_x}{\partial x} + \dfrac{\partial U_y}{\partial y} + \dfrac{\partial U_z}{\partial z}$ en coordonnées cartésiennes.

Ici, $\boxed{\mathrm{div}\, \vec{j} + \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0} \Leftrightarrow \dfrac{dq}{dt} = -\, I_\Sigma$.

IV Loi de conduction ou loi d'Ohm

$\vec{j} = \rho_m\, \vec{v}$ $\vec{v}$: vitesse moyenne des porteurs de charge.

On modélise les chocs successifs des porteurs de charge par une force de frottement $\vec{F}_{frot} = -\, f\, \vec{v}$.

D'où

$$\frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{\vec{j}}{\tau} = \frac{\sigma_0}{\tau} \vec{E}$$

où $\rho_m = N\, q$; N : densité de porteurs de charge mobiles

$\tau = m / f$ (durée caractéristique du régime transitoire)

$\sigma_0 = N\, q^2 / f$.

En régime forcé, $\vec{j} = \sigma\, \vec{E}$ (loi d'Ohm locale).

- Si $\vec{E}$ est constant ou variable avec une fréquence << 10^{12} Hz, $\vec{j} = \sigma\, \vec{E}$.
- Si $\vec{E}$ variable avec une fréquence > 10^{12} Hz (en optique), on raisonne sur l'équation différentielle en $\vec{j}$.

Rem : on peut utiliser la représentation complexe pour un vecteur. On peut alors écrire $\underline{\vec{j}} = \underline{\sigma}\, \underline{\vec{E}}$

Où $\underline{\sigma} = \dfrac{\sigma_0}{1 + i\omega\tau}$

V Conduction en présence de $\vec{B}$: effet Hall

On suppose σ réel (BF). $\vec{j} = \sigma\left(\vec{E} + \dfrac{\vec{j} \wedge \vec{B}}{N\, q}\right)$. Les lignes de $\vec{j}$ ne sont plus parallèles à $\vec{E}$.

Ex : Teslamètre, ou sonde à effet Hall. Une différence de potentiel permet de mesurer B : $U = \dfrac{I\, B}{N\, q\, e}$

(e épaisseur de la plaque, I courant, N densité d'éléctrons mobiles, q charge de l'électron).

VI Calcul de résistance

De manière générale, $dR = \dfrac{dL}{\sigma\, S}$. On écrit les relations : $U \rightleftharpoons \vec{E} \rightleftharpoons \vec{j} \rightleftharpoons I$.

Dans le cas d'un cylindre : $\boxed{R = \dfrac{\ell}{\sigma\, S}}$. [~d]

Dans le cas d'une boule moins une boule cocentrique : $R = \dfrac{1}{4\,\pi\,\sigma}\left(\dfrac{1}{r_2} - \dfrac{1}{r_1}\right)$. [~d]

Rem : utilisation d'une terre, disjoncteur différentiel...

2 – Champ électromagnétique

I Force de Lorentz

$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$ (c'est la définition de $\vec{E}$ et $\vec{B}$)

Soient R_1 (absolu) et R_2 (relatif) deux référentiels galiléens et $\vec{v}_e$ = vitesse d'entrainement $= \vec{v}_{M/R1} - \vec{v}_{M/R2} = \vec{v}_{R2} - \vec{v}_{R1}$.

En identifiant les forces, on obtient : $\vec{B}_2 = \vec{B}_1$.
$\vec{E}_2 = \vec{E}_1 + \vec{v}_e \wedge \vec{B}$.

$\vec{E}$ dépend donc du référentiel.

II Symétries du champ électromagnétique

Principe de (Pierre) Curie : les effets ont les mêmes symétries que les causes.

[...]

Vecteur vrai = vecteur représentant une grandeur qui a les mêmes symétries que ses sources. Ex : $\vec{F}, \vec{v}, \vec{E}, \vec{A}$.

Pseudovecteur = vecteur qui représente une grandeur qui, pour une isométrie négative (symétrie par rapport à un plan ou un point) a une symétrie opposée à celle des sources. Ex : $\vec{B}, \vec{\Omega}$.

Opérations qui changent la validité d'un vecteur : $\wedge$; $\vec{\text{rot}}$.

III Rappels sur les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ permanents

♦ Charges fixes → $\vec{E}$ permanent tel que

- Pour tout contour fermé Γ, $\oint_\Gamma \vec{E}\, d\vec{l} = 0$
- Il existe une fonction scalaire V telle que $\vec{E} = -\,\vec{\text{grad}}\, V$.
- Th. de Gauss : Pour toute surface fermée Σ, $\Phi_\Sigma(\vec{E}) = q_{int} / \varepsilon_0$.
- Loi de Coulomb : $\vec{E}(M) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_V \dfrac{\rho\, d\tau\, \vec{u}_{PM}}{PM^2}$

Cas à connaître :

Fil infini	$\vec{E} = \dfrac{\lambda}{2\,\pi\,\varepsilon_0\, r}\vec{e}_r$	
Plan infini	$\vec{E} = \pm\dfrac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\vec{e}_z$	

♦ Courants continus → $\vec{B}$ permanent tel que

- Pour toute surface fermée Σ, $\Phi_\Sigma(\vec{B}) = 0$
- Th. d'Ampère : Pour tout contour fermé Γ,
  $\oint_\Gamma \vec{B}\, d\vec{l} = \mu_0\, I_{enlacé} = \mu_0\, \Phi_\Sigma(\vec{j})$ où Σ s'appuie sur Γ.
- Loi de Biot et Savart : $\vec{B}(M) = \dfrac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \dfrac{\vec{j}\, d\tau \wedge \vec{u}_{PM}}{PM^2}$

Cas à connaître :

Fil infini	$\vec{B} = \dfrac{\mu_0\, I}{2\,\pi\, r}\vec{e}_\theta$	
Plan infini	$\vec{B} = \pm\dfrac{\mu_0\, j_s}{2}\vec{e}_y$	
Spire	$\vec{B} = \dfrac{\mu_0\, I \sin^3\alpha}{2\, R}\vec{e}_z$	sur l'axe (α est l'angle $(\vec{e}_z, \vec{u}_{PM})$)
Solénoïde infini	$\vec{B} = \mu_0\, n\, I\, \vec{e}_z = \mu_0\, j_s\, \vec{e}_z$	à l'intérieur, $\vec{0}$ à l'extérieur.

IV Equations locales du champ $\vec{E}$ permanent

♦ Opérateur rotationnel.

Soit $\vec{U}$ un champ vectoriel. Alors il existe un champ, noté $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{U}$ tel que $\oint \vec{U}\,\vec{d\ell} = \iint_\Sigma (\,\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{U}\,)\,d\vec{S}$.

En coordonnées cartésiennes, $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{U} = \left(\frac{\partial U_z}{\partial y} - \frac{\partial U_y}{\partial z}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial U_x}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial x}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial U_y}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z$.

Soit l'opérateur Nabla $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z$. On a : $\vec{\mathrm{rot}} = \vec{\nabla} \wedge \vec{U}$.

♦ Pour le champ $\vec{E}$, on a : $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = \vec{0}$ et $\mathrm{div}\,\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$.

Ex : calcul de $\vec{E}$ pour un cylindre uniformément chargé.

Rem : ρ borné $\Rightarrow \vec{E}$ continu.

♦ Equation locale pour le potentiel électrostatique : $\boxed{\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$ (équation de Poisson)

Si on fixe V à un endroit, alors la solution est unique. On retrouve alors la loi de Coulomb.

♦ Loi de Coulomb $\Leftrightarrow$ équations locales.

V Opérateurs vectoriels

	Gradient	**Divergence**	**Rotationnel**
Domaines	Scalaire $\rightarrow$ Vectoriel	Vectoriel $\rightarrow$ Scalaire	Vectoriel $\rightarrow$ Vectoriel
Définition	$dA = \vec{\mathrm{grad}}\,A \,.\, \vec{d\ell}$	$\oiint_\Sigma \vec{U}\,.\,d\vec{S} = \iiint_v \mathrm{div}\,\vec{U}\,d\tau$ Théorème d'Ostrogradsky	$\oint_\Gamma \vec{U}\,\vec{d\ell} = \iint_\Sigma \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{U}\,.\,d\vec{S}$ Théorème de Stokes
Avec nabla	$\vec{\mathrm{grad}}\,A = \vec{\nabla}\,A$.	$\mathrm{div}\,\vec{U} = \vec{\nabla}\cdot\vec{U}$.	$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{U} = \vec{\nabla}\wedge\vec{U}$.
Coord. cyl.	$\vec{\mathrm{grad}}\,A = \frac{\partial A}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial\theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial A}{\partial z}\vec{e}_z$	Si $\vec{U} = U(r)\,\vec{e}_r$, $\mathrm{div}\,\vec{U} = \frac{1}{r}\frac{d(r\,U(r))}{dr}$	Si $\vec{U} = U(r)\,\vec{e}_\theta$, $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{U} = \frac{1}{r}\frac{d(r\,U(r))}{dr}\,\vec{e}_z$ [2 d]
Propriétés	$\vec{\mathrm{grad}}\,A \perp$ surfaces iso-A. $\vec{\mathrm{grad}}\,A$ pointe vers les A $\nearrow$. $\lVert\vec{\mathrm{grad}}\,A\rVert = \lvert dA/ds\rvert$ le long d'une trajectoire $\perp$ aux surfaces iso-A.	$\mathrm{div}\,(\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{U}) = 0$.	$\vec{\mathrm{rot}}\,(\vec{\mathrm{grad}}\,A) = \vec{0}$. La surface Σ peut être choisie n'importe comment, du moment qu'elle s'appuie sur Γ.

Soit $\vec{U}$ un champ vectoriel. Alors :

* $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{U} = \vec{0} \Leftrightarrow$ il existe un champ scalaire A tel que $\vec{U} = \vec{\mathrm{grad}}\,A$.
* $\mathrm{div}\,\vec{U} = 0 \Leftrightarrow$ il existe un champ vectoriel $\vec{V}$ tel que $\vec{U} = \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{V}$.

Opérateur laplacien scalaire : $\Delta A = \mathrm{div}\,\vec{\mathrm{grad}}\,A = \vec{\nabla}^2 A = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2}$.

Expression de l'opérateur laplacien scalaire en coordonnées cylindriques : $\Delta A = \frac{1}{r}\frac{\partial\left(r\frac{\partial A}{\partial r}\right)}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 A}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2}$

Opérateur laplacien vectoriel : $\Delta\vec{U} = \Delta U_x\,\vec{e}_x + \Delta U_y\,\vec{e}_y + \Delta U_z\,\vec{e}_z = \vec{\nabla}^2\,\vec{U}$.

Opérateur $\vec{U}\,\vec{\mathrm{grad}}$ (où $\vec{U}$ est un champ vectoriel quelconque) :

$$(\vec{U}\,\vec{\mathrm{grad}})\,\vec{V} = (\vec{U}\cdot\vec{\nabla})\,\vec{V} = (\vec{U}\cdot\vec{\mathrm{grad}}\,V_x)\,\vec{e}_x + (\vec{U}\cdot\vec{\mathrm{grad}}\,V_y)\,\vec{e}_y + (\vec{U}\cdot\vec{\mathrm{grad}}\,V_z)\,\vec{e}_z = D_{\vec{U}}\vec{V}$$

$$= U_x\frac{\partial\vec{V}}{\partial x} + U_y\frac{\partial\vec{V}}{\partial y} + U_z\frac{\partial\vec{V}}{\partial z}$$ (utile pour $\vec{F}_{\text{champ}\rightarrow\text{dipôle}}$)

Opérateur rotationnel de rotationnel : $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{U} = \vec{\mathrm{grad}}\,\mathrm{div}\,\vec{U} - \Delta\vec{U}$. (très utile)

Opérateur rotationnel appliqué à un produit vectoriel :

$$\vec{\mathrm{rot}}\,(\vec{U}\wedge\vec{V}) = (\mathrm{div}\,\vec{V})\,\vec{U} - (\mathrm{div}\,\vec{U})\,\vec{V} - (\vec{U}\,\vec{\mathrm{grad}})\vec{V} + (\vec{V}\,\vec{\mathrm{grad}})\vec{U}.$$ (utile pour $\vec{B}_{\text{dipôle statique}}$)

Opérateur vectoriel appliqué à un produit de champs : $\mathrm{div}\,A\vec{U} = A\,\mathrm{div}\,\vec{U} + \vec{\mathrm{grad}}\,A\cdot\vec{U}$.

$\vec{\mathrm{rot}}\,A\vec{U} = A\,\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{U} + \vec{\mathrm{grad}}\,A\wedge\vec{U}$. (utiles pour $\text{ray}_{\text{dipolaire}}$)

VI Equations locales du champ magnétostatique $\vec{B}$

$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$ et $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\,\vec{j}$. Ex : Calcul de $\vec{B}$ dans un cylindre de $\vec{j}$ uniforme.

VII Potentiel vecteur

Il existe un champ $\vec{A}$ tel que $\vec{B} = \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{A}$. Ce champ est appelé potentiel vecteur. Mais il n'est défini qu'à $\vec{\mathrm{grad}}\,\varphi$ près (si $\vec{A}$ convient, $\vec{A} + \vec{\mathrm{grad}}\,\varphi$ aussi). On peut imposer une condition arbitraire supplémentaire : une condition de jauge.
La jauge de Coulomb est : $\boxed{\mathrm{div}\,\vec{A} = 0}$. (ça n'implique toujours pas l'unicité de $\vec{A}$).
Ex : pour un champ $\vec{B}$ uniforme, $\boxed{\vec{A} = \frac{1}{2}\,\vec{B} \wedge \vec{OM}}$ convient et suit la jauge de Coulomb.
Pour tous ces potentiels vecteurs $\vec{A}$, on vérifie que $\oint_\Gamma \vec{A}\,d\vec{\ell} = \Phi_\Sigma(\vec{B})$ ne dépend pas de $\vec{A}$.
Ex : fil infini. $\vec{A} = -\,(\mu_0\, I \ln(r/r_0)\ /\ 2\pi)\ \vec{e}_z$.
Equation de Poisson pour A : $\boxed{\Delta\vec{A} = -\,\mu_0\,\vec{j}}$. On a également la relation : $\vec{A} = (\mu_0/4\pi) \iiint \vec{j}\ d\tau\ /\ PM$.
Ex : fil infini chargé. On ne peut pas imposer $V_\infty = 0$ car la distribution est infinie. Il faut utiliser le th. de Gauss.

VIII Equations locales en régime dépendant du temps

Régime permanent : séparation des deux champs $\vec{B}$ et $\vec{E}$. En régime non permanent, les relations ne peuvent plus être vraies (condensateur qui se charge). Autre problème : $\vec{E}$ dépend du référentiel.
Tous ces problèmes sont levés en postulant les équations dites de Maxwell.

$$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$ Equation de Maxwell–Faraday (MF)

$$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\left(\vec{j} + \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$$ Equation de Maxwell–Ampère (MA)

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$ Equation de Maxwell–Gauss (MG)

$$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$$ Equation de Maxwell relative au flux (MΦ)

$\vec{j}_{\text{déplacement}} = \varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ est appelé le courant de déplacement.

∗ On peut utiliser le théorème d'Ampère en prenant $\vec{j}_{\text{total}} = \vec{j}_{\text{réel}} + \vec{j}_{\text{déplacement}}$.
∗ Le théorème de Gauss reste toujours vrai.
∗ Les équations de Maxwell sont finalement des postulats du champ électromagnétique, qui se sont révélées concorder avec l'expérience (par bonheur).

IX Propagation du champ électromagnétique

Dans le vide, $\vec{j} = \vec{0}$; $\rho = 0$. On a :

$$\Delta\vec{E} = \mu_0\,\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$ Equation de D'Alembert.

On pose $1/c^2 = \mu_0\,\varepsilon_0$. [...] Avec un changement de variables $u = t - x/c$ et $v = t + x/c$, on obtient
$\vec{E}(x, t) = \vec{f}(u) + \vec{g}(v)$, ce qui est l'équation de propagation sans déformation de $\vec{E}$.
La vitesse de propagation est c. Les équations de Maxwell impliquent donc que le champ $(\vec{E}, \vec{B})$ se propage à vitesse finie c.

X Degrés d'approximation

♦ Sans approximation : Maxwell. Seulement si on ne peut pas négliger la propagation, c'est-à-dire si ℓ (distance caractéristique) n'est pas très petite devant $c\tau$ (τ temps caractéristique). Couplage entre $\vec{B}$ et $\vec{E}$.
♦ ARQP (ou ARQS) : Si $\ell << c\tau$, on néglige $\vec{j}_{\text{déplacement}}$ dans l'équation de MA. Il y a un couplage partiel entre $\vec{B}$ et $\vec{E}$. On peut étudier ainsi les phénomènes d'induction.
♦ Régimes permanents : découplage parfait. Toutes les grandeurs sont constantes.

XI Equation des potentiels retardés

En régime variable, on définit le potentiel vecteur $\vec{A}$ de même : $\vec{B} = \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{A}$.
Il existe un champ scalaire V tel que $\vec{E} + \dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\,\vec{\mathrm{grad}}\,V$.

Mais si $(\vec{A}, V)$ convient pour décrire un champ $(\vec{E}, \vec{B})$, alors $(\vec{A} + \vec{\mathrm{grad}}\,\varphi,\ V - \dfrac{\partial\varphi}{\partial t})$ convient aussi.

Jauge de Lorentz : $\mathrm{div}\,\vec{A} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial V}{\partial t} = 0$.

Tout système $(\vec{A}, V)$ qui vérifie la jauge de Lorentz vérifie les équations des potentiels retardés :

$$\Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\,\vec{j} \qquad \Delta V - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Si on place comme conditions limites $V(\infty) = 0$ et $\vec{A}(\infty) = \vec{0}$, alors on a :

$$V(M, t) = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\iiint_{\text{charges}} \frac{\rho\left(P, t - \frac{PM}{c}\right) d\tau_P}{PM} \qquad \vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\,\pi}\iiint_{\text{courants}} \frac{\vec{j}\left(P, t - \frac{PM}{c}\right) d\tau_P}{PM}$$

$\frac{PM}{c}$ correspond à la durée du parcourt de P à M.

3 – Exemples de calcul de champ

Méthodes :

∗ intégration de cas simples connus

∗ équations locales

• Ruban chargé en surface : on le découpe en lignes. Soit M sur le plan de symétrie longitudinal du ruban.

Alors $\vec{E}(M) = \dfrac{\sigma\,\alpha}{\pi\,\varepsilon_0}\,\vec{e}_z$

• $\vec{B}$ créé par la rotation d'une sphère uniformément chargée en surface. Au centre de la sphère,

$\vec{B} = (2/3)\,\mu_0\,\sigma\,R\,\omega\,\vec{e}_z$.

• Si les lignes de champ $\vec{E}$ (resp. $\vec{B}$) sont parallèles dans une région de $\rho = 0$ (resp. $\vec{j} = \vec{0}$) alors $\vec{E}$ (resp. $\vec{B}$) est uniforme.

• Calcul de $\vec{B}$ au voisinage de l'axe d'une spire circulaire.

$$B_r(r, z) = \frac{3\,\mu_0\,I\,\sin^4\varphi\,\cos\varphi}{4\,R^2}\,r$$

$$B_z(r, z) = \frac{\mu_0\,I\,\sin^3\varphi}{2R} + \frac{3\,\mu_0\,I\,(\sin^5\varphi - 4\sin^3\varphi\cos^2\varphi)\,\sin^2\varphi}{8\,R^3}\,r^2$$

[découlent de $\mathrm{div}\,\vec{B}$ et $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B}$.]

Pour $\varphi = \mathrm{Arctan}(2)$, stationnarité de la composante z du champ...

• Détermination d'un champ $\vec{E}$ par <u>résolution de l'équation de Laplace</u> (c'est-à-dire $\Delta V = 0$)

Principe : on place deux électrodes dans un espace vide. L'unicité de la solution est purement affirmée.

∗ Deux demi-plans portés à des potentiels différents. Alors $V = U\,\theta\,/\,\alpha$, et $\vec{E} = -\,(U/ar)\,\vec{e}_\theta$.

∗ Trois demi-plans portés à des potentiels 0, 0 et U.

On postule $V = f(x)\,g(y)$. Les solutions trouvées ne vérifient que 2 des 3 contitions. Par une décomposition en séries de Fourier, on arrive à s'en sortir...

∗ Deux électrodes cylindriques tangentes (l'une creuse, l'autre non).

∗ Utilisation d'une <u>image électrique</u>. Son utilisation repose sur l'unicité de la solution de l'équation de Laplace.

Ex : sphère à la masse et charge ponctuelle. On remplace la sphère par une charge telle que le potentiel sur la sphère soit nul. On peut en déduire la force exercée par la sphère sur la charge. C'est une force attractive...

4 – Continuité du champ électromagnétique

∗ Si on adopte une modélisation volumique, ρ et j sont bornés sont $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont continus.

∗ Pour une modélisation surfacique : lors de la traversée d'un plan,

$\boxed{\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\,\vec{n}_{1\to 2}}$

$\vec{E}_\perp$ est discontinu ; $\vec{E}_{/\!/}$ est continu.

$\boxed{\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0\,\vec{j}_s \wedge \vec{n}_{1\to 2}}$.

$\vec{B}_\perp$ est continu ; $\vec{B}_{/\!/}$ est discontinu.

$V_2 - V_1 = 0$.

V est continu mais présente un point anguleux.

Remarque importante : On peut calculer $\vec{j}_s$ ou σ à partir de la connaissance de la discontinuité de $\vec{E}$ ou $\vec{B}$.

⌦ S'il existe une distribution volumique au voisinage d'une surface de discontinuité entre deux milieux, il n'y a pas lieu de faire apparaître des distributions surfaciques dans les relations de passage. (Centrale2000)

5 – Forces de Laplace

Les forces de Laplace décrivent l'action d'un champ $\vec{B}$ sur un conducteur neutre parcouru par un courant.

I Force volumique de Laplace

• Soit un conducteur parcouru par un courant, et un petit élément $d\tau$. La force de Laplace exercée par un champ $\vec{B}$ est

$\boxed{d\vec{F} = \vec{j}\, d\tau \wedge \vec{B}}$ [demo]

$\vec{B}$ est le champ magnétique créé par l'ensemble de l'univers sauf $d\tau$. Il est confondu avec $\vec{B}_{total}$ en modélisation volumique, où $\vec{B}_{propre} = \vec{0}$. Mais en modélisation surfacique ou linéique, $\vec{B}_{propre} \neq \vec{0}$.

• Ex : calcul de pression magnétique. Un courant I circule verticalement dans un conducteur cylindrique creux de rayon a et d'épaisseur e.

Surfacique :
∗ Calcul de $\vec{B}$ en tout point de l'espace en fonction de I.
∗ On remarque que la discontinuité de B donne $\vec{j}_s$, donc $\vec{B}_{propre}$ (localement plan).
∗ On en déduit $\vec{B}_{ext} = \vec{B} - \vec{B}_{propre} = \frac{\mu_0\, \vec{j}_s}{2}\, \vec{e}_\theta$.
∗ Puis $d\vec{F}_L = -\frac{\mu_0\, \vec{j}_s^{\,2}\, dS}{2}\, \vec{e}_r = -\frac{\mu_0\, I^2\, dS}{8\, \pi^2\, a^2}\, \vec{e}_r$, d'où $P = \frac{B^2(a^+)}{2\, \mu_0}$.

Volumique : ∗ Calcul de $\vec{B}$ partout, de $d\vec{F}_L$ par intégration sur δS.
Phénomène de magnétostriction. Force attractrice. AN : faible.

Dans un solénoïde, la force tend au contraire à faire éclater le solénoïde.

• Ex : calcul du couple d'un moteur à courant continu : sur un cylindre de rayon a mobile en rotation sont placés N fils conducteurs de longueur ℓ. Ce cylindre est plongé dans un aimant qui produit un champ B radial.

Alors $m_\Delta = -\, B\, I\, \ell\, a$.

• Ex : calcul de la forme prise par un conducteur filiforme de longueur ℓ souple parcouru par un courant I sous $\vec{B}$ uniforme, fixé aux points A et C. Equilibre d'un petit bout du fil dans le trièdre de Frenet ⇒ T uniforme, courbe plane et courbure constante. C'est un cercle, avec $R = \frac{T}{I\, B}$ et $\frac{\|\vec{AC}\|}{2R} = \sin\left(\frac{\ell}{2R}\right)$.

III Travail des forces de Laplace

♦ <u>Cas simple</u> : Soit un circuit qui comporte 2 rails conducteurs parallèle et une tige transversale mobile.

$\mathcal{P}_L = \vec{F}_L\, \vec{v} = I\, \frac{d\Phi}{dt}$ $\quad W_L = I\, \Delta\Phi.$ $\quad$ où $\Phi = \Phi_{circuit}(\vec{B})$.

♦ <u>Cas général</u> : Soit $\Phi_C = \Phi_{surface\ balay\acute{e}e}(\vec{B})$. Cette surface balayée est orientée par $d\vec{s} \wedge d\vec{\ell}$, où $d\vec{s}$ est la translation élémentaire et $d\vec{\ell}$ le bout du fil. On a $\Phi_C = \Delta\Phi$. [car $\mathrm{div}\ \Phi = 0$]

Théorème de Maxwell : $\boxed{W_L = I\, \Delta\Phi = I\, \Phi_C}$. (si $\vec{B}$ et I permanents)

⌧ Le flux coupé Φ_C nécessite des orientations. (Centrale2000)

W_L ne dépend pas du chemin suivi, donc il existe une <u>énergie potentielle magnétostatique</u> :

$\boxed{\mathcal{E}_P = -\, I\, \Phi + c^{te}}$. $\quad W_L = -\, \Delta\mathcal{E}_P \quad \mathcal{P}_L = -\frac{d\mathcal{E}_P}{dt}$

• Ex : force de Laplace d'un le cas d'un fil rectiligne infini parcouru par un courant I, situé à une distance d d'un carré de côté a parcouru par un courant I'. $\vec{F}_L = -\frac{\mu_0\, I\, I'\, a^2}{2\pi}\, \frac{\vec{e}_r}{d(d+a)}$.

[2 méthodes : directe ($\vec{F}_L = ...$) et par l'énergie potentielle ($\Phi = ...$)]

• Ex : spire circulaire pouvant tourner selon un diamètre Δ. $\vec{B} \perp \Delta$ est uniforme. Alors $m_\Delta = -\, I\, \pi\, a^2\, B\, \sin\theta$

(avec $\delta W = m_\Delta\, d\theta = -\, d\mathcal{E}_P$).

<u>Règle du flux maximal</u> : l'évolution spontanée du système mécanique tend vers $\mathcal{E}_P$ minimal donc Φ maximal. Donc l'axe de la spire tend à être orientée selon $\vec{B}$.

6 – Dipôles électriques et magnétiques

On se place en coordonnées sphériques dans tout le chapitre.

I Champ E créé par un dipôle électrique

Un dipôle est une ensemble de charges q_i placées aux P_i telles que $\Sigma\, q_i = 0$.
Soit O un point voisin des (P_i). On pose $\vec{O}M = r\,\vec{e}_r$.
Approximation dipolaire : $\|\vec{O}P_i\| << r$. [...]
En posant $\vec{p} = \Sigma\, q_i\, \vec{O}P_i$ [indépendant de O car $\Sigma\, q_i = 0$]

on a : $\boxed{V(M) = \dfrac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{PM} - \dfrac{1}{NM}\right) = \dfrac{p\cos\theta}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r^2} = \dfrac{\vec{p}\,\vec{e}_r}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r^2}}$

Rem : en notant G_+ le barycentre des charges positives et G_- celui des charges négatives, on a $\vec{p} = ½\,(\Sigma\,|q_i|)\,\overrightarrow{G_-G_+}$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{2\,p\cos\theta\,\vec{u}_r + p\sin\theta\,\vec{u}_\theta}{r^3} = \frac{3(\vec{p}\,\vec{e}_r)\,\vec{e}_r - \vec{p}}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r^3}}$$

II Champ B créé par un dipôle magnétique

Soit une spire filiforme et M un point "loin" de la spire.

$\vec{A} = \displaystyle\oint_{spire} \frac{\mu_0\, I\, \overrightarrow{d\ell}}{4\,\pi\,PM} = \frac{\mu_0\, I}{4\pi}\iint \frac{-\vec{u}_{PM}\wedge d\vec{S}}{PM^2}$. Si r grand, $\boxed{\vec{A} \approx \dfrac{\mu_0\,\vec{m}\wedge\vec{e}_r}{4\,\pi\,r^2}}$ Lemme : $\oint_\Gamma f(M)\,\overrightarrow{d\ell} = -\iint_\Sigma \overrightarrow{\text{grad}}\, f \wedge d\vec{S}$.

en posant $\vec{m} = I\,\vec{S} = I\iint d\vec{S}$.
Lemme : Si $\vec{U}$ est uniforme et $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V} = \vec{0}$, alors $(\vec{U}\,\overrightarrow{\text{grad}})\,\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{U}.\vec{V})$

On montre donc que $\vec{B} = -\,\overrightarrow{\text{grad}}\left(\dfrac{\mu_0\,\vec{m}\,\vec{e}_r}{4\,\pi\,r^2}\right)$ or pour un dipôle électromagnétique, $\vec{E} = -\,\overrightarrow{\text{grad}}\left(\dfrac{\vec{p}\,\vec{e}_r}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r^2}\right)$.

Analogies : $1/\varepsilon_0 \rightleftharpoons \mu_0$ $\vec{p} \rightleftharpoons \vec{m}$ $\vec{B} \rightleftharpoons \vec{E}$.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\,\pi}\,\frac{2\,m\cos\theta\,\vec{u}_r + m\sin\theta\,\vec{u}_\theta}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\,\pi}\,\frac{3(\vec{m}\,\vec{e}_r)\,\vec{e}_r - \vec{m}}{r^3}$$

On vérifie que l'on retrouve le même champ dans des cas connus (sur l'axe d'une spire circulaire).

Ex : calcul de $\vec{B}$ dans le plan d'une spire circulaire. $\vec{B} = -\dfrac{\mu_0\, I\, a^2}{4\,r^3}\,\vec{e}_z$

III Expressions du moment magnétique

$\vec{m} = I\iint d\vec{S} = ½\, I\oint \overrightarrow{OP}\wedge\overrightarrow{d\ell}$. [en prenant pour Σ un chapeau de sorcière]
De manière générale,

$$\boxed{\vec{m} = \iiint_{courants} \frac{\overrightarrow{OP}\wedge\vec{j}_P\,d\tau_P}{2}}$$

Ex : boule uniformément chargée qui tourne. 2 méthodes. $\vec{m} = \dfrac{Q\,\omega\,a^2}{5}\,\vec{e}_z$.

Analogies avec la mécanique : de manière générale, $\boxed{\vec{m} = \dfrac{Q}{2m}\,\vec{L}_0}$ si ρ_{elec} et $\rho_{massique}$ sont uniformes. Le rapport Q/2m est appelé le rapport gyromagnétique.

IV Action d'un champ extérieur sur un dipôle électrique

- Champ extérieur uniforme $\vec{R} = \vec{0}$.
  $\vec{m}_{\boxtimes} = \vec{p}\wedge\vec{E}_{ext}$. Tendance à aligner $\vec{p}$ et $\vec{E}$.
- Champ extérieur faiblement inhomogène
  $\vec{R} = (\vec{p}\,\overrightarrow{\text{grad}})\,\vec{E}_{ext}$.
  $\vec{m}_{\boxtimes} = \vec{p}\wedge\vec{E}_{ext}$. Alignement de $\vec{p}$ et $\vec{E}$ puis attraction vers les zones de champ intense.
- Energie potentielle d'un dipôle dans un champ extérieur : $\mathcal{E}_P = -\,\vec{p}\,\vec{E}_{ext}$.
- Action d'un champ extérieur sur un dipôle rigide (c'est-à-dire $\|\vec{p}\| = c^{te}$).

$\mathcal{E}_P = \mathcal{E}_{P\,ext}$. $\vec{R} = \overrightarrow{\text{grad}}\,(\vec{p}\cdot\vec{E}_{ext})$. $d\mathcal{E}_P = -\,m_{\Delta\,\vec{E}ext \to \vec{p}}\,d\theta$.

Ex : molécule H_2 soumise à un champ $\vec{E}_{ext}$. Moment dipolaire induit : $\vec{p} = \varepsilon_0\,\alpha\,\vec{E}_{ext}$. α : polarisabilité de la molécule, de l'ordre de son volume. Calcul de la force exercée par une charge q sur un tel dipôle induit (en supposant que $-\vec{p}$ pointe vers la charge q) : $\vec{F} = \dfrac{-\,2\,q^2\,a}{16\,\pi\,x^5}\,\vec{e}_x$. [3 méthodes : $\vec{F} = (\vec{p}\ \overrightarrow{\text{grad}})\,\vec{E}_{ext}$; bilan d'énergie ; actions réciproques]

Rem : pour l'interaction dipôle-dipôle induit, la force est en $1/r^7$ (forces de Van der Waals, intramoléculaires).

V Actions sur un dipôle magnétique

♦ Champ extérieur uniforme : $\vec{R} = \vec{0}$.

$\vec{\Gamma}_{\boxtimes} = \vec{m} \wedge \vec{B}_{ext}$. (on note le moment différemment pour éviter un conflit de notations)

♦ Champ extérieur faiblement inhomogène. $\vec{R} = (\vec{m}\ \overrightarrow{\text{grad}})\,\vec{B}_{ext}$.

$\vec{\Gamma}_{\boxtimes} = \vec{m} \wedge \vec{B}_{ext}$.

♦ Energie potentielle d'un dipôle magnétique dans un champ $\vec{B}_{ext}$. $\mathcal{E}_{P\,ext} = -\,I\,\Phi = -\,\vec{m}\,\vec{B}$.

Si le dipôle est rigide, $\Gamma_D\,d\theta = d(\vec{m}\,\vec{B})$.

Ex : interaction entre 2 spires. Calcul direct et approximation dipolaire.

⌦ "En magnétostatique, l'interaction entre deux dipôles est souvent traitée par les équations, du reste assez peu parlantes, en face desquelles le candidat oublie l'utilité de la notion de ligne de champ, en particulier pour discuter qualitativement des forces d'interaction produisant translation et/ou rotation." (X2000)

7 – Conducteurs en régime permanents

Un conducteur est un système où $\vec{E}$ implique la présence de courant.

I Champ électrique et charges

Si on introduit des charges dans un conducteur, il va mettre $\tau = \varepsilon_0/\sigma \approx 10^{-12}$ s pour les évacuer.

Conducteur réel	Régime permanent ou quasi-permanent	$\rho = 0$
	Electrostatique stricte ($\vec{j} = \vec{0}$)	$\rho = 0$ et $\vec{E} = \vec{0}$.
Conducteur parfait ($\sigma = \infty$)		$\rho = 0$, $\vec{E} = \vec{0}$ et $\vec{B} = \vec{0}$.

II Théorème de Coulomb

On se place dans le cas de l'électrostatique, ou du conducteur parfait.

Soit un conducteur et M un point sur la surface du conducteur mais côté vide. Alors $\boxed{\vec{E}_{ext}(M) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}}$

Rem : $\vec{E}_{ext}$ est le champ total, créé par tout l'univers.

Pression électrique équivalente : $\mathcal{P}_{elec} = \frac{\sigma^2}{2\,\varepsilon_0} = \frac{\varepsilon_0\,E_{ext}{}^2}{2}$ [2 demos : surfacique et volumique]

La pression électrique tend à dilater, la pression magnétique $\frac{\mu_0\,B_{ext}{}^2}{2}$ tend à écraser.

Ex : sphère conductrice coupée en deux, portée à un potentiel U. Force de répulsion entre les 2 sphères : $\frac{1}{2}\pi\,\varepsilon_0\,U^2\,\vec{e}_z$.

III Influence

• Approche qualitative

∗ Si on approche une charge près d'un conducteur, il y a électrisation par influence.

∗ Si on approche une charge $q > 0$ près d'un conducteur maintenu à un potentiel constant, tout le conducteur se charge négativement. [raisonnements avec lignes de champ]

• Théorème des éléments correspondants

Soient deux conducteurs C_1 et C_2. Un tube de champ qui relie C_1 à C_2 donne une intersection avec Σ_1 et Σ_2 appelés éléments correspondants. En appelant q_1 et q_2 les charges de Σ_1 et Σ_2, on a : $\boxed{q_1 + q_2 = 0}$.

• Influence totale : il y a influence totale entre 1 et 2 si toute ligne de champ issue de 1 arrive sur 2.

Ex : on emprisonne une charge q dans un conducteur.

Ex : charge ponctuelle près d'un plan à la masse. [long]

IV Cavité creusée dans un conducteur

• Cavité vide. Dans la cavité, le potentiel est uniforme. $\vec{E} = \vec{0}$. Donc $\sigma = 0$ en tout point de la surface interne.
C'est donc un écran parfait qui protège des influences électriques des charges extérieures.

• Cavité avec des charges ; le conduction est soumis à un potentiel constant : il y a découplage de $\vec{E}_{int}$ et de $\vec{E}_{ext}$. Le champ dans la cavité est indépendant des charges extérieures, et inversement. [unicité de $\Delta V = 0$ + CL]
Le conducteur est appelé "écran électrique".
Ex : cages, fil de garde d'une ligne à haute tension...

V Pouvoir des pointes

Accumulation de charges au bout d'une pointe... Utilisation du théorème des éléments correspondants.

8 – Condensateurs

I Condensateur plan

Soit e l'épaisseur entre les 2 électrodes et a tel que $S = a^2$.
a >> e implique que les zones de bord ont une influence très faible par rapport à la zone centrale. La charge totale de l'armature est principalement située dans la zone centrale, pour chaque armature.
$\vec{E}$ est parallèle à l'intérieur ⇒ $\vec{E}$ est uniforme.

On a : $Q = CU$, $\boxed{C = \frac{\varepsilon_0 S}{e}}$.

Si on remplace le vide par un isolant (ou diélectrique), il faut remplacer ε_0 par $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$. [~d]

II Autres condensateurs calculables

Pour le calculer, on écrit les relations : $U \rightleftharpoons \vec{E} \rightleftharpoons Q$.

• Condensateur cylindrique ou coaxial. $C = \dfrac{2 \pi \varepsilon_0 L}{\ln\left(\frac{a_2}{a_1}\right)}$.

• Condensateur sphérique (but taupinal). $C = \dfrac{4 \pi \varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}$.

• Condensateur presque plan : $C \approx \dfrac{\varepsilon_0 S}{e}$.

III Fabrication du condensateur

Par exemple, pour $e = 0{,}1$ mm, $\varepsilon_r = 3$, et $C = 1\ \mu F$, il faut $S = 10\ m^2$.
• Empilement au mica (couches d'isolants)
• Enroulage
• Condensateur électrochimique : une tension induit un courant qui créé un dépôt électrolytique sur le boitier. Le courant ne passe plus. La couche d'isolant sera très fine donc C assez grand.
Inconvénients : e dépend de U donc C n'a pas de valeur précise ; U doit toujours être du même signe.

IV Etude théorique des condensateurs

• Définition : un condensateur est un ensemble de 2 conducteurs en influence totale.
• Pour tout condensateur, il existe une grandeur C constante telle que $Q = CU$. [DEMO 4 états]
• Relation entre la résistance de fuite et la capacité : $RC = \dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon_r}{\gamma}$ où γ est la conductivité de l'isolant

(ATTENTION aux notations : elle est parfois notée σ)

Rem : RC, temps de décharge du condensateur, est donc indépendant de la géométrie.
Schéma équivalent d'un condensateur réel : condensateur idéal en parallèle avec une résistance.
Ex : $U_C(t)$ dans un circuit avec condensateur réel, source idéal de tension, interrupteur, et résistance.

9 – Energie électromagnétique

I Energie potentielle électrique d'un système de charges

Soient des charges q_i placées aux points M_i. Soit $V_i(M)$ le potentiel en M associé au champ $\vec{E}$ créé par la charge q_i.
L'énergie minimale nécessaire pour constituer ce système est :

$$W = \frac{1}{2}\sum_i q_i \sum_{j\neq i} V_j(M_i) = \frac{1}{2}\sum_i q_i V_i$$ où V_i est le potentiel en M_i créé par toutes les autres charges.

En modélisation volumique, $W = \iiint_{\text{système}} V \rho \, d\tau$.

W ne dépend pas du chemin parcouru donc on pose $\boxed{\mathcal{E}_P = \frac{1}{2}\sum_i q_i V_i = \frac{1}{2}\iiint_{\text{système}} V \rho \, d\tau}$.

Ex : pour un condensateur, $\mathcal{E}_{\text{élec}} = ½ QU = ½ CU^2 = ½ Q^2/C$.

Ex : énergie de constitution d'une étoile : $\mathcal{E}_{\text{grav}} = -\frac{3}{5}\frac{\mathcal{G} m^2}{R}$ (on suppose ρ uniforme).

II Bilan d'énergie pour la charge d'un condensateur

• Charge réversible. Soit un circuit R C série avec générateur idéal de tension variable E = u + u ', avec $i \to 0$.
C'est une expérience fictive qui dure une infinité de temps : charge réversible sans dissipation d'énergie dans la résistance : $\mathcal{P}_{\text{joule}} / \mathcal{P}_{\text{source}} = R i^2 / E i = R i / E \to 0$.
La source fournit l'énergie dW = dq E = dq u = C u du quand u varie de du.
$W_{\text{accumulé}} = ½ CU^2$ est une fonction d'état.

$$\boxed{\mathcal{E}_{\text{élec}} = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} QU}$$

• Charge non réversible : on retourve le même résultat, en notant que $W_{\text{joule}} = W_{\text{stockée}}$; le rendement est de 0,5.

III Localisation de l'énergie électrique (en électrostatique)

Hypothèse : l'énergie $\mathcal{E}$ d'un système (S) peut se mettre sous la forme $\mathcal{E} = \iiint_{(S)} e_{\text{vol}} \, d\tau$.
On pense que $e_{\text{vol}} = \varepsilon_0 \vec{E}^2 / 2$.
• Condensateur plan : $\mathcal{E} = \iiint_V \varepsilon_0 \vec{E}^2 / 2 \, d\tau$.
• Condensateur cylindrique : Ca marche.
• Interaction entre 2 charges ponctuelles : Ca marche aussi.

IV Energie électromagnétique

On garde l'hypothèse selon laquelle l'énergie est répartie dans l'espace.
Bilan d'énergie : $\Delta\mathcal{E} = -W_{\text{fournie par le champ à la matière}} - W_{\text{sortant par rayonnement}}$.
Soit $\vec{R}$ le champ vectoriel "densité surfacique d'énergie rayonnée", ou vecteur de Poynting (en $W.m^{-2}$), tel que
$\forall$ Σ surface, $\mathcal{P}_{\text{ray}} = \Phi_\Sigma(\vec{R})$

On obtient $d\mathcal{E}/dt = -\iiint \vec{j}\,\vec{E} \, d\tau - \oiint \vec{R} \, d\vec{S}$. D'où : $\boxed{\frac{\partial e_{\text{vol}}}{\partial t} + \vec{j}\,\vec{E} + \operatorname{div}\vec{R} = 0}$

Rem_1 : $\vec{j}\,\vec{E}$ est la puissance dissipée par effet joule.

Rem_2 : on peut écrire $\frac{\partial e_{\text{vol}}}{\partial t} = \underbrace{-\operatorname{div}\vec{R}}_{\text{échange}} \underbrace{-\vec{j}\,\vec{E}}_{\text{création}}$ [CENTRALE Rem exam]

Les équations de Maxwell donnent, en identifiant :

$$\boxed{e_{\text{vol}} = \frac{\varepsilon_0 \vec{E}^2}{2} + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} + e_K} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}}$$

Vérification dans le cas de la charge d'un condensateur plan d'armatures circulaires.
Attention, e_K est à rajouter lorsqu'il y a mouvement de porteurs de charges (plasma, ..., et plein d'autres choses).
Bref, on a deux languages pour décrire l'énergie d'un même phénomène :

∗ Travail de déplacement des charges.
∗ Modification de propriétés de l'espace.

V Utilisation d'un bilan d'énergie pour déterminer une action mécanique

Ex : électromètre à plateaux. Deux électrodes de charges +Q et –Q, dont l'une est fixe et l'autre est soumise à une force extérieure F qui tend à l'écarter de la 1e. Il y a équilibre. Alors la valeur de F est $\frac{Q^2}{2\,\varepsilon_0\,S}$.

[4 méthodes : F = QE ; F = PS ; déplacement à Q constant ; déplacement à U constant]

10 – Induction

I ARQP

On se place dans le cadre de l'ARQP, c'est-à-dire :

ARQP ⇔ Propagation négligée
⇔ Etablissement instantané du champ
⇔ Propagation à vitesse $c = \infty$.

$\vec{B}$ se traite comme en magnétostatique, mais $\vec{E}$ est couplé à $\partial\vec{B}/\partial t$. On a : $\vec{E} = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \vec{\text{grad}}\,V$

II Exemples de phénomènes d'induction

On bouge un aimant près d'une bobine reliée à un oscilloscope.
Phénomènes d'induction = phénomènes électrocinétiques consécutifs à la variation du champ $\vec{B}$ "vu" par un circuit.
2 façons de voir le phénomène :

	1e façon	2e façon
Cause de l'induction	Mouvement de l'aimant	Variation de $\|\vec{B}\|$
Effet mécanique	Force sur l'aimant, opposée à son mouvement	Création d'un champ induit, opposé à $\vec{B}$.

Loi de Lenz : Les effets des courants induits s'opposent aux causes de l'induction.
L'induction due à des variations de $\vec{B}$ sur un circuit fixe s'appelle l'induction de Neuman.
L'induction due à un circuit mobile dans un champ $\vec{B}$ permanent s'appelle l'induction de Lorentz.
C'est le même phénomène, à un changement de référentiel près.

III Induction de Neuman

• Circuit filiforme fermé sans sources : on a $RI = -\frac{d\Phi}{dt}$, où $F = \Phi_S(\vec{B})$ (en T m², ou Weber Wb).

Le phénomène est équivalent à une résistance en série avec un générateur de force éléctromotrice d'induction :

$$\boxed{e = -\frac{d\Phi}{dt}} \qquad \text{(Loi de Faraday)}$$

Attention à l'orientation : e est dans le sens de I.
Mais les conventions d'orientation ne changent pas le sens du phénomène physique : on peut vérifier que $\vec{B}_{\text{induit}}$ s'oppose à la variation de $\vec{B}$, de manière générale.

• Cas d'une bobine fermée : $\Phi_{\text{bobine}} \approx \sum \Phi_{\text{spires}}$.
Ex : bobine carrée ($h \times h$, 100 spires, résistance R) à une distance d d'un fil où passe un courant variable i. Elle est orientée de telle sorte que Φ soit maximal. Il passe dans la bobine un courant induit $i' = \frac{50\,h\,\mu_0}{\pi R}\frac{di}{dt}\ln\left(\frac{b+h}{b}\right)$.

• Conducteur filiforme ouvert : $R\,I_{AB} = U_{AB} + \int_A^B -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\,\vec{d\ell}$

Schéma équivalent : R en série avec $e = \int_A^B -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\,\vec{d\ell} = \int_A^B \vec{E}_m\,\vec{d\ell}$ où $\vec{E}_m$ est appelé le champ électromoteur.

• Cas d'une bobine ouverte : c'est la même chose qu'une bobine fermée, à peu de choses près... $e = -\frac{d\Phi}{dt}$.

IV Autoinduction

• Soit une bobine parcourue par un courant d'intensité i. On pose $\vec{B} = \vec{B}_{\text{ext}} + \vec{B}_{\text{propre}}$, où $\vec{B}_{\text{propre}}$ est le champ $\vec{B}$ créé par i. $\vec{B}_{\text{propre}}$ est proportionnel à i donc Φ_{propre} aussi, donc il existe une constante L telle que $\Phi_{\text{propre}} = -\,L\,i$.
On appelle L l'inductance de la bobine. Par un vague schéma, on montre que L > 0.

Ex : solénoïde sans effet de bord. $\boxed{L = \dfrac{\mu_0 N^2 S}{\ell}}$. Ce qui donne l'unité de μ_0 : $\mu_0 = 4\pi\ 10^{-7}$ H m^{-1}.

Pour calculer L, on écrit les relations $e \rightleftharpoons \Phi \rightleftharpoons \vec{B} \rightleftharpoons I$
On peut augmenter L en ajoutant un noyau de fer mais on perd la linéarité.

Ex : Bobine torique à section rectangulaire. $L = \dfrac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln\left(\dfrac{b+a}{a}\right)$.

• Paradoxe : soit une spire circulaire filiforme parcourue par un courant. $\Phi_{propre} = 2\pi \int r\, B(r)\, dr$ ne converge pas.
Et on ne peut remplacer le fil filiforme par un fil volumique car le flux n'a pas de définition en volumique.
• Schéma équivalent : Si on considère que $\vec{B}_{ext} \neq \vec{0}$, R, L en série avec $e = -\,d\Phi_{ext}/dt$.
Ex : bobine fermée en court circuit.
• Energie magnétique propre : $\mathcal{E}_{mag} = ½\, L\, i^2$.   [demo]
Ex : solénoïde sans bords. On retrouve $\mathcal{E} = \iiint e_{vol}\, d\tau$.

• Autre définition de l'inductance : $L = \dfrac{2\,\mathcal{E}_{propre}}{i^2}$. Alors, on n'a plus de paradoxe, et $L > 0$ car $\mathcal{E}_{propre} > 0$.

Ex : inductance de cable coaxial. $L = \dfrac{\mu_0\, \ell}{2\pi} \ln\left(\dfrac{b}{a}\right)$.

V Inductance mutuelle de deux circuits

• Soient deux bobines proches parcourues par un courant.

$\boxed{e_1 = -\dfrac{d\Phi_{\Sigma 1}(\vec{B}_2)}{dt} = -M_{12}\dfrac{di_2}{dt}}$, et de même pour e_2.

On a $M_{12} = M_{21} = \dfrac{\mu_0}{4\pi} \oint_{①}\oint_{②} \dfrac{\overrightarrow{d\ell_{P_1}} \cdot \overrightarrow{d\ell_{P_2}}}{P_1P_2}$, que l'on notera M : inductance mutuelle.   [d]

Rem : le signe de M dépend des orientations.

Ex : Solénoïde long (N, ℓ) et spire qui tourne autour. $M = -\dfrac{\mu_0 S N}{\ell}$.

• Energie d'un système de 2 circuits : $\boxed{\mathcal{E}_{mag} = ½\,(L_1 i_1^2 + L_2 i_2^2 + 2\,M\, i_1\, i_2)}$ [d bilan]
$\mathcal{E}_{mag} > 0$ implique $|M| \leq \sqrt{L_1 L_2}$.
S'il y a égalité, on dit qu'il y a couplage parfait : toutes les lignes de champ de $\vec{B}_1$ qui passent par Σ_1 passent par Σ_2, et de même pour $\vec{B}_2$.
Ex : 2 bobines identiques. Résolution des équations différentielles en posant $I = i_1 + i_2$ et $J = i_1 - i_2$.
Ex : calculer l'action mécanique d'un fil infini parcouru par un courant sur une bobine carrée (L, R) située à une distance d de celui-ci. On commence par orienter la bobine, puis on calcule l'intensité sur la bobine, enfin on calcule $\vec{R}$.
Si $L\omega << R$, $<\vec{R}> = \vec{0}$: la force n'est que vibrante.
Rem : $<a \cdot b> = ½\, \mathrm{Re}(a \cdot \bar{b}) = ½\, a_{max}\, b_{max} \cos \varphi_{a/b} = a_{eff}\, b_{eff} \cos \varphi_{a/b}$.
• Ordres de grandeur : Pour une spire $L \sim \mu_0\, a$ où a est une distance caractéristique de la bobine.
Pour N spires $L \sim N^2 \mu_0\, a$ (il faut raisonner avec $\vec{B}_{propre}$)
Donc $L\omega/R \propto N$
Pour un tore simple d'épaisseur a ou pour un tore constitué de N spires d'épaisseur totale a, on a $L\omega/R$ constant.

VI Induction de déplacement ou induction de Lorentz

Soit R le référentiel d'étude. On suppose $\vec{B}$ permanent : $\dfrac{d\vec{B}}{dt}\Big|_R = \vec{0}$. Le circuit, lui, est mobile (vitesse V).

Forces sur un porteur : $\vec{F} = q(\vec{E} + \underbrace{\vec{V}_{conducteur/R} \wedge \vec{B}}_{\text{champ électromoteur de déplacement}} + \underbrace{\vec{V}_{e/conducteur} \wedge \vec{B}}_{\text{effet Hall (pas d'influence électrocinétique)}})$.

• Champ électromoteur de Lorentz : Soit $\vec{V}$ la vitesse d'entrainement du conducteur par rapport au référentiel R.
$\vec{V} \wedge \vec{B}$ est appelé "champ électromoteur de déplacement".

• Force électromotrice de Lorentz : L'effet Hall n'a pas d'influence électrocinétique : $(\vec{v}_{/cond} \wedge \vec{B})\, \vec{d\ell} = 0$.

Le système est équivalent à une résistance R en série avec une fem $e_{AB} = \int (\vec{V} \wedge \vec{B})\, \vec{d\ell}$.

• Deuxième expression de la fem : $e_{AB} \cdot i_{AB} = -\,\mathcal{P}_{Laplace}$.

• Troisième expression de la fem : $e_{AB} = -\dfrac{d\Phi_c}{dt}$. Dans le cas d'un circuit fermé ou d'une bobine, $e_{AB} = -\dfrac{d\Phi}{dt}$.

VII Cas général

Soit un circuit mobile dans $\vec{B}$ variable.

$\boxed{\vec{E}_m = \underbrace{-\dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}}_{\text{Neumann}} + \underbrace{\vec{V} \wedge \vec{B}}_{\text{Lorentz}}}$.   On a toujours $e_{AB} = \int \vec{E}_m\, \vec{d\ell}$.

Et dans le cas d'un circuit fermé ou d'une bobine, $e_{AB} = -\dfrac{d\Phi}{dt}$

⌦ Attention, si L varie, la tension aux bornes de la bobine est : $L\dfrac{di}{dt} + i\dfrac{dL}{dt}$.

Ex : tige de longueur a, vitesse V, qui roule sur un rail fermé avec une résistance R. $\vec{B}$ uniforme. $\vec{F}_{Lap} = -\dfrac{\vec{B}^2a^2V}{R}\,\vec{e}_x$.

On néglige chaque fois le champ $\vec{B}$ induit. Ici, cela revient à dire : $\dfrac{\mu_0\, V}{R} << 1$. AN : $4\pi\ 10^{-7}$.

Ex : cadre qui entre dans une zone de $\vec{B}$ uniforme. Equations mécaniques et électromagnétiques couplées.

On a $\dfrac{d^2v}{dt^2} + \dfrac{R}{L}\dfrac{dv}{dt} + \dfrac{B^2a^2}{mL}\,v = 0$.

Ex : roue à 2N rayons (chacun de résistance R) qui tourne avec une vitesse ω, baignant à moitié dans une zone de $\vec{B}$ uniforme. $m_\Delta = -\dfrac{N\,B^2a^4\omega}{8R}$.   (Millman)

VIII Courants de Foucault

• Courants de Foucault = courants induits dans le volume d'un conducteur.

On a besoin de deviner les lignes de courant. Elles sont fermées. $\oint \vec{j}\, \vec{d\ell} > 0$ avec $\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) = \sigma(-\,\vec{\text{grad}}\, V + \vec{E}_m)$.
Dans le cas de Neuman (conducteur fixe), il faut $d\Phi_\Sigma(\vec{B})/dt \neq 0$. Il faut aussi $\text{div}\, \vec{j} = 0$.
Aux limites, les lignes de $\vec{j}$ sont tangentes aux parois.
Ex : cylindre assez plat qui tourne dans $\vec{B}$ uniforme. Pas de courants de Foucault : $\vec{E}_m = \vec{\text{grad}}(½\ \omega\, B\, r^2)$.
Ex : le même cylindre dans $\vec{B}$ pas uniforme. Courants de Foucault. Analyse dimensionnelle. $m_{\Delta\ Lap} \propto -\sigma B^2a^2b^2e\omega$.
Les effets sont très importants pour ω grand.
Ex : cylindre (rayon a) dans $\vec{B}$ cylindrique (rayon b < a).

$\vec{E} = -\dfrac{r}{2}\dfrac{dB}{dt}\,\vec{e}_\theta$ pour r < b et $\vec{E} = -\dfrac{b^2}{2r}\dfrac{dB}{dt}\,\vec{e}_\theta$ pour r < a.   (avec $\oint \vec{E}\, \vec{d\ell}$ sur des cercles)

$\mathcal{P}_{\text{dissipée}} = \dfrac{\pi e b^4\sigma}{2}\left(\dfrac{B_0\,\omega}{2}\right)^2\left(\dfrac{1}{4} + \ln\!\left(\dfrac{a}{b}\right)\right)$ (avec $\mathcal{P} = \vec{j}\,\vec{E} = \sigma\, E^2$)

On vérifie que $B_{\text{induit}} << B_{\text{appliqué}}$.

Ex : parallélépipède assez plat dans $\vec{B}$ sinusoïdal. Alors $\mathcal{P}_{\text{dissipée}} = \dfrac{\sigma L a e^3 B_0^2\omega^2}{24}$.

• Le transformateur : il repose sur une propriété du fer, de canaliser les lignes de champ $\vec{B}$.
On utilise des feuillets pour minimiser $\mathcal{P}_{\text{total}}$.

Modèle simple : la résistance du bobinage est nulle. Alors $\dfrac{U_1}{N_1} = \dfrac{U_2}{N_2}$ et $\dfrac{i_1}{N_2} = -\dfrac{i_2}{N_1}$, et $<\mathcal{P}_{\text{secondaire}}> = <\mathcal{P}_{\text{primaire}}>$.   [D]

Modèle plus élaboré : $\vec{B}_{\text{fer}} \approx \vec{B}_{\text{vide}}$ en remplaçant μ_0 par $\mu_r\, \mu_0$. ($\mu_r >> 1$). On a : $\Phi_0 \propto N_1\, i_1 + N_2\, i_2$.
Si le circuit secondaire est ouvert, il y a quand même courant dans le primaire, et perte d'énergie (→ il faut N grand).

IX Moteurs

• Moteur à courant continu. En notant $\Phi_0 = B_0\, a\, h$, on a : $m_{Lap} = -\dfrac{B_0\, a\, h\ (\,E + B_0\, a\, h\, \omega)}{R_1 + \dfrac{r}{2N}}$.

De manière générale, un moteur à courant continu est équivalent à une résistance R_e en série avec une source de tension $e = \varepsilon\, \Phi_0\, \omega$, où $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ dépend de l'orientation de i et de B, et Φ_0 est un flux qui dépend de la géométrie...
Si on le branche à un générateur réel (E, R_i) de tension, on a 3 régimes différents (suivant ω) :

* $\omega \le 0$ $\mathcal{P}_{\text{source}} < 0$ et $\mathcal{P}_{\text{appliqué}} > 0$: la source absorbe de l'énergie (dynamo)
* $0 \le \omega \le E/\Phi_0$ $\mathcal{P}_{\text{source}} > 0$ et $\mathcal{P}_{\text{appliqué}} < 0$: régime moteur

$*\ \omega \geq E/\Phi_0$ $\quad\mathcal{P}_{source} > 0$ et $\mathcal{P}_{appliqué} > 0$: récepteur sans intérêt

• Système triphasé : 3 bornes en $U_0 \cos(\omega t + 2k\pi/3)$ et une borne à la masse. Il permet d'avoir un $\vec{B}$ tournant.

• Moteur asynchrone : il se base sur un $\vec{B}$ tournant. Une bobine plate fermée, en libre en rotation autour de Oz soumise à $\vec{B}$ tournant à la vitesse ω_0 autour de Oz.

Alors $\underline{i} = -\dfrac{j(\omega_0 - \omega)\ \underline{\Phi}}{R + j\,L\,(\omega_0 - \omega)}$ et $\langle\Gamma_{Laplace}\rangle = \dfrac{\Phi_0^2(\omega_0 - \omega)}{2R\left(1 + \dfrac{L^2(\omega_0 - \omega)^2}{R^2}\right)}$ avec $\Phi_0 = NSB$.

$\langle\Gamma\rangle$ est extrémal pour $\omega = \omega_0 - R/L$. En général, il y a deux points de fonctionnement, dont un instable.

• Moteur synchrone : même principe, mais la bobine tournante est alimentée, avec $i_{induit} << i_{appliqué}$.

$\Gamma = -\,m\,B \sin((\omega - \omega_0)t)\ \vec{e}_z$ est de moyenne nulle si $\omega \neq \omega_0 \rightarrow$ pour fonctionner, il faut $\omega = \omega_0$.

• Moteur linéaire : il se base sur un $\vec{B}$ se propageant. Si L est négligeable, on a :

$$F_{Laplace} = \frac{V_0\,b^2}{R}\left(1 - \frac{\dot{X}}{V_0}\right)\left(f\left(t - \frac{X + a}{V_0}\right) - f\left(t - \frac{X}{V_0}\right)\right)^2.$$

Ex : circuit proche de l'entrefer d'un électroaimant de $\vec{B}$ Heaviside. Etude du mouvement du circuit.

2 phases : choc puis freinage. [long + approximations ...]

11 – ARQP dans un conducteur ohmique

I Validité de l'ARQP dans un conducteur

Pour un champ sinusoïdal, l'ARQP est valide si $\varepsilon_0\ \omega << \sigma$, c'est-à-dire $\omega << 10^{18}$ rad. s^{-1}. [Maxwell]

II Equations de diffusion

En appliquant l'opérateur $\vec{\text{rot}}$ aux équations de Maxwell, on obtient :

$$\boxed{\Delta\vec{E} = \mu_0\,\sigma\,\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}}\ \boxed{\Delta\vec{j} = \mu_0\,\sigma\,\frac{\partial\vec{j}}{\partial t}}\ \boxed{\Delta\vec{B} = \mu_0\,\sigma\,\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}}$$

Ces équations sont appelées équations de diffusion.

III Solution de l'équation de diffusion

• On se place dans le cas :
- E fonction sinusoïdale du temps
- Métal semi infini : il est dans le demi-espace $x \geq 0$.

En utilisant des notations complexes, on a : $\frac{d^2\underline{J}}{dx^2} - \frac{2i}{\delta^2}\underline{J} = 0$, en notant $\boxed{\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\,\sigma\,\omega}}}$.

Il y a confinement du courant sur une épaisseur de l'ordre de δ.
Ce phénomène s'appelle effet de peau. AN : $\delta_{50\text{ Hz}} \approx 9$ mm ; $\delta_{1\text{ MHz}} \approx 50\ \mu$m.

• Résolution exacte dans le cas d'un conducteur cylindrique infini.
On aboutit à l'équation de Bessel : $\frac{d^2\underline{J}}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\underline{J}}{dr} - \frac{2i}{\delta^2}\underline{J} = 0$. On peut résoudre de manière approchée par des développements en série...

• Tout ce qui a été dit sur $\vec{j}$ est vrai pour $\vec{E}$ et $\vec{B}$. Les phénomènes d'atténuations de $\vec{B}$ à l'intérieur du conducteur s'appellent effet Kelvin.

Ex : sandwich de conducteur d'épaisseur e, avec $\vec{B}_{ext}$ uniforme. Alors $\underline{B}_{int} = \dfrac{\exp\left(\frac{1+i}{\delta}x\right) + \exp\left(-\frac{1+i}{\delta}x\right)}{\exp\left(\frac{1+i}{2\delta}e\right) + \exp\left(-\frac{1+i}{2\delta}e\right)}$

Pour un supraconducteur, $\delta \to 0$; la profondeur de pénétration est nulle. $\vec{B}_{int} = \vec{0}$.
Ex : résistance d'un conducteur en régime variable. On suppose $\delta << a$. On définit R par la puissance.
[...] $R = \frac{h}{\sigma\ 2\pi a\ \delta}$ = résistance d'un tube creux de rayon a d'épaisseur δ. Le phénomène est négligeable en TP.

• Atténuation d'un champ extérieur. Soit un tube creux conducteur d'épaisseur e. Le champ extérieur est sinusoïdal. Alors le champ intérieur est $B_{ext} \times \exp(1 - e/\delta)$ avec un déphasage $\to$ protection de l'intérieur du tube.
Comparaison avec le point de vue "induction"...

PROPAGATION

1 – Propagation

I Equation de D'Alembert à une dimension

1 – Propagation d'un signal sans déformation

Soit un signal s(x, t).
$\exists f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \forall x, \forall t, s(x, t) = f(t - x/c) \Leftrightarrow$ propagation dans le sens positif.
$\exists f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \forall x, \forall t, s(x, t) = f(t + x/c) \Leftrightarrow$ propagation dans le sens négatif.

Equation de D'Alembert : $\boxed{\dfrac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 s}{\partial t^2}}$ $\Leftrightarrow \exists f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \forall x, \forall t, s(x, t) = f(t - x/c) + g(t + x/c)$

$\Leftrightarrow$ s est somme d'un signal qui se propage sans déformation dans le sens positif et d'un signal qui se propage sans déform. dans le sens négatif.

Ex : propagation d'un signal le long d'une ligne coaxiale. On néglige les résistances diverses.
On modélise une portion dx du cable par une inductance $dL = \Lambda\, dx$ et une capacité $dC = \Gamma\, dx$.
Kirchhoff donne $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \Lambda\Gamma \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ donc $c = \dfrac{1}{\sqrt{\Lambda\Gamma}}$. Etude de cas avec rebond.

Si de l'autre bout de la ligne coaxiale on place une résistance $R_C = \Lambda c = \sqrt{\dfrac{\Lambda}{\Gamma}}$, il n'y a pas de signal réfléchi.
R_C est appelé résistance caractéristique du système. "On fait croire que le fil est infini"

II Onde monochromatique

Une onde est monochromatique si elle est de la forme $s(u) = s_0 \cos(\omega u + \varphi)$.
$s(x, t) = s_0 \cos(\omega t - \omega x/c + \varphi)$. On pose $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$.
⌧ En général, le nombre d'onde n'est pas k mais $k/2\pi = 1/\lambda = \sigma$. ($\rightarrow$ se méfier)
Une onde est progressive si elle se propage dans un seul sens (+ ou –).
Une onde est plane si $\partial/\partial y = \partial/\partial z = 0$.
On note une onde plane progressive monochromatique OPPM.
Intérêt des ondes monochromatiques :

- pour un système régi par une équation aux dérivées partielles linéaires, si le terme de source est sinusoïdal de pulsation ω, la solution est sinusoïdale de pulsation ω. Le principe de superposition permet de traiter tous les signaux périodiques (avec la décomposition en série de Fourier)
- pour les calculs, l'emploi des complexes est très efficaces

Les solutions en OPPM de l'équation de D'Alembert sont de la forme $s(x, t) = s_0 \cos(\omega t - \omega x/c + \varphi)$

III Autres équations de propagation (avec déformation)

• On considère le cable coaxial. On ne néglige plus la résistance de la bobine.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \Lambda\Gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \rho\Gamma \frac{du}{dt}$$

En cherchant les solutions en OPPM, on obtient $\boxed{k^2 = \omega^2\Lambda\Gamma - i\omega\rho\Gamma}$ (relation de dispersion)
Il y a un terme d'atténuation lors de la propagation. Si $k = k' + i\,k''$, $s(x, t) = s_0 \cos(\omega t - k'x + \varphi) \exp(k''x)$.
Si l'atténuation est faible, c'est-à-dire $\rho << \Lambda\omega$, alors $k'' = -\dfrac{\rho}{2}\sqrt{\dfrac{\Gamma}{\Lambda}} = -\dfrac{\rho}{2R_C}$.
Ex : Pour un cable coaxial, la distance d'atténuation $1/k'' \approx 12$ km.

Mais k' n'étant plus proportionnel à ω, la vitesse de phase v_φ dépend également de ω, avec $\boxed{v_\varphi = \dfrac{\omega}{k'}}$

Le système est alors dit dispersif.
• Exemple : Propagation de $s(0, t) = s_0 \cos(\omega_1 t) \cos(\omega_2 t)$ avec $\omega_1 >> \omega_2$.