[MP – MATHEMATIQUES 3]

[MP – MATHEMATIQUES 3] **1**

QUELQUES EQUIVALENTS 2
THEOREME DE CAUCHY-LIPSCHITZ (RESUME) 2
THEOREME DES FONCTIONS IMPLICITES (RESUME) 2
PRINCIPES DE RESOLUTION DE QUELQUES EXERCICES 2

GEOMETRIE **3**

85 – COURBES D'UN EVN DE DIMENSION FINIE 3

SERIES ENTIERES **5**

86 – SERIES ENTIERES 5
87 – FONCTION EXPONENTIELLE 6
88 – DEVELOPPEMENT D'UNE FONCTION EN SERIE ENTIERE 7
89 – (EX) APPLICATIONS DES SERIES ENTIERES 8

SERIES DE FOURIER **9**

90 – SERIES DE FOURIER 9

EQUATIONS DIFFERENTIELLES **12**

91 – E. D. L. SCALAIRES DU 1^{ER} ORDRE 12
92 – EXPONENTIELLE DE MATRICES 13
93 – E. D. L. VECTORIELLES DU 1^{ER} ORDRE 14
94 – E. D. L. VECTORIELLES DU 1^{ER} ORDRE A COEFFICIENTS CONSTANTS 15
95 – E. D. L. SCALAIRES D'ORDRE 2 16
96 – E. D. L. SCALAIRES D'ORDRE 2 A COEFFICIENTS CONSTANTS 17
97 – EQUATIONS DIFFERENTIELLES NON LINEAIRES 18
98 – EXEMPLES D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES NON LINEAIRES 19

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES **20**

99 – CALCUL DIFFERENTIEL 20
100 – (EX) EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES 22
101 – (EX) FONCTIONS HARMONIQUES 23

INTEGRALES CURVILIGNES, INTEGRALES DOUBLES **24**

102 – FORMES DIFFERENTIELLES DE DEGRE 1 24
103 – (EX) INDICE 25
104 – COURBES & SURFACES 25
105 – INTEGRALES DOUBLES 27

Quelques équivalents

$\ln n \sim 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$

$n^p \sim n(n+1)(n+2)\ldots(n+p)$

Théorème de Cauchy-Lipschitz (résumé)

Type	Equation	Condition	Affirme	Démo
1 $\mathcal{L}$ $\mathbf{K}$	$y'(x) = a(x)\,y(x) + b(x)$	a, b C^0		$\exp(\int a) + y_0$
1 $\mathcal{L}$ $\mathbf{K}^n$	$Y'(x) = a(x)(Y(x)) + b(x)$	a, b C^0		pt. fixe
1 $\mathcal{L}$ $\mathbf{K}^n$ CC	$Y'(x) = a(Y(x))$		$Y(t) = \exp(ta)(Y(0))$	$\exp(ta)\,y(0)$
2 $\mathcal{L}$ $\mathbf{K}$	$y''(x) = a(x)\,y(x) + b(x)\,y(x) + c(x)$	a, b, c C^0		déc 1$\mathcal{L}\mathbf{K}^n$
1 A $\mathbb{R}$	$y'(x) = f(y(x))$	f C^1(ouvert, $\mathbb{R}$)	sol. mx. sur ouvert	
1 A $\mathbb{R}^2$	$Y'(x) = F(Y(x))$	F C^1(ouvert, $\mathbb{R}^2$)	sol. mx. sur ouvert	
2 A $\mathbb{R}$	$y''(x) = f(y(x), y'(x))$	f C^1(ouvert, $\mathbb{R}$)	sol. mx. sur ouvert	déc 1A$\mathbb{R}^2$
1 NA $\mathbb{R}$	$y'(x) = f(x, y(x))$	f C^1(ouvert, $\mathbb{R}$)	sol. mx. sur ouvert	déc 1A$\mathbb{R}^2$

⌧ Savoir résoudre des équations différentielles est très important ! (X1999)

Théorème des fonctions implicites (résumé)

Ens. de départ	Arrivée	Condition	Conclusion
$U_{ouv} \subset \mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}$	F C^k $(k \geq 1)$ $D_2F(x_0, y_0) \neq 0$	$\exists\ \varphi$ C^k, $F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x)$ localement
		F C^1 $\vec{\text{grad}}\ F(x_0, y_0) \neq \vec{0}$	$\exists$ paramétrage C^1 de F = 0. $\vec{\text{grad}}\ F(x_0, y_0) \perp$ tangente à la courbe
$U_{ouv} \subset \mathbb{R}^3$	$\mathbb{R}$	F C^k $(k \geq 1)$ $D_3F(x_0, y_0, z_0) \neq \vec{0}$	$\exists\ \varphi$ C^k, $F(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow z = \varphi(x, y)$ localement
		F C^1 $\vec{\text{grad}}\ F(x_0, y_0, z_0) \neq \vec{0}$	$\exists$ param. C^1 de F = 0 $\vec{\text{grad}}\ F(x_0, y_0, z_0) \perp$ plan tangent à la surface
$U_{ouv} \subset \mathbb{R}^3$	$\mathbb{R}^2$	F C^k $(k \geq 1)$ $\begin{vmatrix} D_2F_2 & D_3F_2 \\ D_2F_3 & D_3F_3 \end{vmatrix}(M_0) \neq 0$.	$\exists\ \varphi$ C^k, $F(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow (y, z) = f(x)$. localement
		F_1 et F_2 possèdent des plans tangent	Leur intersection est tangente à la courbe.

Principes de résolution de quelques exercices

∗ Prouver une égalité entre deux fonctions :
- vérifient même équation différentielle.

∗ Trouver un équivalent :
- pour une intégrale : IPP (dériver la constante)

GEOMETRIE

85 – Courbes d'un evn de dimension finie

I Courbes paramétrées C^k

• Soit I intervalle. Soit $f \in C^k(I, E)$.
(Déf) On dit que t_0 est un point régulier si $f'(t_0) \neq 0$.
(Déf) On dit que t_0 est un point birégulier si $(f'(t_0), f''(t_0))$ est libre.
• Changement de paramètre : soit $\varphi \in C^1(I, \mathbb{R})$ telle que $\varphi' > 0$. Alors $\varphi(I)$ est un intervalle, et φ induit une bijection de I sur J, de réciproque C^1. On pose $g = f \circ \varphi^{-1}$: on a effectué un changement de paramètre admissible.

II Etude locale

• (Déf) Soit $f \in C^0(I, E)$. Soit $t_0 \in \mathrm{Int}(I)$. La courbe possède une demi-tangente en t_0^+ si $\lim\limits_{t \to t_0+} \dfrac{\vec{M_0M_t}}{\|M_0M_t\|}$ existe dans E.
• (Th) Soit $f \in C^1(I, E)$. Soit $t_0 \in \mathrm{Int}(I)$. On suppose t_0 régulier. Alors la courbe possède en ce point une tangente.
Lemme : Soient φ et $\psi \in E^I$. Alors $\varphi \underset{a}{\sim} \psi \Rightarrow \|\varphi\| \underset{a}{\sim} \|\psi\|$. [démo + démo prec]
• Généralisation : Soit $f \in E^I$ C^k telle que $f'(t_0) = 0$.
Soit $p = \mathrm{Min}\{ j \geq 1 \ / \ f^{(j)}(t_0) \neq 0 \}$ s'il existe. Soit $q = \mathrm{Min}\{ j \in \mathbb{N}^* \ / \ (f^{(p)}(t_0), f^{(j)}(t_0))$ libre $\}$ s'il existe.
Alors si p est impair, il y a une tangente. S'il est pair, il y a une demi tangente (la même des deux cotés). [TY]

p pair		p impair	
q pair	q impair	q pair	q impair
point de rebroussement de 2^e espèce	point de rebroussement de 1^e espèce	Méplat	point d'inflexion
			

• Exemple : $x = \cos^3 t$ et $y = \sin^3 t$. Echelle qui tombe.

III Abscisse curviligne

Désormais, E est un ev euclidien.

• (Déf) Soit $f \in C^1([a, b], E)$ régulière. La longueur de l'arc est $\int_a^b \|f'\|$.

(Ex) Soit $f \in C^1([a, b], E)$ régulier. Alors $\int_a^b \|f'\| = \mathrm{Sup}\left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \|f(t_k) - f(t_{k+1})\| \ \Big/ \ n \in \mathbb{N}^* \text{ et } t_0 = a < t_1 < \ldots < t_n = b \right\}$.
Ce qui peut permettre de définir la longueur d'un arc pour des fonctions C^0, mais le sup n'existe pas toujours.
• (Déf) Soit $f \in C^1(I, E)$. Il s'agit d'un paramétrage normal si $\forall\, t \in I$, $\|f'(t)\| = 1$. Dans ce cas, t est appelé abscisse curviligne.
(Th) Soit $f \in C^1(I, E)$ régulière. Alors il existe un paramètre admissible s qui est une abscisse curviligne. [demo]
Rem : il n'y a pas unicité de l'abscisse curviligne ($-s$, $s + 1$...)

IV Courbure

Ici, E est un plan vectoriel euclidien orienté. Soit (e_1, e_2) une BOND.
• Soit $f \in C^2(I, E)$ avec un paramétrage normal. Le théorème du rélèvement affirme alors :
$\exists\, \alpha \in C^1(I, \mathbb{R}), \forall\, s \in I, f'(s) = \cos(\alpha(s))\, e_1 + \sin(\alpha(s))\, e_2$. α est appelé phase.

(Déf) On pose $\gamma = \dfrac{d\alpha}{ds}$. γ est appelé courbure (parfois notée c). Si $\gamma \neq 0$, $R = \gamma^{-1}$ est appelé rayon de courbure.
• On note $\vec{T} = f'(s)$, appelé vecteur unitaire tangent. Soit N l'unique vecteur tel que $(\vec{T}, \vec{N})$ soit une BOND.
Alors $\boxed{\dfrac{d\vec{T}}{ds} = \gamma \vec{N} \text{ et } \dfrac{d\vec{N}}{ds} = -\gamma \vec{T}}$ (formules de Frenet) Remarque : $\vec{T}$, $\vec{N}$, α sont C^1.

⌦ Il faut bien connaître ces formules (Centrale2000)
• On suppose la courbe C^2. Elle est birégulière $\Leftrightarrow$ $(\vec{T}, \gamma\vec{N})$ libre $\Leftrightarrow$ γ ne s'annule pas.
Dans ce cas, a est un paramétrage admissible, et $\dfrac{d\vec{T}}{d\alpha} = \vec{N}$ et $\dfrac{d\vec{N}}{d\alpha} = -\vec{T}$.

• Centre de courbure : si $\gamma(s) \neq 0$, on définit C par $\vec{MC} = R\,\vec{N}$. On a : $\dfrac{d\vec{OC}}{ds} = \dfrac{dR}{ds}\vec{N}$. [déroulé]

V Méthode de calcul

• Soit $f \in C^2(I, E)$ birégulière. Alors $\boxed{\gamma = \dfrac{\text{Dét}(f', f'')}{\|f'\|^3}}$, ou encore $R = \dfrac{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{x'y'' - x''y'}$.

Rem : $\vec{T}$ dépend seulement du sens de parcourt. $\vec{N}$ dépend de $\vec{T}$ et de l'orientation.

• Pour le graphique d'une fonction d'une variable, $R = \dfrac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}$. Si la tangente est horizontale, $\gamma = y''$.

VI (Ex) Equations intrinsèques

Données intrinsèques : s, γ, R.

• $R = R_0$ Alors c'est un cercle. [2 demos : dOC/ds et param x et y]
• $R = s$ Alors c'est une spirale logarithmique.
• $R = 1 + s^2$ Alors c'est une chainette.
• $R^2 + s^2 = a^2$ Alors c'est une cycloïde.

SERIES ENTIERES

86 – Séries entières

I Rayon de convergence

Rappel de l'énoncé du critère de D'Alembert.

• (Déf) Soit $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On pose $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. On appelle le rayon de convergence de f

$$R = \text{Sup } \{ t \in \mathbb{R}_+ \ / \ (a_n t^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ bornée } \} \in \bar{\mathbb{R}}.$$

• (Th) Si $|z| < R$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est absolument convergente. Si $|z| > R$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ diverge. [demo]

• (Ex) $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^n$ ont un rayon de convergence de 1.

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, z^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} n^n z^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n$ ont un rayon de convergence de ∞, 0, 0, 2.

• (Ex) On suppose que $\lim_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell \in \bar{\mathbb{R}}$. Alors $R = \frac{1}{\ell}$. [demo > <]

Rem : la "règle de Cauchy" sur $|a_n|^{1/n}$ n'est pas au programme.

• (Ex) Soit $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Alors les séries entières associées à (a_n) et à $(|a_n|)$ ont même rayon.
Mais leur domaine de définition peut différer des points du cercle.
Si $(c_n) = O(a_n)$, et le rayon de la série entière associée à (c_n) est supérieur de celui associé à (a_n).
Le rayon associé à $(n^{\alpha} a_n)$ est le même que celui associé à (a_n).
Le rayon associé à (a_{n+1}) est le même que celui associé à (a_n). [demos]

• (Ex) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sin\left(n\pi\sqrt{2}\right)} z^n$ a un rayon de convergence de 1. [demo ≤ avec astuce : $(n\sqrt{2} - k_n)(n\sqrt{2} + k_n)$]

• (Th) La somme de deux séries entières f et g associées à (a_n) et (b_n), de rayons R et R' est une série entière associée à $(a_n + b_n)$, et son rayon R'' est tel que $R'' \geq \text{Min}(R, R')$. [demo]

• (Th) Produit de Cauchy de 2 séries entières : Soient f et g 2 séries entières de rayons R et R' associées à (a_n) et (b_n).

Soient $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ et $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ de rayon R''. Alors :

$R'' \geq \text{Min}(R, R')$, et $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z| < \text{Min}(R, R') \Rightarrow h(z) = f(z)\, g(z)$. [d th]

(exemple de f et g tel que $R'' > \text{Min}(R, R')$)

II Propriétés de la somme

• (Th) Soit f série entière associée à (a_n) de rayon R. Soit $r \in [0, R[$. Alors la série converge normalement sur $\bar{D}(0, r)$, et donc f est continue sur $D(0, R)$. [d]

⌦ Attention, il n'y a pas forcément convergence uniforme sur $D(0, R)$. (Centrale1999)

• (Th) Cas où $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| R^n$ converge : Alors la série converge normalement sur $\bar{D}(0, R)$ donc la somme est continue sur $\bar{D}(0, R)$.

• (Th) Soit f série entière associée à (a_n) de rayon R. Alors f est C^0 sur $]-R, R[$, et $F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n t^{n+1}}{n+1}$ est la primitive de f sur I nulle en 0.

• (Th) Soit f série entière associée à (a_n) de rayon R. Alors f est C^{∞} sur $]-R, R[$, et $\forall t \in I$, $f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n t^{n-1}$.

Rem : $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = n!\, a_n$.

Corollaire : Si $\exists a > 0$, $\forall t \in]-a, a[$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n$.

• (Déf) Soit $f \in C^{\infty}(]-a, a[, \mathbb{C})$. On dit que f est développable en série entière sur $]-a, a[$ s'il existe $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que

$\forall x \in]-a, a[, f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

(Déf) Soit $f \in C^\infty(]-a, a[, \mathbb{C})$. On appelle série de Taylor de f la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.
Rem : il peut arriver qu'elle ne converge que pour x = 0, ou qu'elle converge vers une autre fonction. Ex : $\exp(-1/t^2)$
• (Ex) Soit $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Soit f série entière associée à (a_n) de rayon R. Soit $a \in D(0, R)$. Soit $g(h) = f(a+h)$.
Alors g est la somme d'une série entière de rayon $R' \geq R - |a|$ sur $D(0, R - |a|)$. [demo permutation]
On dit que toute série entière est "analytique". Attention, $f^{(k)}(a)$ n'a pas de sens si $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

III Comparaison de la somme de deux séries entières en R⁻

• (Ex) Soit $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Soit f série entière associée à (a_n). Alors :

$$\left.\begin{array}{l} a_n \geq 0 \\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ diverge} \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{t \to R^-} f(t) = +\infty \qquad \text{[demo f } \nearrow \text{ absurde]}$$

• (Ex) Soient (a_n) et $(b_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Soient f et g les séries entières associées. Alors :

$$\left.\begin{array}{l} a_n \geq 0 \\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ diverge} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} b_n = o(a_n) & \Rightarrow g =_{R^-} o(f) \\ b_n \sim a_n & \Rightarrow g \sim_{R^-} f \end{array}\right. \qquad \text{[demo 2 morceaux]}$$

• (Ex) Soit $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \ln(n)\, t^n$. Alors R = 1, et $f(t) \underset{1^-}{\sim} -\frac{\ln(1-t)}{1-t}$.

☠ (Ex) Soit $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge. Soit f série entière associée à (a_n). Alors f est continue sur [0, 1].
[demo_1 : Etude de $f(t)/(1-t)$ avec prec et $a_0 = 0$; demo_2 : Abel]

IV Autres propriétés de la somme d'une série entière

• (Ex) Soit f série entière associée à (a_n) telle que $a_0 = 0$, $R \neq 0$ et $f \neq 0$. Alors 0 est un zéro isolé, c'est-à-dire
$\exists \delta \in]0, R[, \forall z \in D(0, \delta), f(z) = 0 \Rightarrow z = 0$. [demo factorise par z^p]
• Généralisation : Soit f série entière associée à (a_n) telle que $R \neq 0$. Soit $a \in D(0, R)$ tel que $f(a) = 0$. Alors a est un zéro isolé. [demo topologique. $V = \text{Int}\{z \in U \,/\, f(z) = 0\}$]
• (+) Soit $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et f série entière associée. On suppose que $R = \infty$ et qu'il y a convergence uniforme sur $\mathbb{R}$. Alors f est un polynôme. [+]

87 – Fonction exponentielle

• (Déf) $\forall z \in \mathbb{C}, e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$. Le rayon de convergence est infini.
• (Th) $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, e^{z+z'} = e^z e^{z'}$. [demo produit de Cauchy]
• (Déf) $\forall z \in \mathbb{C}, \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ et $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$.
Rems : $\forall z \in \mathbb{C}, e^{iz} = \cos z + i \sin z$. [déf]
$\forall z \in \mathbb{C}, \cos^2 z + \sin^2 z = 1$
Sous-rem : il suffirait de montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \cos^2 x + \sin^2 x = 1$.
(Déf) Une fonction est entière si elle admet un développement en série entière de rayon infini. Ex : exp, sin, cos, $\mathbb{C}[X]$
• Formules de trigonométrie. On peut les redémontrer ...
• (Déf) $\forall x \in \mathbb{R}, \cos x \in \mathbb{R}$. cos s'annule au moins une fois [demo]. On appelle $\pi = 2 \text{ Min}\{ t \in \mathbb{R}_+ \,/\, \cos t = 0 \}$.
exp est $2 i \pi$ périodique.
• $\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^2, x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \exists !\, \theta \in [0, \pi/2], \cos\theta = x$ et $\sin\theta = y$. [tvi sur cos]
• Sur $\mathbb{R}$, exp ' = exp et exp > 0. C'est un C^∞ difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$. On a : $\exp^{-1}(x) = \int_0^x \frac{dt}{t} = \ln(x)$.
• (Ex) $\forall z \in \mathbb{C}, e^z = \lim_n \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ [sur $\mathbb{R}$ ok ; sur $\mathbb{C}$: différence avec rems et inég triang]

Rem : $\forall$ k $\in \mathbb{N}, \frac{1}{k!} \geq \frac{C_n^k}{n^k}$.

• (Th) Soit f : I $\to \mathbb{C}$ dérivable. Soit g = exp $\circ$ f. Alors g est dérivable, et $\forall$ t $\in$ I, $g'(t) = e^{f(t)} f'(t)$.

88 – Développement d'une fonction en série entière

I Introduction

Soit a > 0. Soit $I_a =]-a, a[$. Soit f $\in \mathcal{F}(I_a, \mathbb{C})$. f est-elle la somme d'une série entière ?

Condition nécessaire : f est C^∞. Soit $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ et $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Quel est le rayon de g ? Est-ce que g = f ?

II Développements en série entière à connaître

• (Th) $\forall$ t $\in$]–1, 1[, $\ln(1 + t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n}$. [il suffit de dériver]

La formule est vraie en 1 (CVU altern).

• (Th) Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. On pose $\forall$ u $\in$]–1, +∞[, $(1 + u)^\alpha = \exp(\alpha \ln(1+u)) = f(u)$.

Soit $s(u) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u^n$ avec $\forall$ n $\in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}$.

Si $\alpha \in \mathbb{N}$, $R_s = \infty$. Si $a \notin \mathbb{N}$, $R_s = 1$. s et f vérifient l'équation différentielle $(1 + x) y' = \alpha y$. Conclusion, $f|_{]-1, 1[} = s$.

• (Th) $\forall$ x $\in$]–1, 1[, $\text{Arctan } x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$. [dérive] La formule est vraie au point 1 (CVU altern).

• (Th) $\forall$ x $\in$]–1, 1[, $\text{Arcsin } x = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{2n+1}$ avec $b_n = \frac{\prod_{i=1}^{n} \left(i - \frac{1}{2}\right)}{n!\,(2n+1)}$. [dérive]

La formule est vraie en 1. (Stirling ou CVU comp R^- car $b_n \geq 0$ et Arcsin borné).

• (Th) Soit P $\in \mathbb{C}[X]$ et Q $\in \mathbb{C}[X]$ tels que $P \wedge Q = 1$, $d°Q \geq 1$ et $Q(0) \neq 0$. Soit f = P/Q.

Soit a = Min{ |z| / Q(z) = 0 }. Alors f est développable en série entière avec un rayon a.

[décomp éléments simples ; absurde R > a avec $P \wedge Q = 1$ et passage limite]

III Autres exemples

• Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit f(x) = sin(α Arcsin(x)). f est solution de $(1 - x^2) y'' - xy' + \alpha^2 y = 0$. On cherche les solutions développables en série entière $\to$ relation de récurrence sur (a_n). Bref, on peut faire un DSE à f de rayon 1.

• tan est développable en série entière sur]–π/2, π/2[.

Lemme$_1$: $\forall$ x $\in$ [0, π/2[, $\forall$ n $\in \mathbb{N}$, $\tan^{(n)}(x) \geq 0$.

Lemme$_2$: $\forall$ n $\in \mathbb{N}$, $\exists P_n \in \mathbb{N}[X]$, $\tan^{(n)} = P_n(\tan)$. [$P_{n+1} = (1 + X^2)P_n'$]

Taylor avec reste intégral. Le reste tend vers zéro (ruse avec y $\in$]x, π/2[ )

• (Ex) Soit f série entière associée à (a_n) avec $a_0 \neq 0$ et $R \neq 0$. Alors 1/f est la somme d'une série entière au voisinage de zéro. [demo PCauchy et lemme]

Lemme : $R_{(a_n)} > 0 \Rightarrow \exists A > 0, \exists B > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leq A B^n$.

• $f(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-u} \sin(xu)}{u} du = \text{Arctan}(x)$. [SE ou dérive]

89 – (Ex) Applications des séries entières

• Soit $q \in]-1, 1[$. Alors $\left\{ f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \;/\; \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (1 - qx)\, f(qx) \right\} = \mathbb{R}\, f_0$ avec $\forall x \in \mathbb{R}, f_0(x) = \prod_{k=1}^{n} (1 - q^k x)$.

• Soit (E) $(1 - x^2)\, y'' - 4\, x\, y' - 2\, y = 0$. Soit $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et f vérifiant (E).

Alors $\forall n \geq 0, (n+1)\,(n+2)\, a_{n+2} - n\,(n-1)\, a_n - 4\, n\, a_n - 2\, a_n = 0$.

De manière générale, pour transformer une équation différentielle en relation de récurrence en (a_n) :

- dérivation $\Rightarrow$ indice $\nearrow$
- multiplication par x $\Rightarrow$ indice $\searrow$
- le coefficient affecté à (a_k) commence par $k(k-1)(k-2)\ldots$; le nombre de termes est l'ordre de dérivation.

Soient $f : x \to \dfrac{1}{1 - x^2}$, $g : x \to \dfrac{x}{1 - x^2}$ et $h : x \to \dfrac{1}{1 + x}$.

Sur $]-1, 1[$, $\mathscr{S} = \mathrm{Vect}\{f, g\}$. [demo SE] Sur $]1, +\infty[$, $\mathscr{S} = \mathrm{Vect}\{f, g\}$. [demo rapide !]

Sur $]-1, +\infty[$, $\mathscr{S} = \mathbb{R}\, h$. Sur $]-\infty, +\infty[$, $\mathscr{S} = \{0\}$.

• Soit (E) $x\, y'' + y' + x\, y = 0$. Une solution de (E) est J_0 avec $\forall x \in \mathbb{R}, J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2^{2n}\, (n!)^2}\, x^{2n}$: fonction de Bessel.

• Soit f = sin/Id prolongée en 0. Alors f est C^∞ sur $\mathbb{R}$. [2 demos : SE ou jadis]

• $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$ $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1} = \dfrac{\pi}{4}$. [SE avec ln(1+z) ou Arctan(z)]

• Soit $\lambda \in]0, 1]$. Alors $\left\{ f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \;/\; f \text{ dérivable et } \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(\lambda x) \right\} = \mathbb{R}\, f_1$, avec

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n!}\, x^n.$$ [SE puis TLag]

SERIES DE FOURIER

90 – Séries de Fourier

I Coefficients de Fourier

• (Th) Soit $f \in C^0PM(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ 2π-périodique. Alors $x \to \int_x^{x+2\pi} f$ est une constante. [demo chv ou prim D]

• (Déf) Soit $f \in C^0PM(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ 2π-périodique. On pose, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\hat{f}(n) = c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt$.

Rem : ça n'est pas un produit scalaire de f par e_k car la forme n'est pas définie positive.

(Prop) $\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n(\overline{f}) = \overline{c_{-n}(f)}$. Si $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_{-n}(f) = \overline{c_n(f)}$.

• Soit $f \in C^0PM(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ 2π-périodique. Soit $g : t \in \mathbb{R} \to f(-t) \in \mathbb{C}$. Alors $\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n(g) = c_{-n}(f)$.

Donc f paire $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = c_{-n}(f)$.

f impaire $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = -c_{-n}(f)$ et $c_0(f) = 0$.

• Soit $f \in C^0PM(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ 2π-périodique. Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $g : t \in \mathbb{R} \to f(t+a) \in \mathbb{C}$. Alors $\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n(g) = e^{ina}\, c_n(f)$.

• (Déf) Soit $f \in C^0PM(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ 2π-périodique. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k\, e^{ikx}$.

On a : $S_n(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin(kx)$ avec $\forall k \geq 0$, $a_k = c_k + c_{-k}$ et $\forall k \geq 1$, $b_k = i(c_k - c_{-k})$.

Egalement, $\forall k \geq 1$, $a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)\, dt$ et $b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)\, dt$.

Si $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, a_k et b_k sont réels.

Si f est paire, $(b_k) = 0$. Si f est impaire, $(a_k) = 0$.

(Déf) Si $\lim S_n(f)(x) = f(x)$, on dit que la série de Fourier converge au point x vers f(x).

II Propriétés de $\hat{f}$

Soit CPM l'ensemble des fonctions C^0PM 2π-périodiques.

On note $\|f\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f|$. C'est une semi-norme sur CPM.

• (Th) Soit $f \in$ CPM. Alors $\hat{f}$ est bornée, et $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$.

Rem : l'application $\mathcal{F} : f \in E \to \hat{f} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ est une application linéaire.

• (Th) Soit $f \in$ CPM. Alors $\lim c_n(f) = \lim c_{-n}(f) = 0$. [demo RL ou après : $|c_n(f)|^2$ sommable]

• (Th) Soit $f \in$ CPM, C^0 et C^1PM.. Alors $\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n(Df) = i\, n\, c_n(f)$.

Plus généralement : soit $k \geq 1$. Soit $f \in$ CPM, C^{k-1} et C^kPM. Alors $\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n(D^kf) = (i\, n)^k\, c_n(f)$.

Donc $c_n(f) \underset{n \to \pm\infty}{=} o\left(\frac{1}{|n|^k}\right)$.

III Convergence en moyenne quadratique

Soit CPM l'ensemble des fonctions C^0PM 2π-périodiques.

Soit $C_{2\pi}$ l'ensemble des fonctions continues périodiques.

Soit $D = \{ f \in \text{CPM} \,/\, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2}(\ell^+(x) + \ell^-(x)) \}$.

• (Th) L'application $\varphi : (f, g) \in D^2 \to \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{-\pi} \overline{f}\, g \in \mathbb{C}$ est un produit scalaire hermitien.

On note e_k l'application : $t \in \mathbb{R} \to e^{ikt} \in \mathbb{C}$. Rappel : (e_k) est une famille orthonormale.

Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des polynômes trigonométriques : $\mathcal{P} = \text{Vect}\{e_k \,/\, k \in \mathbb{Z}\}$

• Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $F_p = \text{Vect}\{e_{-p}, ..., e_p\}$. $\dim F_p = 2p + 1$. Soit $f \in D$. Soit $d_p = d(f, F_p)$. d_p converge.

❍ (Th) Soit $f \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ 2π périodique. Alors :

$$\left.\begin{array}{c} f\ C^0PM \\ f = \frac{1}{2}(\ell^+ + \ell^-) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{ S_p(f) \xrightarrow{q} f \text{ sur } \mathbb{R} \right. \qquad \text{(c'est-à-dire } d_p \to 0)$$

[demo Weierstrass puis que $C_{2\pi}$ est dense dans D pour $\| \ \|_2$ puis concl]

⌧ C'est un théorème extrêmement important ! (X2000)

• Corollaire : formules de Bessel-Parseval

$$\forall f \in CPM, \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2.$$

$$\forall (f, g) \in CPM^2, \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}\, g = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{c_n(f)}\ c_n(g).$$

(Th) Soit $\mathcal{F} : f \in D \to (c_n(f)) \in \ell^2(\mathbb{Z})$. Alors $\mathcal{F}$ est une application linéaire injective isométrique (conserve la norme et le produit scalaire). Rem : elle n'est pas surjective car $\ell^2(\mathbb{Z})$ est complet et pas D.

(Th) $\forall f \in E, \forall f \in CPM, \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 = \frac{|a_0|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + |b_n|^2$

• Soit f définie par $f_{|]-\pi,\pi[} = Id$. On prolonge f en 2π-périodique et $f(-\pi) = f(\pi) = 0$.

$(a_n) = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, b_n = 2\frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Bessel-Perseval donne : $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$. (CVS voir plus loin)

$$\forall t \in]-\pi, \pi[, t = \sum_{n=1}^{\infty} 2\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nt).$$

IV Convergence ponctuelle

❍ (Th) Soit $f \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ 2π périodique. Alors :

$$\left.\begin{array}{c} f\ C^0 \\ f\ C^1PM \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (c_n(f)) \text{ sommable} \\ S_p(f) \xrightarrow{n} f \text{ sur } \mathbb{R} \end{array}\right.$$

[demo avec $c_n(Df)$ puis $\| \ \|_\infty$ plus fine que $\| \ \|_2$]

Rem : il faut préciser ce que l'on entend par convergence normale quand $n \in \mathbb{Z}$.

❍ (Th de Dirichlet) : Soit $f \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ 2π périodique. Alors :

$$f\ C^1PM \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, S_p(f)(x) \to \lim_{\substack{h \to 0^+ \\ h \neq 0}} \frac{1}{2}(f(x+h) + f(x-h)).$$

[DEMO avec D_p ; différence = $I_p + J_p$; RL]

Rem : $S_p(f) = D_p * f$, avec $\forall t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}, D_p(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-p}^{p} e^{-ikt} = \dfrac{\sin\left(\left(p + \frac{1}{2}\right)t\right)}{2\pi\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$.

Propriétés de D_p :

$* \ \forall p \in \mathbb{N}, \int_{-\pi}^{\pi} D_p = 1$ [demo avec e^{-ikt}]

$* \ \forall \delta \in]0, \pi[, \lim_p \int_{\delta}^{\pi} D_p = 0.$ [RL avec ipp]

⌧ Il faut bien se rappeler que le th. de Dirichlet ne s'applique qu'aux fonctions C^1PM. (Centrale1999)

• (Ex) Soit f définie sur $]0, \pi[$ par $f(t) = \frac{1}{2}(\pi - t)$. On la prolonge en impaire 2π-périodique. Le calcul montre que

$$\forall t \in]0, 2\pi[, \frac{\pi - t}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nt)}{n}.$$

• (Ex) Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. On définit f sur $]-\pi, \pi[$ par $f(t) = \cos(\alpha t)$. Alors :

$$\forall t \in]-\pi, \pi[, \cos(\alpha t) = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha(-1)^n}{\alpha^2 - n^2}\cos(nt)\right).$$

D'où $\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} = \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha(-1)^n}{\alpha^2 - n^2}$.

• (Ex) $\forall \alpha \in]0, 1[, \int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$ [demo permutation SE 2 bouts]

V Exercices

• Soit $(d_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ sommable. Soit $f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n e^{int}$. Alors $\lim S_n(f) = f$ car $c_n(f) = d_n$.

• Rem : condition pour que $(d_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ soit les coefficients de Fourier d'une fonction :
∗ nécessaire : (d_n^2) sommable. ∗ suffisante : (d_n) sommable.

• Soit f C^0PM et 2π périodique. On suppose $(c_n(f))$ sommable. Alors f est somme d'une fonction continue avec une fonction nulle sauf en un nombre fini de points.

• Soit $f \in C_{2\pi}\ C^1$ avec $\int_{-\pi}^{\pi} f = 0$. Alors $\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f'|^2$. [BP à f ']

Il y a égalité $\Leftrightarrow f \in \mathrm{Vect}\{\sin, \cos\}$.

• Convergence en moyenne de la série de Fourier (pas avec $\| \|_1$ mais avec Césaro-Fejer)

Soit $F_n(t) = \dfrac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k(t) = \dfrac{\sin^2\left(\frac{nt}{2}\right)}{2\pi n \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}$. F_n a les propriétés de D_n pour $\int$ et est positive.

Soit $f \in C_{2\pi}$. Soit $g_n = F_n * f = (1/n)\ (S_0(f) + ... + S_{n-1}(f))$. Alors (g_n) converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.
[Weierstrass-like]

Corollaire : soit $f \in C_{2\pi}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $\lim S_n(f)(x)$ existe, c'est $f(x)$.

VI (Ex) Formule sommatoire de Poisson

• Soit $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ intégrable. On pose $\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, e^{-ixt}\, dt$. Alors $\hat{f}$ est bornée et continue sur $\mathbb{R}$.

On suppose de plus que $f(x) \underset{\pm\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et $\hat{f}(x) \underset{\pm\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

• On a : $\forall x \geq 0,\ \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(2n\pi) = \dfrac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n)$ [Avec $g(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x + 2n\pi)$ et $c_n(g)$]

Ex : Soit $\alpha > 0$ et $f(x) = e^{-\alpha x^2}$. Alors $\hat{f}(x) = \sqrt{\dfrac{\pi}{\alpha}} \exp\left(-\dfrac{x^2}{4\alpha}\right)$. [équa. diff.]

Ex : Soit $\theta(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 t}$. Alors $\forall t > 0, \theta(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}\, \theta\left(\dfrac{1}{t}\right)$.

Ex : Soit $\alpha > 0$ et $f(x) = e^{-\alpha |x|}$. On obtient $\dfrac{1}{\pi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dfrac{\alpha}{\alpha^2 + n^2} = \dfrac{e^{2\alpha\pi} + 1}{e^{2\alpha\pi} - 1}$. On en déduit $\zeta(2)$. [dl de th]

VII Application aux séries entières

• Soit $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et f série entière associée. On suppose $R > 0$. Soit $r \in [0, R[$. Soit $g_r(t) = f(r e^{it})$.

Alors $\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(g_r) = \int_{-\pi}^{\pi} f(r e^{it})\, e^{-int}\, dt = a_n r^n$ si $n \geq 0$ et 0 sinon.

Rem : g_r est C^∞ sur $\mathbb{R}$ (dérivées $k^{\text{ièmes}}$). Bessel-Perseval donne :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(r e^{it})|^2\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}.$$

• (Ex) Toute fonction entière bornée sur $\mathbb{C}$ est constante.

• (Ex) Soit $(a_n) \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ et f série entière associée. On suppose $R_f > 0$ et f bornée sur $D(0, 1)$. Alors f polynôme.

• (Ex) Soit f série entière de rayon non nul tel que $|f|$ atteint un maximum local en 0. Alors f est constante. [rapide]

• Inverse : soit $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et f série entière associée. On suppose $a_0 \neq 0$ et $R \geq 0$.

Soit $a = \mathrm{Inf}(\{R\} \cup \{|z| \ / \ z \in D(0, R) \text{ et } f(z) = 0\})$. Alors $1/f$ est développable en série entière dans $D(0, a)$.
[demo g_r $C_{2\pi} \cap C^\infty$; Equadif en $c_n(r)$ avec IPP : $c'_n(r) = (n/r)\ c_n(r)$]

Notation : $\forall z \in D(O, R),\ f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n z^{n-1}$.

EQUATIONS DIFFERENTIELLES

91 – E. D. L. scalaires du 1^{er} ordre

Soit $\mathbf{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

• (Déf) Soient $a, b, c \in \mathcal{F}(I, \mathbf{K})$. Soit (E) : $a(x)\, y' + b(x)\, y = c(x)$ avec a, b et c C^0 sur I.

L'application $u : y \in \mathcal{D}(I, \mathbf{K}) \to a\, y' + b\, y \in \mathcal{F}(I, \mathbf{K})$ est linéaire.

Alors $\mathcal{S} = \{ u \in \mathcal{D}(I, \mathbf{K}) \ /\ u(y) = c \}$ est vide ou un espace affine de direction Ker u.
En pratique, il faut faire l'étude sur chaque intervalle sur lequel a ne s'annule pas.

• (Th) Soit (E) $y' + a(x)\, y = 0$ avec a C^0 sur I.

Alors $\dim \mathcal{S} = 1$, et une base de $\mathcal{S}$ est $x \to \exp\left(-\int_{x_0}^{x} a\right)$ où $x_0 \in I$. [dériver $y(x)\exp(\int a)$]

• (Th) Soit (E) $y' + a(x)\, y = b(x)$ avec a et b C^0 sur I.

Alors $\mathcal{S}$ est un sous espace affine de $\mathcal{D}(I, \mathbf{K})$ de dimension 1. [non vide : MVC]

• (Th de Cauchy Lipschitz) Soit (E) $y' + a(x)\, y = b(x)$ avec a et b C^0 sur I

Soient $a_0 \in I$ et $b_0 \in \mathbf{K}$. Alors $\exists\, !\ y \in \mathcal{S}$, $y(a_0) = b_0$. [solu. partic.]

Rem : les solutions ne se coupent pas, et passent partout.

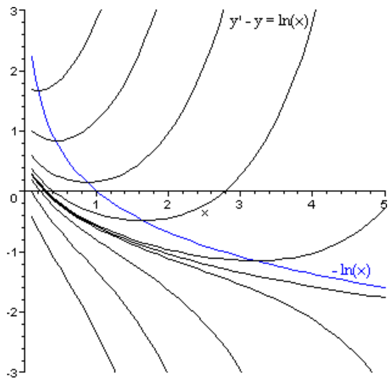
• (Ex) Soit (E) $y' - y = \ln x$. Tracer les solutions, et faire une étude aux bornes.

$y \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \exists\, K \in \mathbb{R}, \forall\, x \in \mathbb{R}, y(x) = \exp(x)\left(-\int_x^{\infty} \frac{\ln(t)}{\exp(t)}\, dt + K\right)$. [MVC]

Si $K \neq 0$, $y(x) \underset{+\infty}{\sim} K \exp(x)$

Si $K = 0$, $y(x) \underset{+\infty}{\sim} -\ln(x)$: solution exceptionnelle

En 0^+, les solutions ont une limite finie.



• (Ex) Soit (E) $y' + y = f$ avec $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ bornée.

Alors $\exists\, !\ y_0 \in \mathcal{S} \cap \mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et f périodique $\Rightarrow y_0$ périodique.

[demo unicité puis MVC existence ; CHV]

☠ (Ex) Lemme de Gronwall : soient u et $\varphi : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$, et $c \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\left.\begin{array}{r} u, \varphi\ C^0 \\ \varphi \geq 0 \\ \forall\, t \in [t_0, t_1],\ u(t) \leq c + \int_{t_0}^{t} u\, \varphi \end{array}\right\} \Rightarrow \forall\, t \in I,\ u(t) \leq c \exp\left(\int_{t_0}^{t} \varphi\right)$$ [demo exp()F(t)]

Ex : Soit $f \in C^0([1, +\infty[, \mathbb{R}_+)$ telle que $\forall\, t \in [1, +\infty[$, $f(t) \leq a + b\int_1^t \frac{f(u)}{u^2}\, du$. Alors f est majorée.

• (Ex) Soit (E) $y^2 = y'^2$. Alors $\mathcal{S} = \text{Vect}\{ \exp, \exp \circ (-\text{Id}) \}$.

[C^1 : supp s'annule qqpart + demo Gronwall ; dérivable : PVI dérivées]

92 – Exponentielle de matrices

I Rappels

• Soit A algèbre normée unitaire de dimension finie. $\forall$ x $\in$ A, $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.
Il y a convergence sur toute partie bornée.
• Soit a $\in$ A. Soit $e_a : t \in \mathbb{R} \to e^{ta} \in A$. Alors e_a est C^∞, et $De_a = a\, e_a = e_a\, a$.
• Soit A $\in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to AX \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est continue car $\mathcal{L}_C$.
• Soit F un $\mathbb{C}$ ev de dimension n. Soit B une base de F. Alors $u \in \mathcal{L}(F) \to \mathrm{Mat}(u, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est continue car $\mathcal{L}_C$.

II Propriétés de exp(M)

• (Th) $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ X\, e^X = e^X\, X$.
• (Th) $A = \mathrm{Mat}(u, B) \Rightarrow e^A = \mathrm{Mat}(e^u, B)$.
• (Th) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors $e^A \in GL_n(\mathbb{C})$, $\det(e^A) = \exp(\mathrm{Tr}\, A)$ et $\mathrm{Sp}(e^A) = \exp(\mathrm{Sp}(A))$. [lemme + trigonalisables]
Lemme : $\exp\left(\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} e^A & * \\ 0 & e^C \end{bmatrix}$.
• (Ex) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors $\exists P \in \mathbb{C}[X]$, $e^A = P(A)$. [$\mathbb{C}[A]$ est fermé car complet]
• (Ex) Soit A $\in$ E. Alors $e^A = \lim_k \left(I_n + \frac{A}{k}\right)^k$. [analogue à $\mathbb{C}$]
⌦ Ici, il faut utiliser une norme d'algèbre (par exemple $M \to \mathrm{Tr}({}^tMM)$).
(Ex) $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\|\exp(tA)\| = O(t^n \exp(t \operatorname{Max} \mathrm{Re}\, \mathrm{Sp}\, A))$ pour $t \to \infty$.

III Exponentielle de –A

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors $e^{-A} = (e^A)^{-1}$. [demo $g : t \to e^{tA}\, e^{-tA}$]
Rem : ☠ $e^{X+Y} \neq e^X e^Y$ en général.

$$\exp\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \exp\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ e-1 & e \end{bmatrix}.$$
$$\exp\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) \times \exp\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & e \end{bmatrix}.$$

IV Exercice

• Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente. Alors $\exists A \in E$, $e^A = I_n + N$. [$A \approx \ln(I_n + N)$; $Q \circ P \equiv 1 + X\ [X^n]$; dvp lim]
• Soit $B \in GL_n(\mathbb{C})$. Alors $\exists A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $e^A = B$. [sevc]

93 – E. D. L. vectorielles du 1er ordre

Soit F un ev normé de dimension finie n sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Théorème de Cauchy Lipschitz

Soit $a : I \to \mathcal{L}(F)$, $b : I \to F$ avec a et b C^0

Soit (E) $x'(t) = a(t)\, x(t) + b(t)$.

Une solution x est une fonction $C^1(J, F)$ telle que $\forall\, t \in J$, $x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$ avec $J \subset I$.

❍ (Th de Cauchy Lipschitz) Soient $t_0 \in I$ et $x_0 \in F$. Alors :

- il existe une solution x définie sur I telle que $x(t_0) = x_0$.
- toute solution y définie sur $J \subset I$ telle que $y(t_0) = x_0$ coïncide avec x sur J.

[éléments de demo existence locale : point fixe avec expression intégrale ...]

Rem : $\left.\begin{array}{r} x\ C^1 \text{ sur } I \\ x'(t) = a(t)\, x(t) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x\ C^0 \text{ sur } I \\ \forall\, t \in I,\ x(t) = x_0 + \displaystyle\int_a^b (a(u)\, x(u) + b(u))\, du \end{array}\right.$

II Equation homogène : b = 0

Soit (E) $x'(t) = a(t)\, x(t)$.

On appelle $\mathcal{S} = \{ x \in C^1(I, F) \,/\, \forall\, t \in I,\ x'(t) = a(t)\, x(t) \} \neq$ l'ensemble des solutions. [ATTENTION]

- (Th) $\mathcal{S}$ est un sev de $C^1(I, F)$ de dimension n sur $\mathbf{K}$. Soit $t_0 \in I$. L'application $x \in \mathcal{S} \to x(t_0) \in F$ est un isomorphisme d'ev. [découle de C. L.]
- (Déf) Toute base de $\mathcal{S}$ est appelée système fondamental de solutions.
- (Th) Soient $t_0 \in I$ et $(e_1, ..., e_n) \in \mathcal{S}$. Alors :

  $(e_1, ..., e_n)$ est un système fondamental de solutions $\Leftrightarrow$ $(e_1(t_0), ..., e_n(t_0))$ est libre.

Rem : pour des fonctions quelconques, $(e_1(t_0), ..., e_n(t_0))$ libre $\Rightarrow$ $(e_1, ..., e_n)$ libre.

- (Th) Wronskien : Soit B base de F Soient $x_1, ..., x_n \in \mathcal{S}$, et $t_0 \in I$. Soit $W(t) = \det_B(x_1(t), ..., x_n(t))$. Alors :

$$\forall\, t \in I,\ W(t) = W(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t} \operatorname{Tr} a(u)\, du\right). \qquad [\text{ équation différentielle }]$$

Rem : préc $\Rightarrow$ $(W(t_0) = 0 \Rightarrow W = 0)$.

III Méthode de la variation des constantes

Soit (E) $X'(t) = A(t)\, X(t) + B(t)$ avec A et B C^0.

On suppose connu $(X_1, ..., X_n)$ un système fondamental de solutions de l'équation homogène.

On note $R(t) = [\, X_1(t) \ldots X_n(t)\,] \in GL_n(\mathbf{K})$: résolvante.

X est solution de l'équation homogène $\Leftrightarrow \exists\, C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}),\ \forall\, t \in I,\ X(t) = R(t)\, C$.

Pour résoudre l'équation avec 2e membre, on cherche X(t) sous la forme $X(t) = R(t)\, C(t)$, avec $C \in C^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}))$.

Réciproquement, toute solution peut se mettre sous cette forme.

On trouve : $X \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \exists\, C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}),\ \forall\, t \in I,\ X(t) = R(t)\left(C + \displaystyle\int_{t_0}^{t} R^{-1}(u)\, B(u)\, du\right)$.

Exemple : $y' = -z + f$ et $z' = y + g$ avec f et $g \in C^0(I, \mathbb{R})$. R(t) est la rotation d'angle t...

94 – E. D. L. vectorielles du 1er ordre à coefficients constants

I Théorème de Cauchy-Lipschitz

(Th) Soit (E) $x'(t) = a(x(t))$ avec $a \in \mathcal{L}(E)$. Alors le système

$\begin{cases} x' = ax \\ x(0) = e \end{cases}$ possède une unique solution définie sur $\mathbb{R}$: $x(t) = \exp(ta)\, e$ (Problème de Cauchy)

[déjà vu mais démosimple : dérivemoi $\exp(-ta)x(t)$]

⌦ Nous aimerions que les candidats sachent que la solution du système $\frac{d}{dt} X = A(t)\, X$ et $X(0) = X_0$ avec $A(t) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ et $X(t) \in \mathbb{R}^n$ n'est pas $\exp\left(\int_0^t A(u)\, du\right) X_0$ (X1999).

II Applications

- (Th) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, s et $t \in \mathbb{R}$. Alors $\exp((s + t)A) = \exp(sA)\exp(tA)$ [demo s_0 et équa dif]
- (Ex) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Alors : $AB = BA \Rightarrow e^{A+B} = e^A e^B$. [demo même goût]

III Méthode de la variation des constantes

Soit (E) $x'(t) = ax(t) + b(t)$. Ici, $R(t) = \exp(ta)$.

On suppose que $x \in \mathcal{S}$ soit de la forme : $x(t) = e^{ta} c(t)$.
En remplaçant, on peut en déduire $c(t)$.

IV Exemples

- Soit $a \in \mathbb{R}^*$. $\begin{cases} y' = az \\ z' = ay \end{cases}$ On met les solutions sous la forme $\begin{bmatrix} y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \exp(tA) \begin{bmatrix} y(0) \\ z(0) \end{bmatrix}$.

On peut en déduire que $\exp\left(\begin{bmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{bmatrix}$.

Rem : on pouvait prévoir cela avec la définition matricielle de $\mathbb{C}$.

- $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 3x + 4y \end{cases}$ On cherche à diagonaliser la matrice associée. Ici, elle est diagonalisable. On résout dans une autre base.

$\mathcal{S}$: $\begin{cases} x(t) = \lambda e^t + \mu e^{5t} \\ y(t) = -\lambda e^t + 3\mu e^{5t} \end{cases}$

- $\begin{cases} x' = x - y + z \\ y' = x + y - z \\ z' = -y + 2z \end{cases}$ Ici la matrice n'est pas diagonalisable. On peut trouver X_1 et X_2 deux vecteurs propres, et un vecteur X'_1 tel que $(A - I_3)X'_1 = X_1$. Ceci fait, on remplace et on résoud dans la nouvelle base.

- Cas où A n'a qu'une seule valeur propre : $A = \lambda I_3 + N$.

Alors $\forall t \in \mathbb{R}$, $e^{tA} = e^{\lambda t}(I_3 + tN + \frac{1}{2} t^2 N^2)$ car I et N commutent.

$X \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, X(t) = e^{tA} X(0)$.

95 – E. D. L. scalaires d'ordre 2

I Système associé

• Soit (E) $x'' + a\,x' + b\,x = c$ avec $a, b, c \in C^0(I, \mathbf{K})$.
En posant $X = \begin{bmatrix} x \\ x' \end{bmatrix}$, (E) devient (S) $X' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ c \end{bmatrix}$.
(E) et (S) correspondent aux mêmes solutions.

• (Th) Soit (E) $x'' + a\,x' + bx = 0$ et $t_0 \in I$. Alors $\mathscr{S}$ est un $\mathbf{K}$ ev de dimension 2, et l'application

$x \in \mathscr{S} \to (x(t_0), x'(t_0)) \in \mathbf{K}^2$ est un isomorphisme.
Rem : lorsqu'il y a un second membre, c'est une bijection affine.

☠ (Ex) Soit J segment $\subset$ I. Alors toute solution non nulle de $x'' + a\,x' + b\,x = 0$ n'a qu'un nombre fini de zéros.
[absurde suite secv]

• (Th) Soit (E) $x'' + a\,x' + b\,x = 0$ et (x_1, x_2) base de $\mathscr{S}$. Soit $W(t) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x'_1 & x'_2 \end{vmatrix}$. Alors $W(t) = W(t_0) \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(u)\,du\right)$.

• (Ex) Soit (x_1, x_2) base de $\mathscr{S}$. Alors entre 2 zéros consécutifs de x_1, x_2 s'annule exactement une fois. [Wronskien]

☠ (MVC) Soit (E) $x'' + a\,x' + bx = c$. On suppose connu une base (x_1, x_2) de $\mathscr{S}_{\text{homog}}$.
On cherche alors les solutions sous la forme $c_1\,x_1 + c_2\,x_2$. c_1 et c_2 vérifient les équations :
$\begin{cases} c'_1\,x_1 + c'_2\,x_2 = 0 \\ c'_1\,x'_1 + c'_2\,x'_2 = c \end{cases}$ Pour le voir, on utilise X_1 et X_2 associés à x_1 et x_2 et on pose $X = c_1\,X_1 + c_2\,X_2$.

⌧ Ne pas oublier cette méthode.

Ex : $x'' + x = \tan$. $\mathscr{S}$: $x(t) = \sin(t)(K_1 - \cos(t)) + \cos(t)(K_2 + \ln \circ \tan(t/2 + \pi/4) - \sin(t))$

II Cas où on connaît une solution x_1 de l'équation homogène ne s'annulant pas

• Utiliser le Wronskien : $W = x'_1\,x_2 - x_1\,x'_2$. On peut calculer W par intégration. Si on connaît x_1, on peut calculer x_2 en résolvant cette équation du 1er ordre.

• On cherche des solutions sous la forme $x_2(t) = c(t)\,x_1(t)$. En injectant dans l'équation du 2e ordre, on obtient une équation différentielle du 1er ordre linéaire en $c'(t)$.

Ex : $(x^2 + 1)\,y''(x) - 2\,x\,y'(x) + 2\,y(x) = 0$. $\mathscr{S} = \mathrm{Vect}\{\,\mathrm{Id}, \mathrm{Id}^2 - 1\,\}$

III (Ex) $y'' + p\,y = 0$

Soit $p \in C^0(I, \mathbb{R})$.

• Si $p \le 0$, alors $\forall\, y \in \mathscr{S} \setminus \{0\}$, $\#y^{-1}\{0\} \le 1$. [absurde : zéro consécutif Max ; convexe]

Soient $a < b \in I$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Alors $\exists\,!\, y \in \mathscr{S}$,
$\begin{cases} y(a) = \alpha \\ y(b) = \beta \end{cases}$ (Problème aux limites) [unicité préc ; existence $\mathscr{L}$]

• Si p est intégrable sur $I = \mathbb{R}_+$, les solutions ne sont pas toutes bornées. [absurde Wronskien]

• Si $p \ge 0$ et non intégrable sur $I = \mathbb{R}_+$, toute solution s'annule une infinité de fois. [absurde analyse dimanche]

• On suppose que Id p est intégrable. Soit y solution. Alors $y(t) \underset{+\infty}{=} O(t)$. [TayR∫ puis GW ou GW_{simple}]

En fait, $\forall\, y \in \mathscr{S}$, $y(t) \underset{+\infty}{=} o(t)$ ou $\exists\, \ell \in \mathbb{R}$, $y(t) \underset{+\infty}{\sim} \ell t$.

IV (Ex) Comparaison des solutions de 2 équations différentielles

• Soient p et $q \in C^0(I, \mathbb{R})$ tels que $p \le q$. Soient u et v vérifiant :
$\begin{cases} u'' + p\,u = 0 \\ v'' + q\,v = 0 \end{cases}$
Soient $a < b \in I^2$ tels que $u(a) = u(b) = 0$ et $u > 0$ sur $]a, b[$. Alors $\exists\, c \in [a, b[$, $v(c) = 0$.
[demo Wronskien hybride equadiffeux puis absurde]

• Soit $p \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tel que $p \underset{\infty}{\to} 0$. Soit $y \ne 0$ tel que $y'' + (1 + p)\,y = 0$.
Alors y a une infinité de zéros $t_1 < t_2 < \ldots$, et $\lim t_{n+1} - t_n = \pi$. [préc cmp $u'' + (1 \pm \varepsilon)u = 0$]

96 – E. D. L. scalaires d'ordre 2 à coefficients constants

I y" + ay' + by = 0 avec a et b ∈ ℂ

$\mathcal{S}$ est un sev de dimension 2 de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Soit $P = X^2 + aX + b$. Soit $D : f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \to f' \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Alors $\mathcal{S}$ = Ker P(D).

∗ 1e cas : P est à racines simples λ_1 et λ_2. TDN ⇒ $\mathcal{S} = \text{Vect}\{ e_{\lambda_1}, e_{\lambda_2}]$ avec $e_\lambda : t \to e^{\lambda t}$.

∗ 2e cas : P a une racine double λ. TDN ⇒ $\mathcal{S} = \text{Vect}\{ e_\lambda, \text{Id} \times e_\lambda \}$ grâce au lemme :

Lemme : soit $y \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Alors $(D - \lambda\,\text{Id})(e_\lambda \times y) = e_\lambda\, y'$.

II y" + ay' + by = A(t) $e^{\lambda t}$ avec P ∈ ℂ[X]

Alors il existe une solution de la forme $y(t) = t^s B(t)\, e^{\lambda t}$, avec d°B ≤ d°A et s : ordre de multiplicité de λ dans P.
Ex : $y'' + 4y' + 4y = x^3 e^{2x}$. Lemme ⇒ $y_P(x) = (x^5/20)\, e^{2x}$.
Ex : $y'' + y = \cos x \Rightarrow y_P(x) = -\frac{1}{2} x \sin(x)$.
Ex : $y'' - 2y' + y = e^x \cos(x) \Rightarrow y_P(x) = -e^x \cos(x)$.

III (Ex) Equation d'Euler

• $a\, x^2\, y''(x) + b\, x\, y'(x) + c\, y(x) = f(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$
Astuce : changement de variable t = ln(x).

• (Ex) Les fonctions f de]0, +∞[dans ℝ dérivables tels que $\forall x > 0, f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ sont Vect($\text{Id}^{-j} - j\, \text{Id}^{-j^2}$).

• (Ex) Chercher les fonctions $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ harmoniques tels qu'il existe g, h vérifiant

$$\forall r > 0, \forall \theta \in \mathbb{R}, f(r\, e^{i\theta}) = g(r)\, h(\theta).$$

f est dite harmonique si Δf = 0 (laplacien)

97 – Equations différentielles non linéaires

I Equations différentielles autonomes d'ordre 1

• (Déf) Soit I intervalle ouvert. Soit $f \in C^1(I, \mathbb{R})$. Soit (E) $y' = f(y)$.

On dit que (J, y) est solution si $\begin{cases} J \text{ intervalle} \\ y \in C^1(J, I) \\ \forall t \in J,\ y'(t) = f(y(t)) \end{cases}$

• (Déf) Soient (J_1, y_1) et (J_2, y_2) deux solutions. On dit que (J_2, y_2) prolonge (J_1, y_1) si $J_1 \subset J_2$ et $\forall t \in J_1, y_1(t) = y_2(t)$.
Rem : c'est une relation d'ordre non totale.
(Déf) On dit que (J, y) est une solution maximale si la seule solution qui la prolonge est elle-même.
• Invariance par translation : Soit (J, y) une solution. Soit $a \in \mathbb{R}$. Alors $(J - a, t \to y(a + t))$ est aussi une solution.
❍ (Th de Cauchy-Lipschitz) Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ et $a \in I$. Alors :
- il existe (J, y) solution avec J intervalle ouvert contenant t_0 et $y(t_0) = a$.
- si (J_1, y_1) et (J_2, y_2) solutions coïncident en $t_0 \in J_1 \cap J_2$, alors $\forall t \in J_1 \cap J_2, y_1(t) = y_2(t)$.

• Description des solutions : soit (J, y) solution.
∗ si $\exists\, t_0 \in J, y'(t_0) = 0$, alors y est constante. [d CL]
∗ si $\forall t \in J, y'(t) \neq 0$, alors $\exists\, I \subset J, \exists\, t_0 \in \mathbb{R}, \forall t \in I, y(t) = \left(\int \frac{1}{f}\right)^{-1}(t - t_0)$

• (Ex) $y' = y^2$. Alors $y(t) = \dfrac{1}{t_0 - t}$. [demo avec CL puis sans CL]
• (Ex) $y' = \sqrt{|y|}$. Alors $y = \pm \frac{1}{4}(t - t_0)^2$ avec y ↗... Ici, f n'est pas C^1 et il n'y a pas l'unicité de CL.

II Systèmes différentiels autonomes d'ordre 2

• Soit U ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $F : U \to \mathbb{R}^2$ de classe C^1 (ie ses 2 composantes le sont).
On dit que (I, X) est une solution si I est un intervalle, $X \in C^1(I, U)$ et $\forall t \in I, X'(t) = F(X(t))$.
(ATTENTION, on dit qu'il s'agit d'un système différentiel autonome d'ordre 2)
Rem : invariance par translation.
• Interprétation géométrique : en tout point régulier, F(X(t)) est un vecteur directeur de la tangente en X(t).
Cette courbe relative à F est appelée "courbe intégrale du champ de vecteurs".
• (Th de Cauchy-Lipschitz) Existence locale, et unicité (comme dans le I).
• Prolongement : Soit $(I, \varphi) \in \mathscr{S}$. On suppose $I =]a, b[$ et $\lim\limits_{t \to b^-} \varphi(t) = (x_0, y_0) \in U$.
Alors (I, φ) n'est pas maximale. [demo ; rem : $(]a, b], \varphi')$ n'est pas non plus maximale (CL)]
• (Th de Cauchy-Lipschitz) Soient $t_0 \in \mathbb{R}$ et $(x_0, y_0) \in U$. Alors il existe une unique solution maximale (I, φ) telle que $\varphi(t_0) = (x_0, y_0)$ et de plus, I est ouvert.
• (Ex) $\begin{cases} x' = -y + x(x^2 + y^2) \\ y' = x + y(x^2 + y^2) \end{cases}$ Résolution en coordonnées polaires (on suppose $r \neq 0$)
On a : $r' = r^3$ et $\theta' = 1$ → sorte de spirale.

III E. D. A. d'ordre 2

• (Déf) Soit U ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f \in C^1(U, \mathbb{R})$. Soit (E) $x'' = f(x, x')$. (I, x) est solution si I intervalle, $x \in C^2(I, \mathbb{R})$ et
$\forall t \in I, x''(t) = f(x(t), x'(t))$
• Système autonome associé : les solutions de (E) correspondent aux solutions de (S) :
$$\begin{cases} u' = v \\ v' = f(u, v) \end{cases} \quad (S)$$
(Th de Cauchy-Lipschitz) Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ et $(u_0, v_0) \in U$. Alors il existe une unique solution maximale (I, x) telle que $x(t_0) = u_0$ et $x'(t_0) = v_0$. De plus, I est ouvert.

IV (Ex) y" + siny = 0 : le pendule

• C'est une E. D. A. du 2^e ordre. La fonction est C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
Les solutions maximales sont définies sur $\mathbb{R}$ [demo absurde : y" bornée...]
Si y est solution, y vérifie aussi $\frac{1}{2} y'^2 - \cos y = K$
• Si $K > 1$, $y(+\infty) = +\infty$ et $\forall t \in \mathbb{R}, y(t + T) = y(t) + 2\pi$. Si $y(0) = 0$, y est impaire. [demos CL]
• Si $K = 1$ et $y(0) = 0$, $y(+\infty) = \pi$. (solution que l'on ne trouve pas en physique)

On a alors : $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $y(t) = 4(\text{Arctan} \exp t - \pi/4)$. y est impaire.

V Equations différentielles non autonomes

• $x'(t) = f(t, x(t))$. Soit U ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f \in C^1(U, \mathbb{R})$.

(Th) Soit $(t_0, x_0) \in U$. Alors il existe une unique solution maximale (I, x) telle que $x(t_0) = x_0$. De plus, I est ouvert.
[demo ramène système autonome]

• $y' = \dfrac{1}{1 + x^2 + y^2}$. Alors il existe une unique solution impaire définie sur $\mathbb{R}$. [$CL_{\text{unicité}}$ $\text{absurde}_{\mathbb{R}}$ CL_{impaire}]

• $y' = y^2 + x$ et $y(1) = 0$. Alors y n'est pas définie sur $\mathbb{R}$ ($\text{absurde}_{\text{major}}$), et $y(x) \underset{b^-}{\sim} \dfrac{1}{b - x}$ (T∫RC)

• $y' = y^2 - x$. Soit (I, y) solution maximale. On suppose $x_0 \in I$ et $y'(x_0) < 0$. Alors $[x_0, +\infty[\subset I$, et $y(+\infty) = -\infty$.
[demos absurdes dimanche]

98 – Exemples d'équations différentielles non linéaires

• Equations différentielles à variables séparables : $y'(x) = f(x)\, g(y(x))$.
Ex : $2\, x\, y'(x) + y(x)^2 = 1$. CL permet de diviser par $g(y)$.

• Equations homogènes : $y'(x) = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$. Méthode : poser $t(x) = \dfrac{y(x)}{x}$ et résoudre avec t.
Ex : $x^2\, y'(x) = y(x)\, (x + y(x))$.

• Equations chiantes : $(x + 2y^3)y' = y$. Méthode : trouver une équation différentielle vérifiée localement par y^{-1}.

• Equations exaspérantes : $y'^2 - xy' + y = 0$. Méthode : paramétrer par y' (dériver) ou bidouiller.
Ici, on cherche les solutions affines, et la zone de $\mathbb{R}^2$ que les solutions n'atteignent pas (épigraphe de parabole).
Autre exemple : $y = xy' + y'^3$ (même tabac)

• Equations énervantes : $y'' = 2y^3$ avec $y(0) = y'(0) = 1$. Méthode : multiplier par y'.

Rem : pour montrer qu'une solution...
∗ n'est pas définie partout : effectuer des majorations ou minorations de l'équation différentielle.
∗ est bien définie partout : montrer qu'elle admet une limite en ce point, et qu'on peut donc la prolonger.
(x' borné, x' intégrable, x de limite finie, x' aussi)

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

99 – Calcul différentiel

Soient E et F deux ev de dimensions finies sur $\mathbb{R}$. Soit U un ouvert de E.

I Différentielle

• (Déf) Soient $f \in F^U$, $a \in U$ et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On dit que u est la différentielle de f en a s'il existe $\varepsilon \in F^{U-a}$ telle que

$$\forall h \in U - a,\ f(a + h) = f(a) + u(h) + \|h\|\varepsilon(h)$$

et $\lim_{0} \varepsilon = 0$

Dans ce cas, on note $df_a = u$: "différentielle de f au point a", ou "application linéaire tangente".

Rem : f différentiable en a $\Rightarrow$ f continue en a. (car u $\mathcal{L}_C$)

Rem : $f \in \mathcal{L}(E, F) \Rightarrow \forall a \in E, df_a = f$.

Rem : si $E = \mathbb{R}$, df_a existe $\Leftrightarrow$ f '(a) existe, et dans ce cas, $df_a : t \to t f'(a)$.

• (Déf) Dérivée selon un vecteur : Soient $F \in F^U$, $a \in U$, V voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$ et $\varphi : t \in V \to f(a + th) \in F$.

On appelle dérivée de f au point a dans la direction h $D_hf(a) = \varphi'(0)$.

• (Déf) Soit $(e_1, ..., e_q)$ une base de E. Les dérivées de f au point a dans les directions $e_1, ..., e_q$ sont appelées dérivées partielles. Notations : $D_{e_j}f(a) = D_jf(a) = \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$.

• (Th) df_a existe $\Rightarrow$ f possède une dérivée dans toute direction au point a, et $\forall h \in E, D_hf(a) = df_a(h)$. [d rapide]

Dans ce cas, si $h = \sum_{j=1}^{q} h_j e_j$, $df_a(h) = \sum_{j=1}^{q} h_j \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$.

Rem : réciproque fausse

⌧ Il faut savoir dériver sans hésitation $\int_0^x f(x, t)\, dt$. (X2000). Rem : c'est $f(x, x) + \int_0^x D_1f(x, t)\, dt$.

(pour le voir, écrire la fonction comme F(x, x). Il suffit de sommer les dérivées partielles)

❍ (Th) Soit $f \in F^U$ et $B = (e_1, ..., e_q)$ base de E. Alors ces 3 propositions sont équivalentes :

∗ $\forall h \in E$, $D_hf : a \in U \to D_hf(a) \in F$ existe et est C^0 sur U.

∗ $\forall j \in \{1, ..., q\}$, D_jf existe et est C^0 sur U.

∗ $df : a \in U \to df_a \in \mathcal{L}(E)$ existe et est C^0 sur U. [$a \Rightarrow b \Longrightarrow c \Rightarrow a$]

[pour $b \Rightarrow c$: simplifications $E = \mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R}$, $a = 0$, $D_1f(a) = D_2f(a) = 0$, $f(a) = 0$]

(Déf) Une telle fonction est alors dite C^1 sur U.

Rem : "Les dérivées partielles existent et sont continues" est une propriété indépendante de la base.

(Ex) Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors f est C^1 sur E. [$a \to df_a$ constante]

• (Th) Soit $f \in F^U$ et $(b_1, ..., b_p)$ une base de F. Alors : f est C^1 sur U $\Leftrightarrow \forall j \in \{1, ..., p\}$, $b_j^* \circ f$ est C^1 sur U.

Dans ce cas, $\forall j \in \{1, ..., p\}$, $\forall h \in E$, $D_h(b_j^* \circ f) = b_j^* \circ D_h f$.

• (Ex) Soit $f : x \in \mathbb{R}^n \to \|x\|_\infty \in \mathbb{R}$. Etude de df_x... (1er cas : $\exists j, \forall i \neq j, |a_j| < |a_i|$)

• (Ex) Etude de $\| \ \|_1$ et de $\| \ \|_2$...

• (Ex) On considère $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors $d\exp_0 = Id_E$. [norme d'alg]

• (Th) Soient $f, g \in C^1(U, F)$. Alors f + g est C^1. Si $F = \mathbb{R}$, fg est C^1. [∂emo]

• (Ex) On considère dét : $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. Alors dét est C^1 sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\forall H \in E$, $df_A(H) = \mathrm{Tr}(\tilde{A}H)$. [∂]

• (Ex) Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $f : M \to M^2$ et $g : M \in GL_n(\mathbb{R}) \to M^{-1}$. Alors f et g sont C^1,

$df_A : H \to A H + H A$ et $dg_A : H \to - A^{-1} H A^{-1}$. [dvp ; Σgéom]

II Composition

• (Th) Soit $f \in V^U$ et $g \in G^V$ (U ouvert de E et V ouvert de F). Soit $a \in U$. On suppose que df_a et $dg_{f(a)}$ existent.

Alors $d(g \circ f)_a$ existe, et $d(g \circ f)_a = dg_{f(a)} \circ df_a$. [calculs ε_1, ε_2, ε_3]

• (Th) Si f est C^1 sur U et g C^1 sur V, alors $g \circ f$ est C^1 sur U. [préc et $C^0 \circ C^0$...]

• (Déf) Soit U ouvert de E et V ouvert de F. On dit que $f \in V^U$ est un C^1 difféomorphisme de U sur V si f bijective C^1 de réciproque C^1.

(Ex) Si f est un C^1 difféomorphisme de U sur V, alors dim E = dim F. [demo $g \circ f = Id$]

• (Déf) Soit B base de E, B' base de F. Soit $f \in F^U$. Si df_a existe, on appelle matrice jacobienne de f en a $\mathrm{Mat}(df_a, B, B')$.

$\forall$ i, j, $m_{i,j}(a) = \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$ (les colonnes sont les $D_jf(a)$)

(Déf) Si E = F, on choisit B = B' et on appelle jacobien : $\mathrm{Jac}\, f(a) = \mathrm{dét}(df_a)$.

Cas d'une fonction composée : $\mathrm{Jac}(g \circ f) = ((\mathrm{Jac}\, g) \circ f) \times (\mathrm{Jac}\, f)$.

Cas d'un difféomorphisme : $\mathrm{Jac}\, f^{-1} = \dfrac{1}{(\mathrm{Jac}\, f) \circ f^{-1}}$.

• Comparaison différentielle-dérivée. Soit I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Soit $\varphi \in C^1(I, U)$. Alors $\varphi'(a) = d\varphi_a(1)$.

Soit $f \in C^1(U, F)$. Alors $(f \circ \varphi)'(a) = df_{\varphi(a)}(\varphi'(a))$.

• Application : Soit f C^1 difféomorphisme de U dans V. Soit Γ courbe paramétrée C^1 régulière ("à l'ordre 1") dans U. Alors $f \circ \Gamma$ est une courbe paramétrée C^1 régulière à l'ordre 1 dans V. [demo très rapide]

III Inversion

• Rem : si f est un C^1 difféomorphisme de U sur V, alors $\forall x \in U$, $df_x \in GL(E, F)$.

❍ (Th d'inversion) Soit $f \in E^U$.

$$\left.\begin{array}{r} f\ C^1 \text{ sur } U \text{ ouvert} \\ f \text{ injective} \\ \forall x \in U, \mathrm{Jac}(f)(x) \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f(U) \text{ ouvert de } E \\ f \text{ est un } C^1 \text{ difféomorphisme de } U \text{ sur } f(U). \end{array}\right.$$ [ADMIS]

• (Ex) Coordonnées polaires. Soit f : (r, t) → (r cos t, r sin t). On restreint f à $\mathbb{R}_+^* \setminus]-\pi, \pi[$

Alors $f^{-1} : (x, y) \to \left(\sqrt{x^2 + y^2}, 2\ \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}\right)\right)$.

• (Ex) Soit f : (x, y) → (e^x cosy, e^x sin y). Même tabac.

Réciproque sur $\mathbb{R} \times]-\pi, \pi[$, logarithme principal : $\ln_{\text{principal}}(z) = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}(z)$.

• (Ex) Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ telle que $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $\|f(x) - f(y)\| \geq \|x - y\|$.

Alors f est un C^1 difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$. [injective ; Ker $df_a = \{0\}$; thinv ; Im f = $\mathbb{R}^n$ car $\mathbb{R}^n$ CPA]

IV Fonctions numériques C^1

• (Th) Soit U ouvert de E. Alors $C^1(U, \mathbb{R})$ est une $\mathbb{R}$ algèbre.

• Gradient : on suppose E euclidien. Soit $f \in C^1(U, \mathbb{R})$. Soit $a \in U$.

Soit i l'isomorphisme : $x \in E \to i_x \in E^*$, telle que $i_x : t \in E \to \langle x | t \rangle \in \mathbb{R}$.

On note $\vec{\mathrm{grad}}\, f(a) = i^{-1}(df_a)$. $\forall x \in E$, $df_a(x) = \langle \vec{\mathrm{grad}}\, f(a) | x \rangle$.

Si $(e_1, ..., e_n)$ est une BON, $\forall$ j, $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \langle \vec{\mathrm{grad}}\, f(a) | e_j \rangle$. Donc $\vec{\mathrm{grad}}\, f(a) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)\, e_j$.

• (Th) Inégalité des accroissements finis :

Soit U ouvert de E et $f \in C^1(U, \mathbb{R})$. Soit $[a, b] \subset U$. Alors $|f(b) - f(a)| \leq \mathrm{Sup}\{ |||df_x||| / x \in [a, b] \}\ \|b - a\|$.

[demo ramène à une variable avec un chemin segment]

Rem : Si E est euclidien, M = Sup $\{ \|\vec{\mathrm{grad}}\, f(x)\| / x \in [a, b] \}$

• (Th) Soit U ouvert connexe par arcs. Soit $f \in C^1(U, \mathbb{R})$. Alors : f constante sur U ⇔ df = 0.

[⇐ X = $\{x \in U / f(x) = f(a)\}$ ouvert fermé]

• (Ex) Soit E ev euclidien. Soit $A \in E$. Soit f : $M \in E \to d(A, M) \in \mathbb{R}$. Alors $\vec{\mathrm{grad}}\, f(M) = \dfrac{\vec{AM}}{\|\vec{AM}\|}$.

Application : la normale à une ellipse est bissectrice des droites reliant M aux foyers. [demo param régul]

• (Déf) Soit $f \in C^1(U, \mathbb{R})$. On dit que a est un point critique de f si $df_a = 0$.

(Th) Si $a \in U_{\text{ouvert}}$ est un maximum local ou un minimum local, alors a est un point critique. [demo 1 var]

Rem_1 : réciproque fausse : $x \to x^3$ en dimension 1.

Rem_2 : si U n'est pas ouvert, c'est complètement faux.

• (Ex) Centre d'une ellipse : $x^2 + xy + y^2 - 2x - y = 0$. Alors C = (1, 0).

V Fonctions C^k

• (Déf) Soit f : U → F. Soit k ≥ 2. F est dite C^k si df est C^{k-1}.

Rem : d(df) : $U \to \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, F))$.

❍ (Th de Schwarz) Soit $f \in C^2(U, F)$. Alors $\forall (i, j) \in \{1, ..., q\}$, $D_i(D_jf) = D_j(D_if)$.

[demo F = $\mathbb{R}$, E = $\mathbb{R}^2$, a = 0, EAF 4 fois avec $\Delta(h, k) = f(h, k) - f(0, k) - f(h, 0) + f(0, 0)$]

• (Th) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Alors $C^k(U, \mathbb{R})$ est une $\mathbb{R}$-algèbre. Soit $h \in E$. Alors $D_h \in \mathcal{L}(C^k(U, \mathbb{R}), C^{k-1}(U, \mathbb{R}))$.

❍ (Th Taylor-Young) Soit $f \in C^2(U, \mathbb{R})$ avec U ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $a \in U$. Alors :

$\forall$ h $\in$ U – a, $f(a + h) = f(a) + df_a(h) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2} h_i h_j D_iD_jf(a) + \|h\|^2 \varepsilon(h)$ avec $\lim_0 \varepsilon = 0$.

[demo $\varphi(t) = f(a + th)$ integr.]

En notant le terme quadratique ½ q(x), et B la base canonique de $\mathbb{R}^2$, on a $\text{Mat}(q, B) = \begin{bmatrix} r & s \\ s & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}$.

On appelle la trace de cette matrice le laplacien de f : Δf (indep. de la BON)

• (Th) Soit f $\in C^2(U, \mathbb{R})$. Soit a un point critique.

$$\left.\begin{array}{r} rt - s^2 > 0 \\ r > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{q est définie positive} \\ \text{a est un minimum local} \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{r} rt - s^2 > 0 \\ r < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{q est définie négative} \\ \text{a est un maximum local} \end{array}\right.$$

$$rt - s^2 < 0 \Rightarrow \text{a n'est ni un minimum local, ni un maximum local}$$

[demo choix de la norme associée à q ; 2 vecteurs : min et max simultanés]

VI Coordonnées polaires

• On note (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Soit $u : \theta \to (\cos\theta, \sin\theta)$. Soit $v : \theta \to (-\sin\theta, \cos\theta)$.

$\forall \theta \in \mathbb{R}$, $u'(\theta) = v(\theta)$ et $v'(\theta) = u(\theta)$.

• (Th) Soit f $\in C^1(U, \mathbb{R})$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. On note $F(r, \theta) = f(r\, u(\theta))$.

Alors F est C^1 sur un ouvert V, et $\vec{\text{grad}}\, f(r\, u(\theta)) = D_1F(r, \theta) \,.\, u(\theta) + \frac{1}{r} D_2F(r, \theta) \,.\, v(\theta)$.

Rem : F est f n'ont pas le même gradient.

• (Ex) Soit f $\in C^2(U, \mathbb{R})$ avec U ouvert de $\mathbb{R}^2$. Alors $\Delta f(r\, u(\theta)) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta)\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}(r, \theta)$. [dérive calcul]

Rem : à quelque chose près, Mat(dg) = Mat(q).

100 – (Ex) Equations aux dérivées partielles

• $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$. On cherche les solutions f C^2 sur U ouvert convexe. Alors $\exists$ A, B, $\forall$ x, y, $f(x, y) = A(x) + B(y)$.

• $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ (D'Alembert). Solutions C^2 sur U ouvert convexe. CHV : $u = x + y$ et $v = x - y$.

Alors $\exists$ A, B, $\forall$ x, y, $f(x, y) = A(x + y) + B(x - y)$. [ramène prec]

• $-y\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + x\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$. Solutions C^1 sur couronne de centre O. CHV polaire. Alors $\exists$ A, $f(x, y) = A(x^2 + y^2)$.

• $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + (x - y)f(x, y) = 0$. Solutions C^1. Alors $\exists \lambda$, $f(x, y) = \lambda(x + y)\exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4}\right)$.

• $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial f}{\partial t}$ (Chaleur). Solution sur $\mathbb{R}^2$. Conditions limites : f nulle sur K = $\sqcup$. Soit R = co(K). Alors f nulle sur R.

[demo $g_\varepsilon(x, t) = f(x, y) + \varepsilon x^2$; $\varepsilon = f(A)/2x_2^2$; contradiction au maximum éventuel]

101 – (Ex) Fonctions harmoniques

(Déf) Soit U ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $f \in C^2(U, \mathbb{C})$. f est dite harmonique si $\Delta f = 0$.

Rem : f harmonique $\Leftrightarrow$ Re f et Im f sont harmoniques

• (Unicité) Soit $D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 + y^2 < 1 \}$. Soit $f \in C^0(\bar{D}, \mathbb{R})$ harmonique sur D et nulle sur Fr D.

Alors $f = 0$. [$g_\varepsilon(x, y) = f(x, y) + \varepsilon(x^2 + y^2)$]

• (Prop. de la moyenne) Soit U ouvert. Alors :

$$f \in \mathbb{R}^U \text{ harmonique sur } U \Leftrightarrow \forall\, a \in U, \forall\, r_0 > 0, B(a, r_0) \in U \Rightarrow f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(a + r_0\begin{bmatrix}\cos t\\ \sin t\end{bmatrix}\right) dt.$$

[démo $\Rightarrow$ Stokes $\varphi(r)$ constante Cf. intégrales doubles ; $\Leftarrow$ calcul de $\varphi''(0)$]

• (Noyau de Poisson) On identifie $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$.

Rem : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $(x, y) \to (x + iy)^n$ et $(x, y) \to (x - iy)^n$ sur harmoniques sur $\mathbb{R}^2$.

Soit $f \in C^0(\mathbf{U}, \mathbb{C})$. On cherche un prolongement harmonique et continu de f sur $\bar{D}$.

Soit $g : t \to f(e^{it})$. Si g est un polynôme trigonométrique, on peut proposer un prolongement.
Sinon, on le réalise avec le noyau de Poisson :

$$\tilde{f}(r\, e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\, P_r(\theta - t)\, dt \text{ avec } P_r(u) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k e^{iku} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k e^{-iku} = \frac{1 - r^2}{1 - 2\, r \cos u + r^2}.$$

Propriétés de P_r :

	P_r est C^0 et positive sur $\mathbb{R}$	(CVN ; expression fractionnaire)
	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r = 1$	(définition avec Σ)
	$\forall\, \delta \in]0, \pi]$, $\lim_{r \to 1^-} \int_\delta^\pi P_r = 0$.	(minorations)

Application : on suppose $g \in C_{2\pi}$. Soit (g_n) suite de polynômes trigonométriques qui convergent uniformément vers g sur $\mathbb{R}$. On définit $\tilde{f}_n(r\, e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g_n(t)\, P_r(\theta - t)\, dt$ et $\tilde{f}(r\, e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\, P_r(\theta - t)\, dt$.

Alors : $\tilde{f}$ est C^0 sur $\bar{D}$. $\left(\text{car } \sup_{z \in \bar{D}} \left| \tilde{f}(z) - \tilde{f}_n(z) \right| = \sup_{z \in \mathbf{U}} \left| f(z) - f_n(z) \right| \right)$ (car $\mathbf{U} \subset \bar{D}$ et diff)

Rem : on peut montrer que $\tilde{f}$ est harmonique sur D.

• (Principe du maximum) Soit U ouvert de $\mathbb{R}^2$, soit f harmonique de U dans $\mathbb{R}$. Soit $a \in U$. Alors :

a maximum local $\Rightarrow$ f constante sur un voisinage de a. [demo moyenne et $(\int +) = 0$]

Rem : si de plus, U est connexe par arcs, f est constante.

• (Existence de solutions de l'équation $\Delta f = 0$ sur un rectangle). Simplifications :

∗ On se ramène au cas où f est nulle aux 4 coins.

∗ On se ramène au cas où f est nulle sur 3 des côtés.

∗ On suppose de plus que $t \to f(t, 0)$ est C^0 C^1PM. Prolongement impair Fourier.

$\Rightarrow$ on se ramène à un sinus, ce que l'on peut résoudre.

D'où la proposition : $f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{\operatorname{sh}\left((a - y)\frac{n\pi}{a}\right)}{\operatorname{sh}(n\pi)} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$, si $f(t, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{\pi n t}{a}\right)$.

Alors : f est C^0 sur le rectangle, bords compris. [CVN]

$\Delta f = 0$ sur $]0, a[^2$ [DIY sur $K_\varepsilon = [0, a] \times [\varepsilon, a]$]

INTEGRALES CURVILIGNES, INTEGRALES DOUBLES

102 – Formes différentielles de degré 1

I Intégrale curviligne

• Rappel : Isomorphisme canonique dans $\mathbb{R}^n$: $(i(x))(y) = \langle x|y\rangle$.
Notations : $x_k = dx_k = e_k^*$.
(Déf) Soit U ouvert de $\mathbb{R}^n$. $f \in C^0(U,\mathbb{R}^n)$ est appelé un champ de vecteurs sur U.

On note $\widetilde{f}(x) = i(f(x)) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \,.\, dx_k$

(Déf) Forme différentielle sur U = application C^0 de U dans $(\mathbb{R}^n)^*$. Les deux s'identifient (grâce à i).
• (Déf) Intégrale curviligne : soit U ouvert de E. Soit $\gamma \in C^1([a, b], U)$. Soit $f \in C^0(U, \mathbb{R}^n)$. On note :

$$\int_\gamma f = \int_a^b \langle f(\gamma(t))|\gamma'(t)\rangle \, dt = \int_a^b \widetilde{f}(\gamma(t))(\gamma'(t)) \, dt.$$

• (Déf) Soit $f \in C^0(U, E)$. Soit $g \in \mathbb{R}^U$. On dit que g est une primitive de f si g est C^1 sur U et que

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, g = f, \qquad \text{ou encore : } dg(x) = \widetilde{f}(x).$$

(Th) Soit g primitive de f. Soit $\gamma \in C^1([a, b], U)$. Alors $\int_\gamma f = g(\gamma(b)) - g(\gamma(a))$. [rapide]

Rem : f possède une primitive $\Rightarrow \forall\, \gamma$ chemin fermé, $\int_\gamma f = 0$.

II Théorème de Poincaré

• (Déf) Soit f une forme différentielle sur U. On dit que f est exacte si elle possède une primitive.
(Déf) Soit $f = \sum a_k\, dx_k$ une forme différentielle sur U. On suppose $\forall\, k$, a_k est C^1 sur U.
Dans ce cas, on dit que f est fermée si $\forall\, i, j$, $D_i(a_j) = D_j(a_i)$.
• (Th) Si f est C^1 sur U et exacte, alors f est fermée. [découle de Schwarz]
• (Th de Poincaré) Soit f C^1 fermée sur U ouvert étoilé. Alors f est exacte.

[demo ☆ $g(a + h) = \int_0^1 \langle f(a + th)|h\rangle \, dt$; astuce : dans $D_1g(a+h)$, reconnaître $[t\, f_1(a + th)]$]

III Exemples

• $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ est non étoilé. Soit $f(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}\right)$. On vérifie que f est fermée.
En choisissant $\gamma(t) = (a \cos t, a \sin t)$ pour $t \in [0, 2\pi]$, on a $\int_\Gamma f = 2\pi$. f n'est donc pas exacte.
Sur $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_- \times \{0\})$ étoilé, f est exacte. On peut proposer une primitive : Arg.
☠ Fonctions holomorphes : soit U ouvert de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathbb{C}^U$. f est dite holomorphe sur U si f est C^1 et

$$\forall\, z \in U,\ \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{C}^*}} \frac{f(z + h) - f(z)}{h} \text{ existe dans } \mathbb{C}.$$

ou encore $\forall\, z \in U, \exists\, \ell \in \mathbb{C}, f(z + h) = f(z) + \ell\, h + h\, \varepsilon(h)$

ou encore $\forall\, z \in U, df_z \in \mathbb{R}\, SO(2)$ (similitude directe)

Dans ce cas, $f(z)\, dz = w_1 + i\, w_2$ avec w_1 et w_2 fermés. [calcul]
Ex : $z \to 1/z$ est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$.
• $w = \exp(-z^2)\, dz$. Alors Re w et Im w sont fermés, et en choisissant judicieusement un chemin C^1PM, on a :

$$\int_0^\infty \sin(x^2)\, dx = \int_0^\infty \cos(x^2)\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$$ (sachant le résultat de l'intégrale de Gauss)

103 – (Ex) Indice

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de $\mathbb{C}$.

I Racines dans $\mathbb{C}[X]$

• $\forall a \in \mathbb{C} \setminus \mathscr{C}, \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{\mathscr{C}} \dfrac{dz}{z-a} \in \{0, 1\}$. [centre nul + paramètre pol + 2 cas $|a|$ et R]

• Soit $P \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$. Alors $\dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{\mathscr{C}} \dfrac{P'(z)}{P(z)}\,dz$ est le nombre de racines de P dans le disque ouvert.

• Soit $U = \{ P \in \mathbb{C}_n[X] \ / \ \#Z(P) = n \}$. Alors U est un ouvert de $\mathbb{C}_n[X]$.
[$demo_1$: résultant ; $demo_2$: prec avec pour chaque racine, une app $\in C^0(\mathbb{C}_n[X], \mathbb{N})$]

II Indice

• Soit $\gamma \in C^1([\alpha, \beta], \mathbb{C})$ tel que $g(\alpha) = g(\beta)$; soit $a \in \mathbb{C} \setminus g([\alpha, \beta])$.

On pose $\mathrm{Ind}(a, \gamma) = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{\gamma} \dfrac{dz}{z-a} = \dfrac{1}{2i\pi}\int_{\alpha}^{\beta} \dfrac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-a}\,dt$.

Alors $\mathrm{Ind}(a, g) \in \mathbb{Z}$. [th relèvement à $\gamma - a$; calcul]

• Soit γ fixée. Alors $\exists R > 0, |a| > R \Rightarrow \mathrm{Ind}(a, \gamma) = 0$. [$|\mathrm{Ind}(a, \gamma)| \leq \dots$]

Soit γ fixée. Alors $\mathrm{Ind}(a, \gamma)$ est constant sur chaque partie connexe par arcs de $\mathbb{C} \setminus g([\alpha, \beta])$. [Ind C^0 pour a]

• On cherche à définir l'indice pour les fonctions C^0. Simplifications : $a = 0$, $[\alpha, \beta] = [0, 2\pi]$.
[polynômes trigonométriques ; vérifications $\mathrm{Ind}(P_n)$ stationnaire]

104 – Courbes & surfaces

I Courbes

• Soit $f \in C^k(I, F)$ avec $k \geq 1$. On dit que t_0 est régulier si $f'(t_0) \neq 0$.

Soit $p = \mathrm{Min}\ \{ k \geq 1 \ / \ f^{(k)}(t_0) \neq 0 \}$ s'il existe. Alors $f^{(p)}(t_0)$ est un vecteur directeur de la tangente.

❍ (Th Fonc Implic) Soit $U \subset \mathbb{R}^2$. Soient $F \in \mathbb{R}^U$ et $(x_0, y_0) \in U$ tels que $F(x_0, y_0) = 0$.

$$\left.\begin{array}{r} U \text{ ouvert} \\ F\ C^k \text{ avec } k \geq 1 \\ D_2F(x_0, y_0) \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \exists V, W \subset \mathbb{R} \text{ ouverts}, \exists \varphi \in C^k(V, W), (x_0, y_0) \in V \times W \subset U \text{ et} \\ \forall (x, y) \in V \times W, F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x). \end{array}$$

• Soit U ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soient $F \in C^1(U, \mathbb{R})$ et $M_0 \in U$ tels que $F(M_0) = 0$. Alors :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, F(M_0) \neq 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} F = 0 \text{ définit localement une courbe paramétrée } C^1 \\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, F(M_0) \perp \text{ tangente à cette courbe en } M_0 \end{array}\right.$$

[dérive-moi $F(x, \varphi(x)) = 0$]

(Déf) Un point M est régulier si $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, F(M)$ est non nul.

Ex : équation de la tangente à une ellipse.

• (Ex) Soit $F \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ tel que $F(0, 0) = 0$ et $\forall M \in \mathbb{R}^2, |D_2F(M)| > |D_1F(M)|$. Alors :
$\exists \varphi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \forall x \in \mathbb{R}, F(x, \varphi(x)) = 0$. [2 droites ou solution maximale ou équadif CL si F C^2]

II Plan tangent

• Soit U ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $F \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$. On dit que (u_0, v_0) est régulier si $(D_1F(u_0, v_0), D_2F(u_0, v_0))$ est libre.

Dans ce cas, on appelle plan tangent à la nappe paramétrée en F(M) le plan $(F(M), D_1F(M), D_2F(M))$.

Rem : M régulier $\Leftrightarrow dF_M$ injective (ou encore : de rang 2).

❍ (Th Fonc Implic) Soit $U \subset \mathbb{R}^3$. Soit $F \in \mathbb{R}^U$ et $M_0 \in U$ tels que $F(M_0) = 0$.

$$\left.\begin{array}{r} U \text{ ouvert} \\ F\ C^k \text{ avec } k \geq 1 \\ D_3F(M_0) \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \exists V \subset \mathbb{R}^2, \exists W \subset \mathbb{R} \text{ ouverts}, \exists \varphi \in C^k(V, W), (x_0, y_0, z_0) \in V \times W \subset U, \text{ et} \\ \forall (x, y, z) \in V \times W, F(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow z = \varphi(x, y). \end{array}$$

• Soit U ouvert de $\mathbb{R}^3$. Soit $F \in C^1(U, \mathbb{R})$ et $M_0 \in U$ tels que $F(M_0) = 0$. Alors :
$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, F(M_0) \neq 0 \Rightarrow$ la surface définie par $F = 0$ possède un plan tangent, orthogonal à $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, F(M_0)$

[dérive-moi $F(x, y, \varphi(x, y)) = 0$]
Ex : normale à un point d'une sphère.
• Position par rapport au plan tangent : utilisation de la formule de Taylor
$rt - s^2 > 0$ et $r > 0$ nappe au dessus
$rt - s^2 > 0$ et $r < 0$ nappe au dessous
$rt - s^2 < 0$ nappe ni au dessus, ni au dessous

III Intersection

❍ (Th Fonc Implic) Soit $U \subset \mathbb{R}^3$. Soit $F \in (\mathbb{R}^2)^U$ et $M_0 \in U$ tels que $F(M_0) = (0, 0)$.

$$\left.\begin{array}{r} U \text{ ouvert} \\ F\ C^k \text{ avec } k \geq 1 \\ \begin{vmatrix} D_2F_1 & D_3F_1 \\ D_2F_2 & D_3F_2 \end{vmatrix}(M_0) \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \exists\, V \subset \mathbb{R}, \exists\, W \subset \mathbb{R}^2, \text{ ouverts}, \exists\, \varphi \in C^k(V, W), (x_0, y_0, z_0) \in V \times W \subset U, \text{ et} \\ \forall\, (x, y, z) \in V \times W, F(x, y, z) = (0, 0) \Leftrightarrow (y, z) = \varphi(x). \end{array}$$

• Soient $\mathcal{S}_1$ définie par $F_1(x, y, z) = 0$, $\mathcal{S}_2$ définie par $F_2(x, y, z) = 0$ et $M_0 \in \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$.
$\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ possèdent deux plans tangents $P_1 \neq P_2$ en $M_0 \Rightarrow \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$ possède en M_0 une tangente, $P_1 \cap P_2$.
[préc ; dérive-moi un système de 2 équations]

• (Ex) Courbe tracée sur une surface. Soit $\mathcal{C} : t \to (x(t), y(t), z(t))$ et $\mathcal{S} : F(x, y, z) = 0$, tel que $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$.

Alors la tangente à $\mathcal{C}$ en M_0 est contenue dans le plan tangent à $\mathcal{S}$ en M_0. [dérivation]

IV (Ex) Extrémas liés

☠ Soit U ouvert de $\mathbb{R}^3$. Soient F et $\varphi \in C^1(U, \mathbb{R})$. Soient $\mathcal{S} = \{ X \in U \ / \ F(X) = 0 \}$, et $X_0 \in \mathcal{S}$.

$$\left.\begin{array}{r} \overrightarrow{\text{grad}}\, F(X_0) \neq 0 \\ \exists\, \delta > 0, \forall\, X \in \mathcal{S}, \|X - X_0\| \leq \delta \Rightarrow \varphi(X) \geq \varphi(X_0) \end{array}\right\} \Rightarrow (\overrightarrow{\text{grad}}\, \varphi(X_0), \overrightarrow{\text{grad}}\, F(x_0)) \text{ liée}$$

[description param. de $\mathcal{S}$; différentielle d'une composée]

• (Ex) Soit $a > 0$. Soit $S = \{ X \in \mathbb{R}^n \ / \ x_1 + ... + x_n = a \}$. Soit $K = \{ X \in S \ / \ \forall\, i, x_i \geq 0 \}$. Soit $\varphi(X) = x_1x_2...x_n$.
Alors sur K, φ atteint son maximum pour $x_1 = ... = x_n = a/n$. [demo préc]

• (Ex) Soit $a > 0$. Soit $\Gamma = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y + z = a \text{ et } x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \}$.
Soit $\varphi : (x, y, z) \in \Gamma \to xyz \in \mathbb{R}$. Alors Γ est un cercle, φ atteint ses bornes en $(a, 0, 0)$ et en $(-a/3, 2a/3, 2a/3)$.
[calculs astucieux et préc]

105 – Intégrales doubles

• Soit K compact de $\mathbb{R}^2$. On admet l'existence de $I : f \in C^0(K, \mathbb{R}) \to \iint_K f \in \mathbb{R}$.

I est une forme linéaire positive (c'est-à-dire $f \geq 0 \Rightarrow I(f) \geq 0$).

(Formule de Fubini) : si $K = [a, b] \times [c, d]$, $\iint_K f = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\, dx \right) dy$.

• (Changement de variables) Soient U et V ouverts de $\mathbb{R}^2$. Soit $\varphi \in V^U$ C^1 difféomorphisme. Soit K compact $\subset$ U.

Alors : $\iint_{\varphi(K)} f = \iint_K f \circ \varphi \times |\mathrm{Jac}\ \varphi|$

Rem : en dimension 1, il n'y a pas de valeur absolue car on oriente la droite des réels.

Cas des coordonnées polaires : $\varphi(r, t) = (r \cos t, r \sin t)$. Alors $\mathrm{Jac}\ \varphi = r$.

• $\int_0^\infty \exp(-t^2)\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ [demo en encadrant un cercle par deux carrés de $\mathbb{R}^2$]

• $\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1}\, dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2x-1} (\cos t)^{2y-1}\, dt$. Alors $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \beta(x, y) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$.

[calcul de $\Gamma(x)\,\Gamma(y)$ avec un rectangle et un quart de disque]

• Transformation d'une aire par une application linéaire : soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.

Alors Aire $u(K) = \iint_{u(K)} 1 = \iint_K |\mathrm{Jac}\ u| = |\det u|$ Aire(K).

• $\iiint_K xyz\, dx\, dy\, dz = 1/48$ avec $K = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}_+^3 \ / \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \}$. [coord. sphériques ; $\mathrm{Jac} = r^2 \sin\theta$]

• Cardioide : $r = a(1 + \cos\theta)$. Aire : $3\pi a^2 / 2$. [polaire]

• Soit D compact d'aire 1, symétrique par rapport à la droite $x = y$. Soit $f \in C^0(\mathbb{R},]0, +\infty[)$.

Alors $\iint_D \frac{a\, f(x) + b\, f(y)}{f(x) + f(y)}\, dx\, dy = \frac{a+b}{2}$.

• $D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 + y^2 \leq 1 \text{ et } y \leq x \}$. Calcule-moi $\iint_D (x-y) \exp(x+y)\, dx\, dy$ en coordonnées polaires.

• Formule de Green-Riemann (ou théorème de Stokes)

$\int_{\partial K} f\, dx + g\, dy = \iint_K \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}$. (attention à l'orientation)

ex : · propriété de la moyenne quand f est harmonique

· $\iint_{\bar{D}(0, R)} f\,\Delta f + (D_1 f)^2 + (D_2 f)^2 = \int_{S(0, R)} \left(f \frac{\partial f}{\partial x} \right) dy + \left(f \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx$.

(application : harmonique sur le disque nulle sur le bord est nulle)

⌧ Il faut savoir intervertir les ordre d'intégration de $\int_a^b \left(\int_a^x f(x, y)\, dy \right) dx$. (X2000). Astuce : faire un dessin.