[MP – MATHEMATIQUES 2]

[MP – MATHEMATIQUES 2] **1**

METHODES DE CALCUL DES SERIES NUMERIQUES 2
PERMUTATIONS LIEES AUX SUITES/SERIES DE FONCTIONS 2
PERMUTATIONS D'INTEGRALES DEPENDANT D'UN PARAMETRE 3

TOPOLOGIE ET SUITES **4**

43 – REELS 4
44 – ESPACES VECTORIELS NORMES 4
45 – SUITES D'ELEMENTS D'UN EV NORME 5
46 – SUITES DE REELS 6
47 – TOPOLOGIE DEFINIE PAR UNE DISTANCE 6

APPLICATIONS D'UN EV NORME DANS UN AUTRE **8**

48 – LIMITES 8
49 – FONCTIONS CONTINUES 8
50 – CONTINUITE UNIFORME 9
51 – APPLICATIONS LINEAIRES CONTINUES 9
52 – APPLICATIONS BILINEAIRES 10

TOPOLOGIE ET EV NORMES **11**

53 – COMPACITE 11
54 – ESPACES COMPLETS 12
55 – EV NORMES DE DIMENSION FINIE 13
56 – CONNEXITE 14
57 – (EX) TOPOLOGIE DANS $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ 14

SERIES **16**

58 – SERIES 16
59 – SERIES DE REELS POSITIFS 17
60 – SUITES SOMMABLES 18

SUITES & SERIES DE FONCTIONS **20**

61 – SUITES DE FONCTIONS 20
62 – SERIES DE FONCTIONS 21
63 – APPROXIMATION UNIFORME 22

DERIVATION **23**

64 – DERIVATION 23
65 – (EX) DERIVATION DE FONCTIONS NUMERIQUES 23
66 – FONCTIONS CONVEXES 24

INTEGRATION SUR UN SEGMENT **25**

67 – INTEGRATION SUR UN SEGMENT 25
68 – INTEGRATION DE SUITES DE FONCTIONS CONTINUES 26
69 – PRIMITIVES 26
70 – FORMULES DE TAYLOR 27
71 – CALCUL APPROCHE D'INTEGRALES 28
72 – THEOREME DU RELEVEMENT 29
73 – SUITES ET SERIES DE FONCTIONS C^K 29
74 – INTEGRALES DEPENDANT D'UN PARAMETRE 30

INTEGRATION SUR UN INVERVALLE QUELCONQUE **31**

75 – INTEGRATION DES FONCTIONS POSITIVES 31
76 – INTEGRATION DES FONCTIONS COMPLEXES 32
77 – THEOREMES DE CONVERGENCE MONOTONE ET DOMINEE 34

78 – INTEGRALES DEPENDANT D'UN PARAMETRE 35
79 – (EX) APPLICATIONS DU TCVD 35
80 – (EX) SERIES ET INTEGRALES 36
81 – (EX) RECHERCHE D'EQUIVALENTS, METHODE DE LAPLACE 36
82 – COMPARAISON SERIE - INTEGRALE 37
SOMMES DOUBLES 38
83 – ENSEMBLES DENOMBRABLES 38
84 – SUITES DOUBLES SOMMABLES 38

Méthodes de calcul des séries numériques

- Suites géométriques ou exponentielles : $\sum a^n, \sum \frac{a^n}{n!}$
- Termes se simplifient deux à deux ou 3 à 3 : $\sum \frac{1}{n(n+1)}, \sum \ln\left(1+\frac{1}{n}\right), \sum \frac{1}{n(n+1)(n+2)}, \sum \text{Arctan}\left(\frac{1}{1+n+n^2}\right)$
- Egalité avec une intégrale : $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ avec $\frac{1}{k} = \int_0^1 t^{k-1}\,dt$
- Equivalent pour le reste TΣRC : $\sum \frac{1}{k^2}$
- Equivalent de $u_{n+1} - u_n$ puis TΣRC : $\sum \frac{1}{k^2}, \sum \frac{1}{k}$
- Comparaison avec une intégrale pour le reste : $\sum \frac{1}{k^2}$
- Comparaison avec une intégrale pour une série divergente : $\sum \frac{1}{k}$
- Transformation d'Abel : regrouper les termes différemment. $\sum \frac{\cos k}{k}$
- Regroupement par paquets : $\sum \frac{k - n\,E\left(\frac{k}{n}\right)}{k(k+1)}$
- Lemme : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a^n} = \frac{a}{(a-1)^2}$ [Dérivée d'une série entière]

Permutations liées aux suites/séries de fonctions

En terme de suite	**En terme de série**	**Conditions**	**Théorème**
$\lim_{x\to a} \lim_n f_n(x)$	$\lim_{x\to a} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$	CVU + arrivée Banach	(TIL)
$\int_{[a,b]} \lim_n f_n$	$\int_{[a,b]} \sum_{n=0}^{\infty} f_n$	CVU + C^0	
$\int_a^x \lim_n f_n$	$\int_a^x \sum_{n=0}^{\infty} f_n$	CVU + C^0 + SEG	
$\frac{d^k}{dx^k} \lim_n f_n(x)$	$\frac{d^k}{dx^k} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$	CVS^k, CVU + C^k + SEG	
$\lim_n \int_{]a,b[} f_n$		C^0PMI CVS C^0PM + $\nearrow$	(TCVM)
	$\int_{]a,b[} \sum_{n=0}^{\infty} f_n$	C^0PMI CVS C^0PM + $\mathbb{R}_+$	
	$\int_{]a,b[} \sum_{n=0}^{\infty} f_n$	C^0PMI CVS C^0PM + $\sum_{n=0}^{\infty} \int_{]a,b[} \lvert f_n \rvert$ CV	
$\int_{]a,b[} \lim_n f_n$	$\int_{]a,b[} \sum_{n=0}^{\infty} f_n$	C^0PMI CVS C^0PM + f_n dom	(TCVD)

Permutations d'intégrales dépendant d'un paramètre

$\frac{d^k}{dx^k} \int_{[a,\, b]} f(x, y)\, dy$	$\forall\, j \leq k$, $D_j f$ C^0 sur le produit
$\frac{d^k}{dx^k} \int_{]a,\, b[} f(x, y)\, dy$	$\forall\, j \leq k$, $D_j f$ C^0 sur le produit et dominée
$\int_{[a,\, b]} \int_{[c,\, d]} f(x, y)\, dx\, dy$	C^0 sur le produit (Fubini)

Rem : Dès qu'il y a intégration ou dérivation, l'espace d'arrivée doit être un ev normé de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

TOPOLOGIE ET SUITES

43 – Réels

• Soit E un ensemble ordonné et $A \subset E$. Définition de plus grand élément, de majorant, de borne supérieure.
a est un élément maximal de A si $a \in A$ et $\forall x \in A$, $(a \leq x \Rightarrow a = x)$.
• (Th) Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée possède une borne supérieure.
• Définition de la majoration d'applications d'un ensemble dans $\mathbb{R}$.Soit X un ensemble non vide. Soient f et $g \in \mathbb{R}^X$.
Si f et g sont majorées alors f + g aussi et $\sup(f + g) \leq \sup(f) + \sup(g)$. [d]
• (Ex) Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ croissante. Alors $\exists\, x \in [0, 1], f(x) = x$. [demo absude avec $\text{Sup}\{x \in [0, 1] / f(x) \geq x\}$]
☠ (Ex) Tout sous-groupe de $\mathbb{R}$ est monogène (de la forme $a\mathbb{Z}$) ou dense (ex : $\mathbb{Q}$, **A**, **D**, $\mathbb{Z} + \sqrt{2}\,\mathbb{Z}$...). [demo sup]
• (Th) Toute partie convexe de $\mathbb{R}$ est un intervalle. [~demo avec plein de cas... facile]

44 – Espaces vectoriels normés

• (Déf) Soit E un ensemble. $d \in \mathcal{F}(E^2, \mathbb{R}_+)$ est une distance si $\begin{cases} \forall (x, y) \in E^2, d(x, y) = d(y, x) \\ \forall (x, y, z) \in E^3, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \\ \forall (x, y) \in E^2, d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \end{cases}$

(Déf) Un espace métrique est un ensemble E muni d'une distance d.
• (Déf) Soit E un **K** espace vectoriel (**K** = $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
$N \in \mathcal{F}(E, \mathbb{R}_+)$ est une norme si $\begin{cases} \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, N(\lambda x) = |\lambda| N(x) \\ \forall (x, y) \in E^2, N(x + y) \leq N(x) + N(y) & \text{1}^{\text{e}} \text{ inégalité triangulaire} \\ \forall x \in E,\ N(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \end{cases}$

Rem : Si N ne vérifie que les 2 premiers axiomes, N est appelée seminorme.
(Déf) La distance associée à une norme N est : $(x, y) \in E^2 \to \|x - y\| \in \mathbb{R}_+$.
(Th) 2e inégalité triangulaire : Soit E ev normé. Alors $\forall (x, y) \in E^2$, $|N(x) - N(y)| \leq N(x - y)$. [d]
⌦ Il faut arriver à représenter par un dessin cette 2e inégalité triangulaire. (Centrale1999)
• (Ex) Sur $\mathbf{K}^n$, $\|x\|_1 = \Sigma |x_i|$. $\|x\|_2 = \sqrt{\Sigma\ |x_i|^2}$ $\|x\|_\infty = \max\{|x_k|\}$ sont des normes
Soit X un ensemble non vide. On note $\mathcal{B}(X, \mathbb{C})$ l'ensemble des applications bornées de X dans $\mathbb{C}$.
Soit $f \in \mathcal{B}(X, \mathbb{C})$. $\|f\|_\infty = \sup|f(X)|$ est une norme sur $\mathcal{B}(X, \mathbb{C})$. [d]
• (Déf) Soit E ev normé. Soit $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+$.
On note $B(a, r) = \{ x \in E / \|x\| < r \}$, appelée boule ouverte de rayon r et de centre a.
On note $\bar{B}(a, r) = \{ x \in E / \|x\| \leq r \}$, appelée boule fermée de rayon r et de centre a.
(Ex) Soit E un **K** ev, et N_1 et N_2 deux normes sur E. Soit $B_1 = \{ x \in E / N_1(x) < 1 \}$ et $B_2 = \{ x \in E / N_2(x) < 1 \}$.
Alors on a : $B_1 = B_2 \Leftrightarrow N_1 = N_2$. [demo]
Rem : $\forall x \in E \setminus \{0\}$, le vecteur $\dfrac{x}{\|x\|}$ est appelé vecteur unitaire associé à x.
☠ (Th) Soit E préhilbertien. Soit $x \in E$. Alors $\|x\| = \text{Sup}\ \{ \langle x|y\rangle / y \in E \text{ et } \|y\| = 1 \}$. [demo rapide]
• (Déf) Soit E ev normé et $A \subset E$. On dit que A est bornée si $\{\|x\| / x \in A\}$ est majoré.
(Déf) Soit X un ensemble non vide. $f \in \mathcal{F}(X, E)$ est dite bornée si f(X) bornée.
(Déf) Soit A bornée $\subset$ E ev normé. On note $\text{diam } A = \text{Sup}\ \{ \|x - y\| / (x, y) \in A^2 \}$.
Rem : ce n'est pas forcément un plus grand élément.
• (Déf) Soient E et F deux ev normés. $f : E \to F$ est dite k–lipschitzienne si $\forall (x, y) \in E^2$, $\|f(x) - f(y)\|_F \leq k\|x - y\|_E$.
(Th) Si f est k–lipschitzienne et g est k'–lipschitzienne, alors si $g \circ f$ existe, $g \circ f$ est kk'–lipschitzienne.
☠ (Th) L'application : $x \in E \to \|x\| \in \mathbb{R}_+$ est 1–lipschitzienne. [d]
☠ (Th) Soit E ev normé et $A \subset E$. L'application : $x \in E \to d(x, A) \in \mathbb{R}_+$ est 1–lipschitzienne. [demo]
• Norme produit : Soient $E_1, ..., E_q$ ev normés et $E = \Pi\, E_i$. Soit $x = (x_1, ..., x_q) \in E$. On note $\|x\| = \max\{\|x_i\|_{E_i}\}$.
C'est bien une norme.
L'application linéaire coordonnée : $p_j : (x_1, ..., x_q) \in E \to x_j \in E_j$ est 1–lipschitzienne.
• (Déf) Soit E un **K** ev, et N_{fine} et $N_{\text{grossière}}$ deux normes sur E. On dit que N_{fine} est plus fine que $N_{\text{grossière}}$ si
$\exists\, \alpha > 0, N_{\text{fine}} \geq \alpha\, N_{\text{grossière}}$. [finesse utile pour les calculs approchés]
c'est-à-dire si $\left\{ \dfrac{N_{\text{grossière}}(x)}{N_{\text{fine}}(x)} / x \in E \right\}$ est majoré.

Ex : Dans $\mathbb{R}^n$: les 3 normes "classiques" sont plus fines 2 à 2 (équivalentes).
Ex : Dans $C^0([a, b], \mathbb{R})$, on définit : $\|f\|_1 = \int |f|$ $\|f\|_2 = \sqrt{\int f^2}$ $\|f\|_\infty = \operatorname{Sup} f([a, b])$.
$\|\ \|_1$ n'est pas plus fine que $\|\ \|_\infty$. $\|\ \|_1$ n'est pas plus fine que $\|\ \|_2$. [d]
• (Déf) Soit E ev normé et F sev de E. Soit $N_F : x \in F \to N(x) \in \mathbb{R}_+$: c'est la norme induite.
La distance induite sur F partie quelconque de E est $(x, y) \in F^2 \to \|x - y\| \in \mathbb{R}_+$.
• (Ex) Soit F ev normé et A un ensemble non vide. Soit $E = \mathcal{B}(A, F)$. Alors $\|f\|_\infty = \operatorname{Sup}\|f(A)\|$ est une norme. [~]

45 – Suites d'éléments d'un ev normé

Soit E un ev normé.

I Convergence

• (Déf) Soit $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$. Soit $\ell \in E$. On dit que (u_n) converge vers ℓ si $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \|u_n - \ell\| \leq \varepsilon$.
Ou encore : $(u_n) \to \ell$ si $\forall \varepsilon > 0$, X_ε fini, en notant $X_\varepsilon = \{ n \in \mathbb{N} \ / \ \|u_n - \ell\| > \varepsilon \}$.
Rem : cette définition dépend de la norme.
(Ex) Soit $\sigma \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ injective. (u_n) converge vers $\ell \Rightarrow (u_{\sigma(n)})$ converge vers ℓ. [d]
(Th) Si (u_n) converge vers ℓ et vers ℓ' alors $\ell = \ell'$. [d]
• (Th) Soient (u_n) et $(v_n) \in E^{\mathbb{N}}$; soit $\lambda_n \in \mathbf{K}^{\mathbb{N}}$. Supposons $(u_n) \to \ell$; $(v_n) \to \ell'$; $(\lambda_n) \to \lambda$.
Alors $(u_n + v_n) \to \ell + \ell'$ et $(\lambda_n u_n) \to \lambda\, \ell$. [demo lemme]
Lemme : toute suite convergente est bornée.
• (Th) Soient N et N ' deux normes sur E. Alors :
Toute suite qui converge au sens de N converge au sens de N ' $\Leftrightarrow$ N plus fine que N '. [demo]
Rem : $\dfrac{N'(x)}{N(x)}$ est constant sur toute la droite $\mathbf{K}\,x$.
• (Déf) Soient N et N ' deux normes sur E. On dit que N et N ' sont équivalentes si $\exists \alpha > 0, \exists \beta > 0, \alpha N' \leq N \leq \beta N'$.
Ex : dans $\mathbb{R}^n$, $\|\ \|_\infty$, $\|\ \|_1$, $\|\ \|_2$ sont équivalentes.
• (Ex) Pour $C^0([a, b], \mathbb{R})$, f_n étant une fonction chapeau, on a : $(f_n) \to 0$ pour $\|\ \|_1$ mais ne converge pas pour $\|\ \|_\infty$.
• Soit F ev normé. On note $\ell^\infty(F)$ l'ensemble des suites de $F^{\mathbb{N}}$ borné. $\|\ \|_\infty$ est une norme sur $\ell^\infty(F)$.
(Th) L'ensemble des suites convergentes de $F^{\mathbb{N}}$ est un sev de $\ell^\infty(F)$.
• (Th) Soient $E_1, ..., E_q$ ev normés et $E = \prod E_i$ muni de la norme : $\forall x \in E, \|x\| = \max\{\|x_i\|_{E_i}\}$.
Alors : $\forall (u_n) = (u_{1,n}, ..., u_{q,n}) \in E^{\mathbb{N}}, (u_n) \to (\ell_1, ..., \ell_q) \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}_q, (u_{k,n}) \to \ell_k$. [d pour q = 2]

II Suites extraites

• (Déf) Soit E ev normé. Soit $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$. Soit $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ strictement croissante. $(u_{\varphi(n)})$ est une suite extraite de (u_n).
Rem : $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) \geq n$.
(Déf) Les valeurs d'adhérence d'une suite sont les limites des suites extraites qui convergent.
• (Th) Si $(u_n) \to \ell$, alors toute suite extraite converge vers ℓ. [demo]
• (Th) Toute suite ayant 2 valeurs d'adhérence (au moins) diverge (c'est-à-dire ne converge pas).
(Th) Soit $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$. ℓ est valeur d'adhérence de $(u_n) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geq n_0, \|u_n - \ell\| \leq \varepsilon$.[demo]
Ex : $u_n = \sin(\ln n)$ admet $[-1, 1]$ comme valeurs d'adhérence.

III Comparaison des suites

Soient (u_n) et $(v_n) \in E^{\mathbb{N}}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, et $(\alpha_n) \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$.
On dit que $u_n = O(\alpha_n)$ si $\exists M > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |u_n| \leq M|\alpha_n|$ On dit que $u_n = o(\alpha_n)$ si $\forall M > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |u_n| \leq M|\alpha_n|$ On dit que $u_n \sim v_n$ si $u_n - v_n = o(\|v_n\|)$.

Propriétés :
$u_n = o(\alpha_n)$ et $v_n = o(\alpha_n)$ $\Rightarrow u_n + \lambda\, v_n = o(\alpha_n)$
$u_n = O(\alpha_n)$ et $v_n = O(\alpha_n)$ $\Rightarrow u_n + \lambda\, v_n = O(\alpha_n)$
$u_n = o(\alpha_n)$ et $\alpha_n = O(\beta_n)$ $\Rightarrow u_n = o(\beta_n)$
$u_n = O(\alpha_n)$ et $\alpha_n = o(\beta_n)$ $\Rightarrow u_n = o(\beta_n)$

Lemme : $u_n \sim v_n \Rightarrow u_n = O(\|v_n\|)$ et $v_n = O(\|u_n\|)$. [demo $\varepsilon = ½$]
(Th) $\sim$ est une relation d'équivalence.
Rem : dans le cas où $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n) \in (\mathbb{C}^*)^{\mathbb{N}}$, alors

$u_n = o(v_n) \iff \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right) \to 0$ $u_n = O(v_n) \iff \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ bornée $u_n \sim v_n \iff \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right) \to 1$

Rem : Soit $\ell \neq 0$. Alors $u_n \to \ell \Leftrightarrow u_n \sim \ell$. $u_n \to 0 \Leftrightarrow u_n = o(1)$.

46 – Suites de réels

I Propriétés

• (Th) Toute suite croissante et majorée converge. [demo $\mathrm{Sup}\{u_n \,/\, n \in \mathbb{N}\}$]

• (Th) Théorème de Bolzano–Weierstrass : toute suite bornée de réels possède une valeur d'adhérence.
[3 demos : $v_n = \mathrm{Sup}\{u_k \,/\, k \geq n\}$; dichotomie ; $X_a = \{ n \in \mathbb{N} \,/\, u_n \leq a \}$]

☠ (Ex) Toute suite bornée qui n'a qu'une seule valeur d'adhérence converge.
[faux si elle n'est pas bornée ; demo avec $X = \{ n \in \mathbb{N} \,/\, |u_n - \ell| \geq \varepsilon \}$]

II Rationnels

• Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$: tout réel est limite d'une suite de rationnels.

• $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$; $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. [d]

• (Ex) Soient $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + ... + \frac{1}{n!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n(n!)}$. Etude.

On pose $e = \lim (u_n) = \lim (v_n)$. Alors $e \notin \mathbb{Q}$ [demo absurde]

• (Ex) Soient (p_n) et $(q_n) \in \mathbb{N}^{*\mathbb{N}}$. Alors : $\lim \frac{p_n}{q_n} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \Rightarrow (q_n) \to +\infty$.
[demo $A_r = \{ (p, q) \in \mathbb{N}^{*2} \,/\, q \in \mathbb{N}_r$ et $|p/q - \alpha| \leq 1 \}$ et $d_r = \mathrm{Min}\{ |p/q - \alpha| \,/\, (p, q) \in A_r \}$]

Application : Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ telle que $f_{|\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = 0$ et $\forall (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, $f(p, q) = 1/q$.
f est continue en $a \Leftrightarrow a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. [demo $\Rightarrow \Rightarrow$]

III Exercices

• $u_{n+1} = 1 - u_n^2$ et $u_0 \in \mathbb{R}$. 56 cas...

• $u_{n+1} = \sin(u_n)$. Alors $u_n \to 0$. Recherche d'équivalent en posant $v_n = u_n^{-\beta}$; on cherche β tel que $\lim v_{n+1} - v_n \in \mathbb{R}_+^*$.
Ici, $u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$.

• Soit $P_n = X^n + X - 1$, avec $n \geq 2$. Soit u_n l'unique racine positive de P_n. Alors $u_n \to 1$. Soit $v_n = 1 - u_n$. (Césaro)
On a, après calculs : $u_n = 1 - \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$.

• Soit $a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Soit $u_n = \prod_{k=0}^{n} \cos\left(\frac{a}{2^k}\right)$. Alors $(u_n) \to \frac{\sin(2a)}{2a}$. [utilisation de $\sin(2x)$]

• (u_n) et (v_n) sont adjacentes si $(u_n) \nearrow$, $(v_n) \searrow$ et $\lim v_n - u_n = 0$. Alors $\lim u_n = \lim v_n$.

Ex : $u_0 > 0$, $v_0 > 0$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n)$ et $v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$.

☠ Si $\lim u_{n+1} - u_n = 0$, alors les valeurs d'adhérence de (u_n) constituent un intervalle. [demo ε]

47 – Topologie définie par une distance

Soit E evn et A non vide $\subset$ E. On oublie E.

I Ouverts

• Soit $a \in A$. Soit $V \subset A$. On dit que V est un voisinage de a si $\exists\, \varepsilon > 0$, $B(a, \varepsilon) \subset V$.

• Soit $U \subset A$. On dit que U est un ouvert si U est un voisinage de chacun de ses points.

3 propriétés fondamentales :
- $\varnothing$ et A sont des ouverts de A
- Toute union d'ouverts est un ouvert.
- Toute intersection finie d'ouverts est un ouvert.

• (Th) Toute boule ouverte est un ouvert. [d]

(Th) Les ouverts sont les unions de boules ouvertes. [d]

• (Déf) Soit $B \subset A$ et $b \in B$. On dit que b est un point intérieur de B si B est un voisinage de b.

(Déf) On appelle intérieur de B, noté $\overset{\circ}{B}$ ou Int(B) l'ensemble des points intérieurs.

(Th) Int(B) est le plus grand ouvert contenu dans B. [d]

Lemme 1 : $X \subset Y \Rightarrow \mathrm{Int}(X) \subset \mathrm{Int}(Y)$

Lemme 2 : U ouvert $\Rightarrow \mathrm{Int}(U) = U$

• (Th) Les ouverts de A sont les intersections avec A des ouverts de E. [d]

(Th) Si A est un ouvert de E, ses ouverts sont les ouverts de E contenus dans A.

• (Th) Soient E et F deux evn, U ouvert de E et F ouvert de F. Alors $U \times V$ est un ouvert de $E \times F$.
[demo : $B_{E\times F}((a, b), \varepsilon) = B_E(a, \varepsilon) \times B_F(b, \varepsilon)$]
(Th) Soient E et F deux evn. Soit $p_1 : (x, y) \in E \times F \to x \in E$. Soit U ouvert de $E \times F$. Alors $p_1(U)$ est un ouvert de E.
[demo union de boules]
☠ (Ex) Soit E evn. Soit F sev de F. $F \neq E \Rightarrow \mathrm{Int}(f) = \emptyset$. [demo contraposée sympa]

II Fermés

• Soit $F \subset A$. On dit que F est un fermé si $\complement_A F$ est un ouvert.
3 propriétés fondamentales : $\emptyset$ et A sont des fermés de A.
Toute union finie de fermés est un fermé.
Toute intersection de fermés est un fermé.
⌦ Un ensemble non ouvert n'est pas pour autant un fermé. (Centrale1999)
• (Déf) Soit $B \subset A$. On dit que x est un point adhérent à B si $\forall \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \cap B \neq \emptyset$.
L'ensemble des points adhérents est noté $\overline{B}$ ou Adh(B).
Ex : Soit $B = \{1/n \ / \ n \in \mathbb{N}^*\}$. Alors $\mathrm{Adh}(B) = B \cup \{0\}$.
Ex : Soit $B \subset \mathbb{R}$ non vide et majoré. Soit s = Sup B. Alors $s \in \mathrm{Adh}(B)$.
• (Déf) Soit $B \subset A$. On dit que B est dense dans A si Adh(B) = A.
• (Th) Soit $B \subset A$. Alors $\mathrm{Int}(\complement_A B) = \complement_A \mathrm{Adh}(B)$. [d rapide]
(Th) Soit $B \subset A$. Adh(B) est le plus petit fermé de A contenant B, et B fermé $\Leftrightarrow$ Adh(B) = B. [d]
• (Ex) Soient A et $B \subset \mathbb{R}$. $\mathrm{Adh}(A \cup B) = \mathrm{Adh}(A) \cup \mathrm{Adh}(B)$, et $\mathrm{Adh}(A \cap B) \subset \mathrm{Adh}(A) \cap \mathrm{Adh}(B)$. [d]
• (Th) Les fermés de A sont les traces sur A des fermés de E.
Si A est un fermé de E, les fermés de A sont les fermés de E contenus dans A.
• (Th) Le produit de 2 fermés est un fermé.
Rem : le complémentaire d'un produit n'est pas le produit des complémentaires.
(Ex) Soient E_1 et E_2 deux evn. Soit F fermé de $E_1 \times E_2$. Soit $p_1 : (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2 \to x_1 \in E_1$. Alors $p_1(F)$ n'est pas forcément un fermé de E_1. [contrexemple avec une hyperbole]
• (Déf) Soit $B \subset A$. La frontière de B, notée Fr B ou ∂B, est $\mathrm{Adh}(B) \cap \mathrm{Adh}(\complement_A B) = \mathrm{Adh}(B) \setminus \mathrm{Int}(B)$.
On a : Fr B est un fermé. B et $\complement_A B$ ont la même frontière.
☠ (Ex) Soit $B \subset A$. Soit $a \in A$. Alors $a \in \mathrm{Adh}(B) \Leftrightarrow d(a, B) = 0$. [d]

III Suites et topologie

• (Th) Soit $B \subset A$, et $a \in A$. Alors $a \in \mathrm{Adh}(B) \Leftrightarrow \exists (b_n) \in B^{\mathbb{N}}, \lim (b_n) = a$. [demo]
• (Th) B fermé de A $\Leftrightarrow \forall (b_n) \in B^{\mathbb{N}}$ convergente, $\lim (b_n) \in B$.
☠ (Ex) $\mathbb{Q}$ dense dans $\mathbb{R}$.
• Soit $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$. Les valeurs d'adhérence de (u_n) sont $\bigcap_{n_0 \in \mathbb{N}} \overline{\{u_n \ / \ n \geq n_0\}}$.
Corollaire : l'ensemble des valeurs d'adhérences est un fermé.
• (Ex) Soit B non vide borné $\subset$ E evn. Alors Adh(B) borné, et diam Adh(B) = diam B. [demo suites]
• (Ex) Soit $A \subset E$ non vide. Soit $a \in E$. Alors $d(a, A) = d(a, \mathrm{Adh}(A))$. [demo suites]
☠ (Ex) $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. [d]
• (Ex) Ensemble triadique de Cantor. $\forall n \in \mathbb{N}$, on définit $K_0 = [0, 1]$, $K_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$, etc. Soit $K = \cap K_n$.
K est fermé, non vide, qui n'a pas de point isolé, d'intérieur vide, non dénombrable. [demos]
De manière générale, toute partie de $\mathbb{R}$ non vide, fermée, sans points isolés n'est pas dénombrable. [DEMO absurde]
⌦ Les compacts de $\mathbb{R}$ ne sont pas que des intervalles (Centrale1999). Par exemple, K_{Cantor}, ou $\{0, 1\}$.
⌦ Tout ouvert de $\mathbb{R}$ est union dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints. [exo 5 feuille 29 sup]
• (Ex) Soit E evn. Soit C convexe. Alors Int(C) et Adh(C) sont convexes. [demo simple]

APPLICATIONS D'UN EV NORME DANS UN AUTRE

48 – Limites

I Voisinage

On définit 3 types de voisinages :

- Soit $a \in A$ espace métrique. On dit que $V \in \mathcal{V}(a)$ si $\exists\, \varepsilon > 0, B(a, \varepsilon) \subset V$.
- On dit que V est un voisinage de $+\infty$ dans $\mathbb{R}$ si $\exists\, M \in \mathbb{R},]M, +\infty[\subset V$. De même avec $-\infty$.
- Soit E ev normé. On dit que V est un voisinage de l'infini si $\exists\, M > 0, \forall x \in E, \|x\| > M \Rightarrow x \in V$
  ou encore : $\exists\, M > 0, \complement_E B(O, M) \subset V$.

• Propriétés communes : $\varnothing$ n'est pas un voisinage
$V \subset W$ et $V \in \mathcal{V}(a) \Rightarrow W \in \mathcal{V}(a)$
$V \in \mathcal{V}(a)$ et $W \in \mathcal{V}(a) \Rightarrow V \cap W \in \mathcal{V}(a)$

• Soit A espace métrique. Soit $B \subset A$. Soit $b \in B$. Les voisinages de b dans B sont les traces sur B des voisinages de b dans A.

II Limites

• (Déf) Soient E et F deux ev normés. Soit $A \subset E$. Soit $f \in \mathcal{F}(A, F)$. Soit $a \in \mathrm{Adh}(A)$. Soit $\ell \in F$.
On dit que $\ell = \lim_a f$ si $\forall V \in \mathcal{V}(\ell), \exists U \in \mathcal{V}(a), f(U \cap A) = V$.
Remarque : si on avait autorisé a en dehors de Adh(A), toute valeur de ℓ est limite. Ici, il y a bien unicité.
• (Déf) Dans le cas où $a \in A$, si la limite ℓ existe, alors $\ell = f(a)$, et on dit que f est continue au point a.
• Cas d'une fonction à valeurs dans un produit. Soit $f : x \in A \to (f_1(x), f_2(x)) \in F_1 \times F_2$. Soit $\ell = (\ell_1, \ell_2) \in F_1 \times F_2$.
Alors : $\lim_a f = \ell \Longleftrightarrow \lim_a f_1 = \ell_1$ et $\lim_a f_2 = \ell_2$

III Caractéristation séquentielle

• (Th) Soit $f : A \to F$. Soit $a \in \mathrm{Adh}(A)$. Soit $\ell \in F$. Alors :
$\ell = \lim_a f \Leftrightarrow \forall (u_n) \in A^{\mathbb{N}}, \lim u_n = a \Rightarrow \lim f(u_n) = \ell$. [demo $\Rightarrow \Rightarrow$]
❍ (Th) Si $a \in A$: f continue en a $\Leftrightarrow \forall (u_n) \in A^{\mathbb{N}}, \lim u_n = a \Rightarrow \lim f(u_n) = f(a)$.
• (Th) Soit $a \in \mathrm{Adh}(A)$. Alors : $\lim_a f = \ell$ et $\lim_a g = \ell' \Rightarrow \lim_a f + \lambda g = \ell + \lambda\ell'$ [demo suites]
• (Th) Composition des limites : Soient E, F, G ev normés. Soit $A \subset E$. Soit $B \subset F$. Soient $f \in \mathcal{F}(A, B)$ et $g \in \mathcal{F}(B, G)$.
Soient $a \in \mathrm{Adh}(A)$ et $b \in \mathrm{Adh}(B)$. Alors : $\lim_a f = b$ et $\lim_b g = \ell \Rightarrow \lim_a g \circ f = \ell$. [d suite]

IV Relations de comparaison en un point

Soit $a \in \mathrm{Adh}(A)$. Soient f et $g \in \mathcal{F}(A, E)$. Soit $\varphi : A \to \mathbb{R}_+$.
On dit que $f \underset{a}{=} O(\varphi)$ si $\exists M > 0, \exists V \in \mathcal{V}(a), \forall x \in V \cap A, \|f(x)\| \leq M\, \varphi(x)$.
On dit que $f \underset{a}{=} o(\varphi)$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists V \in \mathcal{V}(a), \forall x \in V \cap A, \|f(x)\| \leq \varepsilon\, \varphi(x)$.
On dit que $f \underset{a}{\sim} g$ si $f - g \underset{a}{=} o(\|g\|)$.
Rem : si $A = \mathbb{N}$, et $a = +\infty$, on retrouve le cas des suites.

49 – Fonctions continues

I Généralités

(Déf) Soient E et F ev normés, et $A \subset E$. Soit $f : A \to F$.
f continue en a si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A, \|x - a\| \leq \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| \leq \varepsilon$.
Rem : Soit $B \subset A$, et $g = f|_B$. Soit $b \in B$. f continue en b $\Rightarrow$ g aussi.
(Th) Soient $f \in \mathcal{F}(A, B)$ et $g \in \mathcal{F}(B, F)$. Soit $a \in A$. Alors : f continue en a et g continue en b $\Rightarrow g \circ f$ continue en a.
(Th) Fonctions à valeurs dans un produit. [diy l'énoncé]

II Caractérisation par les ouverts

❍ (Th) Soit A espace métrique. Soit F ev normé. Soit $f \in \mathcal{F}(A, F)$. Alors :

f continue sur A ⇔ la préimage de tout ouvert de F est un ouvert de A. [demo boules]

(Th) f continue sur A ⇔ la préimage de tout fermé de F est un fermé de A.

• (Ex) Soit $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \to xy \in \mathbb{R}$. f continue. $f^{-1}\{1\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.
Toute quadrique est un fermé. Une boule fermée est un fermé.
Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $GL_n(\mathbb{R}) = \text{dét}^{-1}(\mathbb{R}^*)$ est un ouvert non borné.
$SL_n(\mathbb{R}) = \text{dét}^{-1}\{1\}$ est un fermé non borné.
$O(n)$ est un fermé borné.

• (Th) Soit B partie dense de A. Soient f et $g \in C^0(A, F)$. On suppose que $\forall x \in B, f(x) = g(x)$. Alors $f = g$.
[2 demos : suites ; $(f - g)^{-1}\{0\}$]

III Endomorphismes de groupes de (ℝ, +)

☠ (Th) Soit f endomorphisme de groupe de ℝ continu. Alors $\exists a \in \mathbb{R}, f = a\,\text{Id}$. [2 demos : ℕ ℤ ℚ ℝ ou ∫bien]

• (Ex) Soit f endomorphisme de groupe de ℝ monotone. Alors $\exists a \in \mathbb{R}, f = a\,\text{Id}$. [demo que C^0 en 0 puis en a]

• (Ex) Soit f endomorphisme d'anneau de ℝ. Alors f = Id. [demo que ↗ avec $\sqrt{\ }^2$]

50 – Continuité uniforme

I Propriétés

• (Déf) Soit A espace métrique, et F ev normé. Soit $f \in \mathcal{F}(A, F)$.
f est uniformément continue si $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall (x,y) \in A^2, \|x - y\| \le \alpha \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| \le \varepsilon$.
f est continue sur A si $\forall \varepsilon > 0, \forall x \in A, \exists \alpha > 0, \forall y \in A, \|x - y\| \le \alpha \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| \le \varepsilon$.
(Th) f lipschitzienne ⇒ f uniformément continue ⇒ f continue.

❍ (Th) Soit $f \in \mathcal{F}(A, F)$. Alors :
f est uniformément continue sur A ⇔ $\forall (u_n) \in A^{\mathbb{N}}, \forall (v_n) \in A^{\mathbb{N}}, \lim u_n - v_n = 0 \Rightarrow \lim f(u_n) - f(v_n) = 0$. [d]

• (Th) La somme de 2 fonctions uniformément continues est uniformément continue.
La composée de 2 fonctions uniformément continues est uniformément continue.
Mais pas le produit.

II Exemples

• Exemples $x \to x^2$ n'est pas uniformément continue.
$x \to e^x$ non plus.
$x \to \sqrt{x}$ est uniformément continue, mais pas lipschitzienne. [d 2 morceaux]
$x \to (\sin x)^2$ est uniformément continue et lipschitzienne.
$x \to \sin x^2$ n'est pas uniformément continue.

• (Ex) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniformément continue. Alors $\exists (A, B) \in \mathbb{R}_+^{*2}, \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \le A|x| + B$. [demo E]

51 – Applications linéaires continues

I Propriétés

❍ (Th) Soient E et F deux ev normés. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

- u continue en 0.
- u continue.
- u uniformément continue
- u lipschizienne
- $\exists k > 0, \forall x \in E, \|u(x)\| \le k\|x\|$
- u est bornée sur $\bar{B} = \{ x \in E \ / \ \|x\| \le 1 \}$ [demo e ⇒ d, f ⇒ e, a ⇒ f]

• Norme d'opérateur. Soient E et F ev normés. Soit $u \in \mathcal{L}_C(E, F)$ c'est-à-dire u continue et linéaire.

On note $|||u||| = \text{Sup}\left\{\dfrac{\|u(x)\|}{\|x\|} \ \Big/ \ x \in E \setminus \{0\}\right\}$, appelée norme subordonnée aux normes $\| \ \|_E$ et $\| \ \|_F$.

(Th) $|||u||| = \text{Sup}\{\|u(x)\| \ / \ x \in \bar{B}\} = \text{Sup}\{\|u(x)\| \ / \ x \in S\} = \min\{ k \in \mathbb{R} \ / \ \forall x \in E, \|u(x) \le k\|x\| \}$
où $\bar{B} = \{ x \in E \ / \ \|x\| \le 1 \}$ et $S = \{ x \in E \ / \ \|x\| = 1 \}$. [~d]

• (Th) Soient E et F deux **K** evns. Alors $\mathcal{L}_C(E, F)$ est un **K** ev, et la forme subordonnée est une norme sur $\mathcal{L}_C(E, F)$.
(Th) Si E = F, Alors $|||\,\mathrm{Id}\,||| = 1$, et $\forall\,(u, v) \in \mathcal{L}_C(E, F)^2$, $|||u \circ v||| \leq |||u|||\ |||v|||$. [d]

• (Déf) $(A, +, \times, \cdot, \|\ \|)$ est une **K** algèbre normée si : $\begin{cases} (A, +, \times, \cdot) \text{ est une } \mathbf{K} \text{ algèbre} \\ \|\ \| \text{ est une norme sur } A \\ \forall\,(x, y) \in A^2,\ \|x\,y\| \leq \|x\|\ \|y\| \end{cases}$

De plus, elle est dite unitaire si elle possède un neutre pour la multiplication (attention, à vérifier)
Ex : $(\mathcal{L}_C(E), \circ, |||\ |||)$ si E est un **K** ev normé, $(\mathbb{C}, \times, |\ |)$, $(\mathcal{B}(X, \mathbb{C}), \times, \|\ \|_\infty)$ si X est un ensemble non vide.
$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de la norme euclidienne canonique aussi (n°10 feuille 10).

II Exemples

• $E = (C^0([a, b], \mathbb{R}), \|\ \|_\infty)$. Soit $f \in E$. Soit $T : u \in E \to f \times u \in E$. Alors $T \in \mathcal{L}_C(E)$, de norme triple $\|f\|_\infty$.
$E = (C^0([a, b], \mathbb{R}), \|\ \|_1)$. Soit $f \in E$. Soit $T : u \in E \to \int_a^b f\,u \in \mathbb{R}$. Alors $T \in \mathcal{L}_C(E, \mathbb{R})$ de norme triple $\|f\|_\infty$.
$E = (C^0([a, b], \mathbb{R}), \|\ \|_\infty)$. Soit $f \in E$. Soit $T : u \in E \to \int_a^b f\,u \in \mathbb{R}$. Alors $T \in \mathcal{L}_C(E, \mathbb{R})$ de norme triple $\|f\|_1$.
$E = (C^0([0, 1], \mathbb{R}), \|\ \|_\infty)$. Soit $u : f \in E \to (x \to \int_0^x f) \in E$. Alors $u \in \mathcal{L}_C(E)$ de norme triple 1.
$E = (C^0([0, 1], \mathbb{R}), \|\ \|_1)$. Soit $u : f \in E \to (x \to \int_0^x f) \in E$. Alors $u \in \mathcal{L}_C(E)$ de norme triple 1.
$E = (\mathbb{R}^n, \|\ \|_\infty)$. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La norme triple de A est $\max\|L_i\|_1$.
$E = (\mathbb{R}^n, \|\ \|_1)$. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La norme triple de A est $\max\|C_j\|_1$.
$E = (C^\infty([0, 1], \mathbb{R}), \|\ \|_\infty)$. Soit $D : f \in E \to f' \in E$. Alors $D \notin \mathcal{L}_C(E)$.
☠ Soit F sev de E ev normé. Alors Adh(F) est un sev de E. Tout hyperplan de E est soit fermé, soit dense dans E.
Ex : $E = (C^\infty([0, 1], \mathbb{R}), \|\ \|_\infty)$. $H = \{ u \in E \,/\, u(0) = 0 \}$ est un fermé. $H_1 = \{ u \in E \,/\, u'(0) = 0 \}$ est dense dans E.
☠ Soit E ev normé. Soit $\varphi \in E^* \setminus \{0\}$. Alors : Ker φ fermé $\Leftrightarrow$ φ continue. [demo $\Leftarrow \Leftarrow$]

III Normes équivalentes

N ' est plus fine que N $\Leftrightarrow$ Id : (E, N ') $\to$ (E, N) est continue $\Leftrightarrow$ Tout ouvert de (E, N) est un ouvert de (E, N ').
N et N ' sont équivalentes $\Leftrightarrow$ N et N ' définissent les mêmes ouverts.
Ex : dans $C^0([0, 1], \mathbb{R})$, $\|\ \|_\infty$, $\|\ \|_1$ et $\|\ \|_2$ ne sont pas équivalentes.

IV Exercices dans $\mathbb{R}[X]$

Soit $u : P \in \mathbb{R}[X] \to P(t_0) \in \mathbb{R}$.
$\|P\|_1 = \int_0^1 |P|$. $\|P\|_\infty = \mathrm{Sup}|P[0, 1]|$ $N_\infty(P) = \max |p_k|$ $N_1(P) = \Sigma|p_k|$
u est continue pour $\|\ \|_\infty \Leftrightarrow t_0 \in [0, 1]$. u est continue pour $N_\infty \Leftrightarrow t_0 \in\ ]-1, 1[$.

52 – Applications bilinéaires

• (Déf) Soient E, F, G trois **K** ev normés. Soit $B \in \mathcal{F}(E \times F, G)$. B est dite bilinéaire si
$\forall\, x \in E$, l'application $y \to B(x, y)$ est linéaire
et $\forall\, y \in F$, l'application $x \to B(x, y)$ est linéaire.
❍ (Th) Si B bilinéaire et $\exists\, k > 0$, $\forall\,(x, y) \in E \times F$, $\|B(x, y)\| \leq k\|x\|\,\|y\|$, alors B est continue sur $E \times F$. [demo]
• (Ex) $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \to xy \in \mathbb{R}$ est bilinéaire. Corollaire : f et $g \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ continus $\Rightarrow$ fg continu. [~d]
Ex : Si E **K** ev normé, $(\lambda, x) \in \mathbf{K} \times E \to \lambda\, x \in E$.
Ex : Si E préhilbertien réel, $(x, y) \in E^2 \to \langle x|y \rangle \in \mathbb{R}$.
Ex : Si A algèbre normée, $(x, y) \in A^2 \to xy \in A$.

TOPOLOGIE ET EV NORMES

53 – Compacité

I Généralités

• (Déf) Soit A espace métrique. On dit que A est compact si toute suite $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$ possède une suite extraite convergente (dans A).
Ex : $]0, 1[$ n'est pas un compact, $\mathbb{R}$ non plus.
• (Th) Soit E ev normé et $A \subset E$. Alors A compact $\Rightarrow$ A fermé de E et A borné. [demo absurde × 2]
• (Th) Soit A compact. Soit B fermé de A. Alors B compact. [d]
• (Th) Soient X et Y deux compacts. Alors $X \times Y$ est compact. [demo $\varphi \circ \psi$]
• (Ex) Dans $C^0([0, 1], \mathbb{R})$ muni de $\| \|_\infty$, $\bar{B}(0,1)$ est fermé et borné, et pourtant ça n'est pas un compact. [^^^^]

II Cas de $\mathbb{R}^n$

• (Th) Les compacts de $\mathbb{R}$ sont les fermés bornés. [demo avec BW]
• (Th) Théorème de Bolzano-Weierstrass : toute suite bornée de $(\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ possède une suite extraite convergente.
(Th) Dans $\mathbb{R}^n$, les compacts sont les fermés bornés. [demo 2 avec pavé Π compacts puis 1]
• (Ex) Dans $\mathbb{R}^n$, toute suite bornée possédant une seule valeur d'adhérence converge. [demo pareil]

III Image d'un compact

❍ (Th) Soit A compact. Soit $f : A \to F$ continue. Alors f(A) est un compact. [vite !]
La réciproque est fausse [Arctan]
• (Th) Toute application continue sur un compact est bornée, et la borne supérieure de sa norme est atteinte. [d]
• (Th) Soit K compact. Soit $f : K \to \mathbb{R}$ continue. Alors f est bornée et atteint ses bornes.
☠ (Ex) Soit K compact non vide. Alors $\exists (x, y) \in K^2, \|x - y\| = \text{diam } K$. [d f]
☠ (Ex) Soit K compact de E. Soit $a \in E$. Alors $\exists x \in K, \|a - x\| = d(a, K)$. [d f]
☠ (Ex) Soit K fermé de $\mathbb{R}^n$. Soit $a \in \mathbb{R}^n$. Alors $\exists x \in K, \|a - x\| = d(x, K)$. [demo suites ou $K \cap \bar{B}(a, d(a, K) + 1)$]
☠ (Ex) Toute bijection continue sur un compact est un homéomorphisme. [d f(fermé)]
(Déf) f est un homéomorphisme si f est une bijection continue, avec f^{-1} continue.
Exemple de fonction bijective continue avec f^{-1} continue : $t \in [0, 2\pi[\to e^{it} \in \mathbf{U}$.

IV Théorème de Heine

❍ (Th) Soient K compact, F ev normé et $f : K \to F$ continue. Alors f est uniformément continue sur K.
[demo absurde suite]
• (Ex) $x \to \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$. [deux bouts]
☠ (Ex) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\lim\limits_{+\infty} f = \ell \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{-\infty} f = \ell' \in \mathbb{R}$. Alors f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
[demo trois bouts]
• (Ex) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. Soit $\varepsilon > 0$. Alors $\exists k > 0, \forall (x, y) \in [a, b]^2, |f(x) - f(y)| \le \varepsilon + k(x - y)^2$. [d]
• (Th) Soit F ev normé. Soient $E = (\mathcal{B}(I, F), \| \|_\infty)$, $\mathcal{C} = C^0(I, F)$ et $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions en escalier de I dans F.
Alors $\mathcal{C}$ et $\mathcal{E}$ sont des sous espaces vectoriels de E, et $\mathcal{E}$ est dense dans $\mathcal{C}$ (c'est-à-dire $\mathcal{C} \subset \text{Adh}(\mathcal{E})$). [d simple]

V Compacité et ouverts

• (Th?Ex) Caractérisation des compacts : Soit A espace métrique. A compact $\Leftrightarrow$ Toute famille d'ouverts qui recouvre A contient une sous-famille finie qui recouvre A.
Cas d'une partie : $K \subset E$ est un compact $\Leftrightarrow$ toute famille d'ouverts de E qui recouvre K contient une sous-famille finie qui recouvre K.
K compact $\Leftrightarrow$ Toute famille de fermés de K d'intersection vide contient une sous-famille finie d'intersection vide.
Ex : $]0, 1]$, $\mathbb{R}$ ne sont pas des compacts. Rem : $\bigcap\limits_{i \in \varnothing} F_i = K$
☠ (Th) Soit E ev normé. Soit $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ suite convergente de limite ℓ. Alors $\{ u_n / n \in \mathbb{N} \} \cup \{ \ell \}$ est compact. [2 cas]
• (Ex) Soit (K_n) une suite décroissante de compacts non vides. Alors $\cap K_n$ est un compact non vide. [2 d]

VI Lim sup

Soit E ev normé, et $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$. Si $E = \mathbb{R}$ et (u_n) bornée, alors l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) est un compact non vide. Il possède donc un plus grand élément, noté lim sup u_n.
Ex : $u_1 > 0$ et $\forall\, n \geq 1$, $u_{n+1} = 1/n + \sqrt{u_n}$. Alors (u_n) est majorée [2 d], et converge vers 1. [belle demo]

54 – Espaces complets

I Suites de Cauchy

• (Déf) Soit E ev normé. Soit $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$. On dit que (u_n) est une suite de Cauchy si
$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \forall\, p \geq n_0, \forall\, q \geq n_0, \|u_p - u_q\| \leq \varepsilon$.
Toute suite convergente est une suite de Cauchy. [d]
• Toute suite de Cauchy est bornée. [d]
Toute suite de Cauchy possède zéro ou une valeur d'adhérence, et si elle un possède une, elle converge.
[demo ℓ et ℓ' puis cvg ... ε]
• (Déf) On dit qu'un espace métrique (A, d) est complet si toute suite de Cauchy de $A^{\mathbb{N}}$ converge (dans A).
(Déf) On appelle espace de Banach tout ev normé complet.
(Déf) Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien complet.
(Th) $\mathbb{R}$ est complet. [BW]
• [+ ∫] Soit (a_n) une suite de Cauchy et f uniformément continue. Alors $(f(a_n))$ est une suite de Cauchy.

II Etude des espaces complets

• (Th) Soit $A \subset E$. Alors : A complet $\Rightarrow$ A fermé dans E. [d]
• (Th) Soit $A \subset E$. Alors E complet et A fermé dans E $\Rightarrow$ A complet. [d]
• (Th) A compact $\Rightarrow$ A complet. [d]
• (Th) Le produit de deux espaces métriques complets est complet. [d] Ex : $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$.
• (Déf) Soit $f : A \to F$. Soit $a \in \text{Adh}(A)$. Supposons que $\lim_a f$ existe. Alors f vérifie le <u>critère de Cauchy</u> :
$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \alpha > 0, \forall\, (x, y) \in (A \cap B(a, \alpha))^2, \|f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon$.
(Th) Si F est complet et que f vérifie le critère de Cauchy en a alors $\lim_a f$ existe. [demo $u_0v_0u_1v_1u_2v_2$]

III Théorème du point fixe (MP∗)

❍ (Th) Soit A complet. Soit $f : A \to A$ contractante (k-lipschitzienne avec $k < 1$). Alors : $\begin{cases} \exists\,!\, c \in A, f(c) = c. \\ \forall\, a \in A, (f^n(a)) \to c. \end{cases}$
[demo unicité + suite avec demo série ACV + demo qu'on peut : $\forall\, n \in \mathbb{N}, \|u_{n+1} - u_n\| \leq k^n \|u_1 - u_0\|$]
(Ex) Soit A complet. Soit $f : A \to A$ telle que $\exists\, p \geq 2$, f^p contractante. Alors on a les mêmes conclusions.
• (Ex) $u_0 \in \mathbb{R}$, et $\forall\, n \geq 0$, $u_{n+1} = \cos(u_n)$. $\cos_{\text{induit dans } [-1,1]}$ est contractante (sin1–lipschitzienne).
• (Ex) Suites dans $\mathbb{R}$: $u_{n+1} = a + b \cos u_n + c \sin v_n$. $v_{n+1} = d + e \cos u_n + f \sin v_n$.
Soit $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \to (a + b \cos x + c \sin y, d + e \cos x + f \sin y) \in \mathbb{R}^2$ muni de $\| \;\|_\infty$.
Une condition nécessaire pour que f soit lipschitzienne est que $|b| + |c| < 1$ et $|e| + |f| < 1$.
• Etude d'équations différentielles. On remplace l'équation différentielle par une équation intégrale. f solution de cette équation $\Leftrightarrow$ f point fixe d'un opérateur de fonction u. En choisissant un intervalle, on peut rendre l'opérateur contractant donc assurer une unicité de f.
Etude de : $y' = y$ et $y(0) = 1$.
Méthode des approximations successives : $u^n(0) \to f$.

IV Exemples d'espaces complets (☠)

• (Th) $\mathcal{B}$(ensemble, complet) est complet pour $\| \;\|_\infty$. [$\forall\, x_0$, converge. Passage limite]
• (Th MP∗) $\mathcal{L}_C$(evn, complet) est complet pour la norme d'opérateur. [Idem]
Ex : Soit E ev normé. On note $E' = \mathcal{L}_C(E, \mathbf{K}) \subset E^*$. Alors E ' est complet. [car $\mathbf{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$]
• (Ex) $C^0([-1, 1], \mathbb{R})$ est non complet pour $\| \;\|_1$. [f_n qui converge vers sg]
• (Th) C^0(compact, complet) est complet pour $\| \;\|_\infty$. [fermé dans un complet]

V Théorème de Baire (Ex)

• Soit E complet. Soit (F_n) suite décroissante de fermés non vides de diamètre convergeant vers zéro. Alors $\cap F_n$ est un singleton. [demo construction sdc]

☠☠ Théorème de Baire : Soit E complet. Alors :

- L'intersection de toute suite d'ouverts denses dans E est dense dans E.
- L'union de toute suite de fermés d'intérieur vide est d'interieur vide. [demo contruction et préc]

• Applications : ☠ $\mathbb{R}$ non dénombrable. [absurde $\text{Baire}_{\text{Ouverts}}$]
☠ $\mathbb{R}[X]$ n'est complet avec aucune norme. [$\mathbb{R}_n[X]$ contrexemple de $\text{Baire}_{\text{Fermés}}$]
- $\mathbb{Q}$ n'est pas intersection d'une suite d'ouverts. [$\text{Baire}_{\text{Ouvert}}$ et dénombrabilité de $\mathbb{Q}$]
- Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(x) = 0$. Alors f fonction polynomiale. [dur]
- Théorème de Banach. Soient E et F deux espaces de Banach.
  Soit $u \in \mathcal{L}_C(E, F)$ bijective. Alors $u^{-1} \in \mathcal{L}_C(F, E)$. [contrexemple : $P \in X\mathbb{R}[X] \to P' \in \mathbb{R}[X]$]

VI Espaces de Hilbert (Ex)

• Rappel : Soit E ev normé. Soit $A \subset E$ non vide. Soit $a \in E$. $d(a, A) = \inf\{\|x - a\| \ / \ x \in A\}$.

- Si E préhilbertien et A sev de dimension finie, alors l'inf est atteint en un point unique. (Th)
- Si A est compact, l'inf est atteint. (Ex)
- Si $E = \mathbb{R}^n$ et A est fermé, l'inf est atteint. (Ex)

☠ Soit H un $\mathbb{R}$ espace de Hilbert. Soit C convexe fermé non vide de H. Soit $a \in A$.
Alors $\exists ! \ x \in C, \|a - x\| = d(a, C)$. [unicité : paragram ; existence x_n sdc]

55 – Ev normés de dimension finie

I Topologie d'un ev normé de dimension finie

❍ (Th) Soit E un **K** ev de dimension finie. Alors toutes les normes sont équivalentes. [demo sur $\mathbb{R}^n$ et $\| \ \|_\infty$]

Soit E ev de dimension finie. On dit que U est un ouvert s'il est ouvert pour n'importe quelle norme
(de même pour définir les fermés, les bornés, les compacts...)

• (Th) Soit E ev normé de dimension finie et F ev normé (pas forcément de dimension finie). Alors $\mathcal{L}_C(E, F) = \mathcal{L}(E, F)$.
[demo base]

(Th) Soient E et F ev normés de dimension finie. Soit G ev normé. Toute application bilinéaire de $E \times F$ dans G est continue. [demo base]

• (Th) Soit E ev normé de dimension finie. Soit $(e_1, ..., e_p)$ une base. Soit $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$. Alors
$\lim (u_n) = \ell \Leftrightarrow \forall j \in \mathbb{N}_p, \lim e_j^*(u_n) = e_j^*(\ell)$

(Th) Soit E ev normé de dimension finie. Soit $(e_1, ..., e_p)$ une base. Soit $f : X \to E$. Alors :
f continue au point $a \in X \Leftrightarrow \forall j \in \mathbb{N}_p, e_j^* \circ f$ est continue au point a.

• (Th) Tout ev normé de dimension finie est complet. [demo analogies avec $\mathbb{R}^n$]

Corollaire : tout sev de dimension finie est fermé.

• (Th) Dans un ev normé de dimension finie, les compacts sont les fermés bornés, et toute suite bornée possède une suite extraite convergente.

• (Ex) Dans $\mathbb{R}_n[X]$, soit U l'ensemble des polynômes de degré n possédant n racines distinctes. Alors U est ouvert.
[demo kaf boule ouverte avec norme qui dépend de P]

• Soit E un $\mathbb{R}$ ev de dimension n. Dans $\mathcal{Q}(E)$, l'ensemble des formes quadratiques définies positives est un ouvert.
[3 idées + demo décousue en trouvant une boule ouverte avec norme : $\|q\| = \text{Sup } q(S)$ et $\varepsilon = \text{Inf } q_0(S)$]

II Cas d'un ev euclidien

Rem : tout ev peut être rendu euclidien par le choix d'une base.

• (Th) Soit E ev euclidien. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors $|||u||| = \text{Sup}\{ <u(x)|y> \ / \ (x, y) \in S^2 \}$ [demo $\leq \geq$]

Rem : $\forall x \in E, \|x\| = \text{Sup}\{ |<x|y>| \ / \ y \in S \}$.

• (Th) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors $|||u||| = |||u^*|||$. [d prec]

• (Th) $|||u^* \circ u||| = |||u|||^2$ [d $\leq$]

• (Th) Si u est autoadjoint positif, $|||u||| = \rho(u) = \text{Max Sp } u$. [d BON vecteur propre]

Corollaire : $\forall u \in \mathcal{L}(E)$, $|||u||| = \sqrt{\rho(u^* \circ u)}$.

• (Ex) Soit $u \in GL(E)$. Alors $d(u, \complement_{\mathcal{L}(E)} GL(E)) = \sqrt{\text{Min Sp}(u^* \circ u)}$. [DEMO $\geq$ puis atteint avec décomposition SO]

III Théorème de Riesz (Ex)

☠ Soit E ev normé. Alors : $\bar{B}(0, 1)$ compacte ⇒ E est de dimension finie. [demo ½ avec lemme]
Lemme : Il existe un nombre fini de boules ouvertes de rayon ½ qui recouvre $\bar{B}$. [demo absurde + hp]

56 – Connexité

I Généralités

• Soit A espace métrique. Soit $\gamma \in C^0([0, 1], A)$ telle que $a = \gamma(0)$ et $b = \gamma(1)$. γ est appelé chemin de a à b dans A.
• On dit que A est connexe par arcs si pour tout $(x, y) \in A^2$, il existe un chemin de x à y dans A.
• Recollement de 2 chemins : si on a un chemin de a à b dans A et un chemin de b à c dans A, alors on peut construire un chemin de a à c dans A.
• (Déf) On dit que A est étoilé par rapport à a si $\forall x \in A$, $[a, x] \subset A$. On dit que A est étoilé si $\exists a \in A$, A étoilé par rapport à a.
(Th) Soit E ev normé. $A \subset E$. A convexe ⇒ A étoilé ⇒ A connexe par arcs. [demo simple]
• (Ex) Soit $(c_i)_{i \in I}$ des connexes par arcs ayant un point en commun. Alors $\cup c_i$ est un connexe par arcs. [d]
❍ (Th) Soit $f : A \to B$ continue. A connexe par arcs ⇒ f(A) connexe par arcs. [d]
• (Th) Soient A et B deux espaces métriques connexes par arcs. Alors $A \times B$ est connexe par arcs. [d]

II Cas de ℝ

• (Th) TVI : Soit I intervalle de ℝ. Soit $f \in C^0(I, \mathbb{R})$. Alors f(I) est un intervalle. [demo sup{}]
• (Th) Soit $A \subset \mathbb{R}$. A intervalle ⇔ A convexe ⇔ A connexe par arcs. [simple]
Contrexemple dans $\mathbb{R}^2$: L
• (Th) TVI généralisé : Soit A connexe par arcs. Soit $f \in C^0(A, \mathbb{R})$. Alors f(A) intervalle. [découle]

III Connexes (MP*)

• (Déf) Soit A espace métrique. On dit que A est non connexe s'il existe $X \subset A$ ouvert et fermé de A autre que ∅ et A.
(Autre déf) A est non connexe s'il existe U, V ouverts tels que :
· $A = U \cup V$
· $U \cap V = \varnothing$
· $U \neq \varnothing$ et $V \neq \varnothing$.
• (Th) Soit A connexe par arcs. Soit f localement constante sur A (c'est-à-dire $\forall x \in A, \exists \varepsilon > 0, f|_{B(x, \varepsilon)} = f(x)$).
Alors f est constante. [demo $g \in \{0, 1\}^A$]
• (Th) A connexe par arcs ⇒ A connexe. [demo χ]

IV Exemples

• Les ellipses sont des connexes par arcs. Les hyperboles non [2 démos].
• $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs. $GL_n(\mathbb{R})$ n'est non connexe par arcs.
• ℂ est connexe par arcs. $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs. [morphing de matrices ! Cas T_n + Sp]
• Soit I intervalle. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue injective. Alors f monotone. [demo g]
• Ces ensembles ne sont pas homéomorphes deux à deux : [0, 1],]0, 1[, [0, 1[, **U**.
• C est homéomorphe à U, M, N, L, J, I, G, S, Z, V, W.

57 – (Ex) Topologie dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

I Généralités

• $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie. Toutes les normes sont équivalentes. Les projecteurs $p_{i,j} : M \to m_{i,j}$ sont continus.
• Tr et Dét sont continues sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. L'application $(X, Y) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \to XY \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est continue.
• $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert dense. O(n) est un compact.
• Soit $N = \{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ / \ \exists k \in \mathbb{N}^*, M^k = 0 \}$: l'ensemble des matrices nilpotentes.
Lemme : $N = \{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ / \ M^n = 0 \}$. [demo avec χ_M et π_M]
N est fermé, non compact, non borné, étoilé par rapport à 0 (c'est un cône) ; il est connexe par arcs, d'intérieur vide.

II Rang

• rg : $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est non continue. (rg($\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) non connexe par arcs)

• Soit $\mathcal{P} = \{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ / \ M^2 = M \}$. rg$|_{\mathcal{P}}$ est continue (égal à la trace). $\mathcal{P}$ non connexe par arcs.

• $\mathcal{P}$ est fermé et non compact.

III Matrices diagonalisables

On se place dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des matrices diagonalisables.

• $\mathcal{D}$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. [demo λ_i+ i/k]

• Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. M diagonalisable $\Leftrightarrow$ sa classe de similitude est fermée dans E. [DEMO $\Rightarrow \Rightarrow$ lemmes]

(Déf) $f : A \to \mathbb{R}$ est semicontinue inférieurement si $\forall x \in A, \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall y \in A, \|x - y\| \leq \alpha \Rightarrow f(x) - \varepsilon \leq f(y)$.

Lemme$_1$: rg est semicontinu inférieurement.

Lemme$_2$: soit $f : A \to \mathbb{R}$. f semicontinue inférieurement $\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, f^{-1}(]-\infty, t])$ est fermé.

Lemme$_3$: X semblable à M $\Leftrightarrow \forall j \leq q, \mathrm{rg}(X - \lambda_j I_n) \leq \mathrm{rg}(M - \lambda_j I_n)$.

IV Décomposition polaire

☠ (Ex) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors il existe $(S, O) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times O(n)$, tel que S soit symétrique positive et M = SO.
[demo compacité de O(n) + lemme]

Lemme : l'ensemble des matrices symétriques positives est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

V Connexité de $SL_n(\mathbb{R})$

$SL_n(\mathbb{R}) = \{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ / \ \text{dét } M = 1 \}$ est connexe par arcs. [demo $T_{i,j}$]

VI Formes quadratiques

Soit E un $\mathbb{R}$ ev de dimension finie.

• Les formes quadratiques positives constituent un fermé de $\mathcal{Q}(E)$.

• Les formes quadratiques définies positives constituent un ouvert de $\mathcal{Q}(E)$.

Les formes quadratiques non dégénérées constituent un ouvert de $\mathcal{Q}(E)$. [d C^0]

• (Déf) On dit que $q \leq q'$ si $q - q'$ est positive. On dit que $A \subset \mathcal{Q}(E)$ est majorée si $\exists q_0 \in \mathcal{Q}(E), \forall q \in A, q \leq q_0$.

Dans $\mathcal{Q}(E)$, toute suite croissante et majorée converge. [demo x_0]

• s et t sont semicontinus inférieurement sur $\mathcal{Q}(E)$. [demo BO, N, ε]

• s et t sont continus sur l'ensemble des formes quadratiques non dégénérées. [s + t = n : localement cste]

VII Polynôme caractéristique

L'application : $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \chi_M \in \mathbb{R}_n[X]$ est continue. [demo : $M \to \chi_M(\lambda)$ est continue... Lagrange]

Résumé :
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un ev de dimension finie (donc convexe, connexe par arcs)
- $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert dense, non connexe par arcs
- $SL_n(\mathbb{R})$ est un fermé connexe par arcs
- O(n) est un compact
- $\mathcal{P}$ est un fermé non compact

SERIES

58 – Séries

I Généralités

• (Déf) Soit E ev normé. Soit $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$. On appelle $s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ la suite des sommes partielles.

On dit que $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge si (s_n) converge.

Rem : Toute suite est une série : $u_0 = s_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = s_{n+1} - s_n$.

• (Ex) $\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$

• (Th) $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge => $\lim_{n} u_n = 0$. Contrexemples de la réciproque : $\Sigma\ 1/n$; $\Sigma \ln(1 + 1/k)$.

• (Th) L'ensemble des séries convergentes est un sev de $E^{\mathbb{N}}$.

• (Th) On suppose E de dimension finie, muni d'une base $B = (e_1, ..., e_n)$.

Alors : $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ converge <=> $\forall j \in \mathbb{N}_n$, $\sum_{k=0}^{\infty} e_j^*(u_k)$ converge

⌦ Attention, la suite des reste tend vers 0 n'implique pas que la série converge. (Centrale2000)

II Cas où E est complet

• Critère de Cauchy (ici on ne suppose pas que E est complet).

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \text{ converge} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall p \geq q \geq n_0, \left\| \sum_{k=p+1}^{q} u_k \right\| \leq \varepsilon.$$

• (Déf) Soit $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$. On dit que $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est absolument convergente si $\sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\|$ converge.

(Th) Si E est un espace de Banach, toute suite absolument convergente est convergente. [d sdc]

• (Ex) Dans $(\mathbb{R}[X], \|\ \|)$ avec $\|P\| = \max|a_k|$, on définit $U_n = \frac{1}{n(n+1)} X^n$. (U_n) est absolument convergente mais ne converge pas.

• (Ex) Si toute série absolument convergente de E est convergente, alors E est complet. [sdc secv 2^{-n} constr]

• (Déf) Soit F ev normé. On note $\ell^1(F) = \left\{ (u_n) \in F^{\mathbb{N}} \Big/ \sum_{n=0}^{\infty} u_n \text{ absolument convergente} \right\}$.

ℓ^1 est un espace vectoriel, et la norme 1 est une norme sur ℓ^1. (Ex) F complet $\Rightarrow \ell^1$ complet. [diy]

III Cas d'une algèbre de Banach

(Déf) Une algèbre de Banach est une algèbre normée complète.

• (Th) Séries géométriques : soit A algèbre de Banach. Soit $a \in A$ tel que $\|a\| < 1$.

Alors $e_{\text{multiplication}} - a$ est inversible, d'inverse $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$. [demo cvg puis inverse]

• Exponentielle : soit A algèbre de Banach. Soit $a \in A$. On pose $e^a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$. C'est une série convergente. [acv]

IV Séries alternées

• (Th) Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ suite décroissante de limite nulle. Alors $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_n$ converge. [demo adj]

On dit que $((-1)^n u_n)$ vérifie le "critère spécial des séries alternées" si (u_n) décroit et tend vers zéro.

• (Déf) Majoration du reste : soit $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ une série convergente. On appelle le reste la suite r_n définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, r_n = \sum_{k=0}^{\infty} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k.$$

(Th) Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite décroissante de limite nulle. Alors $|r_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k u_k \right| \leq u_{n+1}$. [d adj]

• (Ex) $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2 + \frac{(-1)^{n+1}}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. [demo ∫]

Principe des intégrations par parties : il faut dériver une fonction presque constante.

En fait, $\int_0^1 t^n \varphi(t)\, dt \sim \frac{\varphi(1)}{n}$ si φ est continue et $\varphi(1) \neq 0$.

• $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge mais pas $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$ (pourtant les termes générals de ces suites sont équivalents)

59 – Séries de réels positifs

I Etude de la convergence

• (Th) Soit $(u_n) \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$. Soit $s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Alors $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge <=> (s_n) majorée, et dans ce cas, $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} s_n$.

• Séries géométriques. Rappel.

• (Th) Séries de Riemann : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$. [demo 3 cas ∫]

• (Th) Comparaison des séries. Soient (u_n) et (v_n) deux suites. Alors :

$$\left.\begin{array}{r} (u_n) \geq 0 \\ (v_n) \geq 0 \\ \sum_{n=0}^{\infty} v_n \text{ converge} \\ u_n = O(v_n) \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} u_n \text{ converge}$$
[demo s_n majorée]

Rem : si $u_n \sim v_n$, il n'en est pas de même pour leurs séries.

• (Th) Comparaison logarithmique. Soient (u_n) et (v_n) deux suites. Alors :

$$\left.\begin{array}{r} (u_n) > 0 \\ (v_n) > 0 \\ \sum_{n=0}^{\infty} v_n \text{ converge} \\ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n} \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} u_n \text{ converge}$$
[demo rapide !]

⌦ Il faut bien se rappeler des hypothèses. (Centrale1999)

• (Th) Règle de d'Alembert. Soit (u_n) une suite. Alors :

$$\left.\begin{array}{r} (u_n) > 0 \\ \lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \in [0, 1[\end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} u_n \text{ converge}$$
[demo prec]

Ex : $\Sigma\ 1/n!$ $\quad \Sigma\ 2^n/n!$ $\quad \Sigma\ n^2/2^n$

II Développement décimal d'un réel

• Soit $x_0 \in [0, 1[$. On définit les suites (a_n) et (x_n) par :

$a_{n+1} = E(10\, x_n)$

$x_{n+1} = 10\, x_n - E(10\, x_n)$.

$(a_k)_{k \geq 1}$ est appelé le développement décimal de x_0.

• (Ex) Cas d'un rationnel. Le développement (a_k) est périodique à partir d'un certain rang $\Leftrightarrow x_0 \in \mathbb{Q}$. [d]

III Sommation des relations de comparaisons

• (Th_1) Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On note $s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $t_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$. Alors :

$$\left.\begin{array}{r}(v_n) \geq 0 \\ \sum_{n=0}^{\infty} v_n \text{ diverge}\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}u_n = o(v_n) \Rightarrow s_n = o(t_n) \\ u_n \sim v_n \Rightarrow s_n \sim t_n.\end{array}\right.$$ [demo a puis a $\Rightarrow$ b]

• (Th$_2$) Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On note $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$ et $x_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} v_k$. Alors :

$$\left.\begin{array}{r}(v_n) \geq 0 \\ \sum_{n=0}^{\infty} v_n \text{ converge}\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}u_n = o(v_n) \Rightarrow r_n = o(x_n) \\ u_n \sim v_n \Rightarrow r_n \sim x_n.\end{array}\right.$$ [demo a puis a $\Rightarrow$ b]

• (Ex) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = S - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

• (Ex) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

• Lemme de Césaro : Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. $\lim u_n = \ell \Rightarrow \lim \frac{u_1 + \ldots + u_n}{n} = \ell$. [Th$\Sigma$ avec $v_n = 1$]

IV Exercices

• Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ décroissante telle que $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge. Alors $\lim n\, u_n = 0$. [demo avec $s_{2n} - s_n$]

• Soit $(a_n) \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$. Soit $p_n = \prod_{k=0}^{n} (1 + a_k)$. Alors $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge <=> (p_n) converge. [demo ln]

☠ Soit $(u_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$. Soit $s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. On suppose $\lim s_n = \infty$. Soit $v_n = \frac{u_n}{s_n^{\alpha}}$. Alors : $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ converge <=> $\alpha > 1$.

[demo $\alpha = 1$: 2 cas facile et $\int$; $\alpha \leq 1$; $\alpha \geq 1$ $\int$]

Application : à partir d'une série divergente de terme général $u_n > 0$, on peut fabriquer une série divergente de terme général $o(u_n)$.

• Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par : $u_n = \frac{1}{n}$ si l'écriture décimale de n contient 7

$u_n = 0$ sinon.

Alors (u_n) diverge. [demo denombrement]

• $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}$ [astuce de calcul]

• Soit $(u_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ avec $\beta > 0$.

Alors : $\beta > 1 \Rightarrow$ la série de terme général (u_n) converge. [demo $1/n$]

$\beta < 1 \Rightarrow$ la série de terme général (u_n) diverge. [demo $1/n^{\alpha}$]

Ex : $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1 \times 3 \times \ldots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \ldots \times 2n}\right)^{\alpha}$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 2$.

Rem : $n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$.

60 – Suites sommables

I Suites de réels positifs

$\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ désigne l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$.

• (Déf) Soit $(u_n) \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$. On dit que (u_n) est sommable si $\exists M > 0, \forall J \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N}), \sum_{n \in J} u_n \leq M$.

On note $s_J = \sum_{n \in J} u_n$. Lorsque (u_n) est sommable, on note $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n = \sup_{J \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})} s_J$.

• (Th) Soit $(u_n) \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$. Soit (J_n) suite croissante de parties finies de $\mathbb{N}$ d'union $\mathbb{N}$. On suppose que (s_{J_n}) est majorée. Alors (u_n) est sommable, et $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n = \lim s_{J_n}$. [d]

• (Th) Soit $(u_n) \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$. Alors la série de terme général u_n converge $\Leftrightarrow$ la famille (u_n) est sommable, et dans ce cas, $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$. [prec avec $\mathbb{N}_n \cup \{0\}$]

III Suites de complexes

• (Déf) Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On dit que (u_n) est sommable si $(|u_n|)$ est sommable.

Rem : (u_n) sommable $\Leftrightarrow$ la série de terme général u_n est absolument convergente (donc convergente).
Rem : Si dans une série on permute les termes, on n'obtient pas forcément le même résultat. [à vérifier]

• (Th) Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ sommable. Alors il existe $s \in \mathbb{C}$ tel que pour toute suite croissante (J_n) de parties finies de $\mathbb{N}$ d'union $\mathbb{N}$, $\lim s_{J_n} = s$. [demo x_n^+ x_n^- y_n^+ y_n^-]

On peut étendre ce théorème à un espace de Banach quelconque.

• (Déf) $\ell^1 = \{ (u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} / (u_n) \text{ sommable} \}$ $\ell^2 = \{ (u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} / (|u_n|^2) \text{ sommable} \}$

$\|u_n\|_1 = \sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$ $\|u_n\|_2 = \sqrt{\sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n|^2}$ (découle d'un produit scalaire)

ℓ^1 et ℓ^2 sont complets.

SUITES & SERIES DE FONCTIONS

61 – Suites de fonctions

I Convergence simple

• (Déf) Soit X un ensemble et F un ev normé. Soit $f_n : X \to F$. On dit que (f_n) converge simplement vers f si
$\forall x \in X, \lim f_n(x) = f(x)$.
Rem : il y a unicité de f.
Ex : $f_n(x) = x^n$; chapeau pointu ; bosse glissante ; serpent frénétique.

• Passage à la limite simple : soit (f_n) une suite de fonctions de X dans F telle que $f_n \xrightarrow{s} f$.
∗ linéarité : Si X est un ev et que $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
∗ convexité : Si $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est convexe, alors f est convexe.
∗ croissance
∗ Si $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \|f_n\|_\infty \leq M$, alors $\|f\|_\infty \leq M$.
∗ Si $\exists k \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}$, f_n est k lipschitzienne, alors f est k lipschitizenne.
∗ Si $\mathrm{Vect}(f_n)$ est de dimension finie, alors $f \in \mathrm{Vect}(f_n)$. [+]

II Convergence uniforme

• (Déf) Soit $(f_n) \in (F^X)^{\mathbb{N}}$. Soit $f : X \to F$. On note $\alpha_n = \|f_n - f\|_\infty$ s'il existe, et on dit que $f_n \xrightarrow{u} f$ sur X si
α_n existe à partir d'un certain rang, et que $\alpha_n \to 0$.
Rem : $f_n \xrightarrow{u} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{s} f$ [d]
Conséquence : unicité de la fonction f lors d'une convergence uniforme.

• (Th) Soit $(f_n) \in \mathcal{B}(X, F)^{\mathbb{N}}$ telle que $f_n \xrightarrow{u} f$. Alors f est bornée sur X. [d]
Rem : dans $(\mathcal{B}(X, F), \| \|_\infty)$, (f_n) converge vers f $\Leftrightarrow$ (f_n) converge uniformément vers f sur X.
Rem : on définit la convergence uniforme séparement pour pouvoir traiter le cas de fonctions non bornées.

• (Th) Soit A espace métrique. Soit $f_n : A \to F$. On suppose $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en a. Alors :

$$f_n \xrightarrow{u} f \Rightarrow f \text{ est continue en a}$$ [demo 3ε]

Corollaire : Si A est compact et F complet, alors $(C^0(A, F), \| \|_\infty)$ est complet. [fermé d'un complet]

(Th) Soit A espace métrique. Soit $(f_n) \in C^0(A, F)^{\mathbb{N}}$. On suppose que $f_n \xrightarrow{u} f$ sur tout compact de A. Alors f est continue sur A. [demo kaf suite avec th comp]
Rem : Dans $\mathbb{Z}$, toute partie est un ouvert et un fermé.

❍ (Th) Théorème d'inversion des limites. Soit $A \subset E$ ev normé. Soit $(f_n) \in (F^A)^{\mathbb{N}}$. Soit $a \in \mathrm{Adh}(A)$.
On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_a f_n$ existe, notée ℓ_n. Alors :

$$\left.\begin{array}{r} F \text{ complet} \\ f_n \xrightarrow{u} f \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \cdot \lim\limits_a f \text{ existe} \\ \cdot \lim \ell_n \text{ existe} \\ \cdot \lim\limits_a f = \lim \ell_n. \end{array}$$

[demo ℓ_n sdc ; prolong f cvu]

ce qui peut s'écrire : $\lim\limits_a \lim\limits_n f_n = \lim\limits_n \lim\limits_a f_n$.

Rem : Si (f_n) converge uniformément sur un nombre fini d'ensembles, (f_n) converge uniformément sur leur réunion.
Rem : Ce théorème se généralise au cas $a = +\infty$ par exemple.

III Exercices

• $A = \mathbb{R}_+$. $g_n : x \to x\, n^\alpha e^{-nx}$ converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}_+ \Leftrightarrow \alpha < 1$.
• Soit $f \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$. Soit f_n définie par $f_n(x) = x^n f(x)$. Alors $f(1) = 0 \Rightarrow (f_n)$ converge uniformément vers 0. [2b]
• Sur $]0,\pi/2]$, soit f_n définie par $f_n(x) = \dfrac{\sin^2 nx}{n \sin x}$. (f_n) converge uniformément sur tout intervalle de la forme $[\delta, \pi/2]$ mais ne converge pas uniformément sur $]0, \pi/2]$. [d suite]
• Soit (p_n) une suite de fonctions polynomiales convergent uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f. Alors f est une fonction polynomiale. [demo α_n existe]
• Soit $(f_n) \in (F^X)^{\mathbb{N}}$ et $f \in F^X$. Alors : $f_n \xrightarrow{u} f \Leftrightarrow \forall (u_n) \in X^{\mathbb{N}}, \lim f_n(u_n) - f(u_n) = 0$. [demo $\Rightarrow \Rightarrow \Leftarrow$]

☠ Théorème de Dini :

$$\left.\begin{array}{r} K \text{ compact} \\ f \in C^0(K, \mathbb{R}) \\ (f_n) \in C^0(K, \mathbb{R})^{\mathbb{N}} \\ (f_n) \searrow \\ f_n \xrightarrow{s} f \text{ sur } K \end{array}\right\} \Rightarrow f_n \xrightarrow{u} f \text{ sur } K$$

[demo avec fermé + demo avec absurde suites]

• On se place dans $\mathbb{R}^{[a, b]}$. Soit $(P_n) \in \mathbb{R}_p[X]$. On suppose $P_n \xrightarrow{s} f$ sur $[a, b]$. Alors $f \in \mathbb{R}_p[X]$. [Lagrange & unicité lim]
On peut généraliser à tout sev de dimension finie de $\mathbb{R}^{[a, b]}$.

62 – Séries de fonctions

I Etude de la convergence

• (Déf) Soit F ev normé, X un ensemble. Soit $(u_n) \in (F^X)^{\mathbb{N}}$. On note $s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

On dit que $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge simplement si (s_n) converge simplement sur X.

On dit que $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge uniformément si (s_n) converge uniformément sur X.

• (Déf) On note $\|u_n\|_\infty = \text{Sup}\{ \|u_n(x)\| \ / \ x \in X \}$ s'il existe.

On dit que $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge normalement si la série $\sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\|_\infty$ converge.

(Th) Si F est complet et si $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge normalement sur X, alors $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge uniformément sur X [vite !]

• (Ex) Soit A une algèbre de Banach. Alors $\sum_{n=0}^{\infty} \text{Id}^n = (e_{\text{multiplication}} - \text{Id})^{-1}$ est continue sur $B(0, 1)$.
Rem : dans $GL_n(\mathbb{C})$, $M \to M^{-1}$ est continue. On a : $B(I_n, 1) \subset GL_n(\mathbb{C})$.
(Ex) exp est une série convergente normalement sur toute partie bornée. Corollaire : exp est continue sur A.

II Exercices

• Etude de $\zeta : x \in \ ]1, +\infty[\ \to \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$. ζ est continue, décroissante, convexe... $\zeta(x) \underset{1^+}{\sim} \frac{1}{x-1}$. [Comp∫]

• Etude de $f : x \in \ ]0, +\infty[\ \to \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$. f est continue, décroissante. Il y a convergence uniforme sans convergence normale sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$.

• Etude de $g : x \in \ ]0, +\infty[\ \to \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + xn^2}$. g est continue. $g(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\zeta(2)}{x}$ [TIL] et $g(x) \underset{0+}{\sim} -\ln x$ [Comp∫ + T∫RC]

III (Ex) Utilisation de la transformation d'Abel

• Soit E un espace de Banach. Soit $(a_n) \in E^{\mathbb{N}}$. Soit $(b_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ décroissante de limite nulle. On note $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$.

On suppose s_n bornée. Alors $\sum_{n=0}^{\infty} b_n a_n$ converge. [demo avec transformation d'Abel]

Transformation d'Abel : $\sum_{k=0}^{n} b_k a_k = \sum_{k=0}^{n} b_k (s_k - s_{k-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} (b_k - b_{k+1}) s_k + b_n s_n$ avec la convention $s_{-1} = 0$.

• Soit $\varepsilon \in \ ]0, \pi[$. Alors $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$ converge uniformément sur $]\varepsilon, 2\pi - \varepsilon[$. [demo Abel + lemme]

Lemme : $\forall x \in \ ]0, 2\pi[, \ \sum_{k=1}^{n} \sin(kx) = \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right) \sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$

Rem : on montrera que $\forall x \in]0, 2\pi[, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = \frac{\pi - x}{2}$.

☠ (Ex) Théorème d'Abel : Soit E un espace de Banach. On suppose que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge. Alors $\sum_{n=0}^{\infty} x^n a_n$ converge uniformément sur [0, 1]. [demo avec des restes partiels et Abel]

63 – Approximation uniforme

I Généralités

• (Rappel de la définition de fonction en escalier sur un segment)
☠ (Déf) Soit F evn. $\mathcal{E}(\mathbb{R}, F) = \{ f \in F^{\mathbb{R}} \ / \ \exists J \text{ segment}, f|_{\mathbb{R} \setminus J} = 0 \text{ et } f_{|J} \in \mathcal{E}(J, F) \}$
• (Rappel de la définition de continue par morceaux sur un segment)
• (Déf) On dit que f est continue par morceaux sur I intervalle si sa restrication à chaque segment $\subset$ I l'est.
Rem : $E \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est continue par morceaux mais pas en escalier.
$C^0PM([a, b], \mathbb{R})$ et $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ sont des sevs de $\mathcal{B}([a, b], \mathbb{R})$.
• (Th) $C^0PM([a, b], \mathbb{R}) \subset Adh(\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$.
• (Th) $C^0([a, b], \mathbb{R}) = Adh(CAPM([a, b], \mathbb{R}))$ (fonctions continues affines par morceaux : ♒)
[demo $\lambda + (1 - \lambda) = 1$]

II Théorème de Weierstrass

❍ (Th) L'ensemble des fonctions polynomiales de [a, b] dans $\mathbb{C}$ est dense dans $C^0([a, b], \mathbb{C})$ pour $\| \ \|_\infty$.
DEMO :

Pour résoudre ce genre de problème, il faut trouver une suite de fonctions $(\varphi_n) \in (\mathbb{R}^{\mathbb{R}})^{\mathbb{N}}$ tels que

$\forall n \geq 1, \varphi_n \geq 0$
$\forall n \geq 1, \int_{\mathbb{R}} \varphi_n = 1$
$\forall \delta > 0, \lim_n \int_{-\delta}^{\delta} \varphi_n = 1$

On note alors $(\varphi_n * f) : x \in \mathbb{R} \to \int_{\mathbb{R}} \varphi_n(t) f(x - t)\, dt = \int_{\mathbb{R}} \varphi_n(x - t) f(t)\, dt$
On suppose $I = [0, 1]$ et $f(0) = f(1) = 0$. Soit $P_n(x) = c_n (1 - x^2)^n$ vérifiant les 3 propriétés. $\forall n \geq 1, c_n \leq n+1$.
Soit Q_n définie par $\forall x \in [0, 1], Q_n(x) = \int_{x-1}^{x+1} f(t) P_n(x - t)\, dt = (f * P_n)(x)$.
Alors Q_n est une suite de fonctions polynômiales qui convergent uniformément vers f sur [0, 1].
Rem : pour les fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, ça n'est pas vrai.

• (Déf) On note $C_{2\pi}$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ 2π périodiques. Soit $e_k : t \in \mathbb{R} \to e^{ikt} \in \mathbb{C}$.
On appelle ces fonctions les polynômes trigonométriques.
Soit $\mathcal{P} = Vect\{ e_k \ / \ k \in \mathbb{N} \}$. [Rem : $\mathcal{P} \neq C_{2\pi}$ car $\mathcal{P} \subset C^1$ et $C_{2\pi} \not\subset C^1$]
(Th) $\mathcal{P}$ est dense dans $(C_{2\pi}, \| \ \|_\infty)$. [demo avec $P_n = a_n \left(\frac{1 + \cos t}{2}\right)^n$]

• (Ex) Soit $f \in C_{2\pi}$. Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Q}$. Alors $\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(k\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f$. [demo pour e_k puis W]

• (Ex) Soit $f \in C^0([a, b], \mathbb{R})$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \int_a^b f(t)\, t^n\, dt = 0$. Alors $f = 0$. [W et $f^2 = f(f - P_n) + fP_n$]
Ce résultat peut s'écrire, avec plein de guillemets, $\mathbb{R}[X]^{\perp} = \{0\}$.

DERIVATION

64 – Dérivation

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit E un ev de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Dérivée

(Déf) Soit $f \in E^I$. Soit $a \in I$. On note $f'(a) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ si elle existe. On note $f_g'(a) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ si elle existe.

Soit $(e_1, ..., e_q)$ une base de E. Alors $f'(a)$ existe $\Leftrightarrow \forall j \in \{1, ..., q\}$, $(e_j^* \circ f)'(a)$ existe.

Dans ce cas, $f'(a) = \sum\limits_{j=1}^{q} (e_j^* \circ f)'(a)\, e_j$.

(Déf) On dit que f est C^1 sur I si f ' existe et est continue sur I.

• (Th) Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit $f \in E^I$. Si $f'(a)$ existe alors $(u \circ f)'(a)$ existe et $(u \circ f)'(a) = u(f'(a))$. [demo df]

• (Th) Soit $B \in G^{E \times F}$ bilinéaire, soient $e \in E^I$ et $f \in F^I$. Soit $\varphi : x \in I \to B(e(x), f(x)) \in G$.
Si $e'(a)$ et $f'(a)$ existent, alors $\varphi'(a)$ existe et $\varphi'(a) = B(e'(a), f(a)) + B(e(a), f'(a))$. [demo df]
Ex : $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \to xy \in \mathbb{R}$, un produit scalaire, le produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$ orienté...

• (Th) Soit $f \in \mathbb{C}^I$. f est C^1 sur I $\Leftrightarrow \overline{f}$ est C^1 sur I $\Leftrightarrow$ Im f et Re f sont C^1 sur I.

• (Th) Soit $f \in E^I$, continue sur I et dérivable sur Int(I). Alors f constante $\Leftrightarrow f' = 0$. [$\Rightarrow$ EAF composantes]

• Contrexemple au théorème de Rolle si dim E > 1 : $t \in [0, 2\pi] \to (\cos t, \sin t) \in \mathbb{R}^2$.

Remarque : Si φ est une application de $\mathbb{R}^I$ dérivable, φ st $\nearrow$ sur I $\Leftrightarrow \varphi' \geq 0$ et $\{ x \in I \ / \ \varphi'(x) > 0 \}$ est dense dans I.

II Fonctions C^k

• (Déf) Soit $f \in E^I$. On dit que f est C^0 si f est continue sur I.

Pour $k \geq 1$, on dit que f est C^k sur I si f ' existe et f ' est C^{k-1} sur I. Notations : $f^{(k)} = D^k f = \frac{d^k f}{dx^k}$

(Th) $C^k(I, E)$ est un ev. $C^k(I, \mathbb{C})$ est une $\mathbb{C}$ – algèbre.

Formule de Leibniz : Soient f et $g \in C^n(I, \mathbb{C})$. Alors $(fg)^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}$. [réc]

• (Th) Soit $\varphi \in C^k(J, I)$ et $f \in C^k(I, E)$. Alors $f \circ \varphi$ est C^k sur J. [d réc]

• (Déf) Soit $\varphi \in J^I$. Soit $k \geq 1$. On dit que φ est un C^k difféomorphisme de I sur J si $\begin{cases} \varphi \text{ bijective} \\ \varphi \text{ est } C^k \text{ sur I} \\ \varphi^{-1} \text{ est } C^k \text{ sur J} \end{cases}$

Au lieu de parler de C^0 difféomorphisme, on parle d'homéomorphisme.

(Th) Soit $\varphi \in J^I$. Soit $k \geq 1$. φ est un C^k difféomorphisme de I sur J $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \varphi \text{ bijective} \\ \varphi \text{ est } C^k \text{ sur I} \qquad [\text{ demo } \Leftarrow \Rightarrow] \\ \forall x \in I, \varphi'(x) \neq 0 \end{cases}$

• (Déf) Soit $f \in E^I$. Soit $p \geq 0$. On dit que f est C^p par morceaux sur [a, b] s'il existe une subdivision $(a_0 = a, ..., a_n = b)$ tellle que $\forall k \in \{0, ..., n-1\}$, $f|_{]a_k, a_{k+1}[}$ se prolonge en une fonction C^p sur $[a_k, a_{k+1}]$.

(Déf) f est C^kPM sur I intervalle si f est C^kPM sur tout segment $J \subset I$. (on peut avoir une infinité de discontinuités)

Notation : si f est C^kPM sur I et $j \leq k$, $D^j f$ est une fonction définie sur une partie de I.

• (Th) Soit $f \in E^I$ C^0 et C^1PM sur I. Alors f constante $\Leftrightarrow Df = 0$.

65 – (Ex) Dérivation de fonctions numériques

• Soit $f \in \mathbb{R}^I$ dérivable. Alors f ' possède la propriété de la valeur intermédiaire. [demo 2 parties avec min]

• Soient $a_0 < ... < a_n$ des nombres. Soit $I = [a_0, a_n]$ et $g \in C^{n+1}(I, \mathbb{R})$. On suppose que $\forall k \in \{0, ..., n\}$, $g(a_k) = 0$.

Alors $\forall x \in I$, $|g(x)| \leq \prod\limits_{k=0}^{n} |x - a_k| \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}$ avec $M_{n+1} = \sup\limits_{I} |g^{(n+1)}|$. [Rolle avec $\varphi : x \to g(x) - A \prod (x - a_k)$]

Application à l'interpolation de Lagrange : soient $a_0 < ... < a_n$ et $f \in C^{n+1}(I, \mathbb{R})$.

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall k \in \{0, ..., n\}$, $P(a_k) = f(a_k)$.

Alors $\forall x \in I$, $|f(x) - P(x)| \leq \prod_{k=0}^{n} |x - a_k| \dfrac{M_{n+1}}{(n+1)!}$ avec $M_{n+1} = \operatorname{Sup}_I |f^{(n+1)}|$.

• Soit $f : t \to \sum_{k=0}^{n} \lambda_k t^{\alpha_k}$ où λ_k sont non nuls et α_k réels distincts. Alors f a au plus n zéros dans $]0, +\infty[$.
[demo récurrence Rolleuse]

• Construction de fonctions C^∞ : utilisation de $t \to e^{-\frac{1}{t}}$.
• (Rappel) Soit (f_{ij}) une famille de fonctions dérivables de I dans $\mathbb{R}$.
Soit $D : x \in \mathbb{R} \to \text{dét}([f_{ij}(x)]) \in \mathbb{R}$. D est alors dérivable et
$\forall x \in \mathbb{R}$, $D'(x) = \Sigma\, \text{dét}(C_1(x), ..., C_{i-1}(x), C'_i(x), C_{i+1}(x), ..., C_n(x))$.
• Soit $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui a 2 zéros. Alors $f + f'$ s'annule. [exp]
Soit $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui a 3 zéros. Alors $f - 2f' + f''$ s'annule.
Soit $f \in C^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui a n+1 zéros. Soit P polynôme de degré n scindé dans $\mathbb{R}[X]$. Alors $P(D)(f)$ s'annule.
[demo réc sur n avec lemme]
Lemme : Soit f C^1 avec q racines ($q \geq 2$). Alors $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $(D - \lambda) f$ possède $q - 1$ racines.

66 – Fonctions convexes

I Généralités

• (Déf) Soit $f : I \to \mathbb{R}$. f est convexe si $\forall (x, y) \in I^2, \forall \lambda \in [0, 1]$, $f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda) f(x) + \lambda f(y)$.
• (Th) f convexe $\Leftrightarrow \{ (x, y) \in I \times \mathbb{R} \;/\; y \geq f(x) \}$ est convexe $\Leftrightarrow \forall x \in I$, $y \to p(x, y) \nearrow$ sur $I \setminus \{x\}$.
[demo avec les mains + a $\Rightarrow$ c]
• Rappel : une limite simple de fonctions convexes sur I est convexe sur I.

II Cas des fonctions C^1

• (Th) Soit $f \in C^1(I, \mathbb{R})$. f convexe $\Leftrightarrow$ f ' croissante. [demo $\Rightarrow \Leftarrow$ analyse]
• (Th) Soit $f \in C^1(I, \mathbb{R})$ convexe. Alors la courbe est au dessus de toute tangente. [demo analyse + pente $\nearrow$]
• Inégalité de convexité : Soit $f \in \mathbb{R}^I$ convexe. Soit $n \geq 2$. Soient $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}_+^*$. Soient $x_1, ..., x_n \in I$. Alors :

$$f\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k}{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k}\right) \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)}{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k}.$$ [demo réc + demo tangente]

Application : Soient $a_1, ..., a_n > 0$. Alors $\sqrt[n]{a_1...a_n} \leq \dfrac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k$. [convexité de exp]

III Exercices

• $\forall t \in [0, \pi/2]$, $(2/\pi)\, t \leq \sin t \leq t$.
• $\forall t \in \mathbb{R}$, $\ln t \leq 1 + t \leq e^t$
• Soit $f \in \mathbb{R}^I$ convexe. Alors f est continue, dérivable à droite et à gauche sur Int(I). [d $a < a_1 < a_2 < b_1 < b_2 < b$]
Si f est convexe dérivable sur [a, b], alors f est C^1. [f ' PVI et $\nearrow$]
• Inégalité de Jensen : soient I intervalle ouvert, $\varphi \in C^0([a, b], I)$ et $f \in \mathbb{R}^I$ convexe. Alors $f\left(\dfrac{1}{b - a} \int_a^b \varphi\right) \leq \dfrac{1}{b - a} \int_a^b f \circ \varphi$.
[demo valeur moyenne et K tel que $\forall t \in I$, $f(t) \geq f(c) + K(t - c)$]
• Soient $a, b, p, q \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Alors $ab \leq \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$. [demo cvx]
Inégalité de Holder : soient $a_1, ..., a_n$ et $b_1, ..., b_n \in \mathbb{R}_+^*$. Alors $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{\,p}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^{\,q}\right)^{\frac{1}{q}}$. [demo 2 cas]
Rem$_1$: $\|X\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,p}\right)^{\frac{1}{p}}$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$ si $p > 1$. Rem$_2$: $\lim \|X\|_p = \|X\|_\infty$ quand $p \to \infty$.
• Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable telle que $\text{Sp}\, A \subset]0, +\infty[$. Alors $1 + \sqrt[n]{\text{dét}\, A} \leq \sqrt[n]{\text{dét}(I_n + A)}$. [demo cvx]
• Périmètre maximum pour un polygone convexe à n côtés inscrit dans $\mathcal{C}(0, 1)$. [existence, recherche]

INTEGRATION SUR UN SEGMENT

67 – Intégration sur un segment

Soit $I = [a, b]$ et F un ev normé de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Cas des fonctions en escalier

- (Déf) Définition de l'intégrale des fonctions en escalier.
- Si $\varphi \in \mathcal{E}$, $\|\int_I \varphi\| \leq \int_I \|\varphi\|$
- (Th) Linéarité de l'intégrale.
- (Th) Soit $u \in \mathcal{L}(F, G)$. Soit $\varphi \in \mathcal{E}(I, F)$. Alors $\int_I u \circ \varphi = u(\int_I \varphi)$

II Cas des fonctions C⁰PM

- Lemme : Soit F un ev normé complet. Soit E un espace métrique. Soit A une partie dense de E.

Soit $f : A \to F$ uniformément continue. Alors f possède un unique prolongement de $g : E \to F$ uniformément continue.
[DEMO unicité, sdc, prolonge, uc ...]
Définition de l'intégrale par ce lemme.

Si $f : [a, b] \to F$ est C^0PM et $\varphi_n \xrightarrow{u} f$ en escalier, alors $\int_a^b f = \lim_n \int_a^b \varphi_n$.

- (Th) Soit $f : I \to F$ C^0PM. Alors $\|\int_I f\| \leq \int_I \|f\|$. [demo $\mathcal{E}$]
- (Th) Linéarité de l'intégrale.
- (Th) Invariance par translation.
- (Th) Soit $u \in \mathcal{L}(F, G)$. Soit $f \in C^0PM(I, F)$. Alors $\int_I u \circ f = u(\int_I f)$
- (Th) Décomposition d'une intégrale dans une base.
- (Th) Cas des intégrales complexes.
- (Th) Soient f et $g \in C^0PM(I, F)$. On suppose $\{x \in I \ / \ f(x) \neq g(x)\}$ fini. Alors $\int_I f = \int_I g$.

Ceci permet de définir $\int_I f$ si f est définie seulement sur $I \setminus S$ où S est finie, et f prolongeable en fonction C^0PM.

- (Th) Soit K segment contenu dans I. Soit $f \in C^0PM(I, F)$. Alors $\int_K f = \int_I f \chi_K$.

Relation de Chasles.

III Cas où F = ℝ

- (Th) Soit $f \in C^0PM([a, b], \mathbb{R})$. Alors $f \geq 0 \Rightarrow \int_I f \geq 0$.
- (Th) Soit $f \in C^0PM([a, b], \mathbb{R}_+)$. Alors $f = 0 \Leftrightarrow \int_I f = 0$.

IV Inégalité de la moyenne

- (Déf) Définition de la valeur moyenne.
- (Th) Soit $f \in C^0PM([a, b], F)$. Alors $\|\int_I f\| \leq \int_I \|f\| \leq (b - a) \|f\|_\infty$.
- (Ex) Soient f et $g \in C^0PM([a, b], \mathbb{R})$, tels que f soit continue et $g \geq 0$. Alors $\exists\, c \in [a, b], \int_I f g = f(c) \int_I g$. [demo TVI]

V Sommes de Riemann

- (Th) Soit $f \in C^0([a, b], F)$. Alors $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0, \forall$ subdivision s de pas $\leq \delta$, $\|R_s(f) - \int_I f\| \leq \varepsilon$

avec $R_s(f) = \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) f(t_k)$ avec $t_k \in [a_k, a_{k+1}]$. [d vite]

- Si f est k lipschitzienne : soit s subdivision de pas $\leq \delta$. Alors, $\|R_s(f) - \int_I f\| \leq k\, \delta\, (b - a)$.
- (Ex) Calcul de $1 + ... + n$, de $1^2 + ... + n^2$. Soit $p \geq 1$. Alors pour p fixé, $\sum_{k=1}^{n} k^p \sim \frac{n^{p+1}}{p+1}$. [demo $\int$]

$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k^2}{n^2}\right) = \int_0^1 \sin t^2\, dt$. $\lim_n \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n^2}\right) = \frac{1}{2}$.

68 – Intégration de suites de fonctions continues

Soit I = [a, b] et F un espace de Banach.

I Suites

On note $N_1(f) = \int_a^b \|f\|$. Il s'agit d'une norme sur $C^0(I, F)$.

Rem$_1$: $\forall f \in C^0(I, F)$, $\left\|\int_a^b f\right\| \leq \int_a^b \|f\| \leq (b-a)\ \|f\|_\infty$

Rem$_2$: $(C^0(I, F), \|\ \|_\infty)$ est toujours complet mais pas $(C^0(I, F), N_1)$

(Th) Soit $(f_n) \in C^0(I, F)^{\mathbb{N}}$. On suppose que (f_n) converge uniformément vers f sur [a, b]. Alors :

- $f \in C^0(I, F)$
- f_n converge vers f en moyenne (c'est-à-dire pour N_1)
- $\int_a^b f = \lim \int_a^b f_n$.

II Cas des séries

- (Th) Soit $(f_n) \in C^0(I, F)^{\mathbb{N}}$. On suppose que la série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge uniformément sur I. Alors $\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n$.
- (Th) Si, de plus, la série des f_n converge normalement, $N_1\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n\right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} N_1(f_n)$.
- Exemples : $\int_0^\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}\, dx = 0$.

III (Rappel) Comparaison des normes

$\forall f \in C^0([a, b], \mathbb{C})$, $\|f\|_1 \leq \sqrt{b-a}\ \|f\|_2 \leq (b-a)\ \|f\|_\infty$.

Donc : convergence uniforme $\Rightarrow$ convergence en moyenne quadratique $\Rightarrow$ convergence en moyenne.

69 – Primitives

Soit F un ev normé de dimension finie.

I Définition

Soit I un intervalle (quelconque). Soit $f \in F^I$.

Si f est continue sur I, on dit que g est une primitive de f sur I si $\begin{cases} \text{g dérivable sur I} \\ \forall x \in I, g'(x) = f(x) \end{cases}$

Si f est C^0PM sur I, on dit que g est une primitive de f sur I si $\begin{cases} \text{g continue sur I} \\ \forall x \in I, \text{f continue en } x \Rightarrow g'(x) = f(x). \end{cases}$

(Th) Soit $f \in F^I$ C^0PM. Alors deux primitives de f diffèrent d'une constante. [$D(g-h) = 0$]

II Théorème

- (Th) Soit $f \in C^0PM(I, F)$. Soit $a \in I$. Soit $h : x \in I \to \int_a^x f$. Alors h est l'unique primitive de f nulle en a.

  [demo négligeable]
- (Th) Soit $f \in C^0PM(I, F)$. Soit h une primitive de f sur I. Soit $a \in I$. Alors $\forall x \in I, \int_a^x f = h(x) - h(a)$.
- (Th) Soit $f \in F^I$ C^0 et C^1PM. Soit $a \in I$. Alors $\forall x \in I, \int_a^x f\,' = f(x) - f(a)$.

III Intégration par parties

(Th) Soient u, v ∈ F^I C^0 et C^1PM. Alors $\forall (x, y) \in I^2, \int_x^y D(u)\, v = [\, u\, v\,]_x^y - \int_x^y u\, D(v)$. [d]

Rem : L'intégration par parties est analogue à la transformation d'Abel.

Application : $\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\, dt \sim \frac{1}{2n}$.

Généralisation : Soit $f \in C^0([0, 1], F)$. Soit $I_n = \int_0^1 t^n f(t)\, dt$. Alors si $f(1) \neq 0$, $I_n \sim \frac{f(1)}{n}$; sinon, $I_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

[demo pour f(1) = 0]

Ex : Soit $f \in C^0([0, 1], \mathbb{C})$ C^1PM. Soit $I_n = \int_0^1 \sin(nt)\, f(t)\, dt$. Alors $I_n \to 0$.

IV Changement de variables

(Th) Soit $f \in C^0(I, F)$. Soit $\varphi \in C^1([a, b], I)$. Alors $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f = \int_a^b (f \circ \varphi)\, \varphi'$. [demo]

V Fonctions C^1

• (Th) Inégalité des accroissements finis : soit $f \in C^0([a, b], F) \cap C^1(]a, b[, F)$. On suppose : $\forall x \in]a, b[, \|f'(x)\| \leq M$. Alors $\|f(a) - f(b)\| \leq M(b - a)$. [demo suites]

Rem : le théorème se généralise au cas où f est C^0, C^1PM sur [a, b].

❍ ($\text{Th}_{\text{fourbe}}$) Soit $f \in C^0([a, b], F) \cap C^1(]a, b], F)$. Alors $\lim_a f' = \ell \in F \Rightarrow \begin{cases} f'(a) \text{ existe} \\ f'(a) = \ell \\ f \text{ est } C^1 \text{ sur } [a, b] \end{cases}$

Rem : ne pas dire "prolonger f ' par continuité". [demo avec g ; $g|_{]a, b]} = f'$ et h ...]

• (Th) Soit $k \geq 1$. Soit $f \in C^0([a, b], F) \cap C^k(]a, b], F)$. On suppose de plus que $\forall j \in \{1, ..., k\}, \lim_a f^{(j)}$ existe.

Alors f est C^k sur [a, b]. [réc ; rem : l'existence de $\lim_a f^{(k)}$ suffit]

Lemme : Soit $h \in C^1(]a, b], F)$ telle que h ' soit bornée sur]a, b]. Alors h a une limite finie en a. [Cauchy ou ∫]

70 – Formules de Taylor

I Taylor avec reste intégral et Taylor Lagrange

Soit $k \in \mathbb{N}$. Soit $f \in C^k(I, F) \cap C^{k+1}PM(I, F)$. Soit $a \in I$. On note :

$T_k(x) = \sum_{j=0}^{k} \frac{(x-a)^j}{j!} f^{(j)}(a)$ et $R_k(x) = f(x) - T_k(x)$. Alors :

$$\forall x \in I, R_k(x) = \int_a^x \frac{(x-u)^k f^{(k+1)}(u)\, du}{k!} = (x-a)^{k+1} \int_0^1 \frac{(1-v)^k f(a + v(x-a))\, dv}{k!}.$$ [IPP et réc]

Rem : la 2^e formule servira pour le développement en série entière de tangente.

Inégalité de Taylor Lagrange : $\|R_k\|_\infty \leq \frac{M_{k+1}\, |x-a|^{k+1}}{(k+1)!}$ avec $M_{k+1} = \sup_{[a, x]} \|f^{(k+1)}\|$

II Taylor Young

• (Th) Soit $f \in C^0([0, a], F)$ possédant un n-DL en 0. Soit $F(x) = \int_0^x f$. Alors F possède un n+1-DL en 0. [demo diff]

• (Th) Soit $f \in C^k([0, a], F)$. Alors f possède un k-DL en 0, T_k. [réc]

III Exercices

• Soit $f \in C^n([a, +\infty[, \mathbb{R})$ telle que f et $f^{(n)}$ sont bornées. Alors $\forall j \in \{1, ..., n-1\}$, $f^{(j)}$ est bornée. [Van der Monde]

• Soit $f \in C^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que f " bornée et que $\lim_{+\infty} f$ existe. Alors $\lim_{+\infty} f' = 0$. [Taylor]

• Soit $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que f et f " sont bornées. Alors $M_1 \leq \sqrt{2\, M_0\, M_2}$. [T]

71 – Calcul approché d'intégrales

Soit $f \in C^0([a, b], \mathbb{R})$. Soit $a_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$. Soit $I = \displaystyle\int_a^b f$.

I Méthode des trapèzes

$I_n = \dfrac{b-a}{n}\left(\dfrac{f(a)+f(b)}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} f(a_k)\right)$. Alors $I_n \to I$.

Lemme : Soit $f \in C^2([a, b], \mathbb{R})$ telle que $f(a) = f(b) = 0$. Alors $\left|\displaystyle\int_a^b f\right| \leq \dfrac{M_2}{12}(b-a)^3$.

[demo en montrant d'abord que $\forall x \in I$, $|f(x)| \leq ½\, M_2(b-x)(x-a)$: lg ou cvx]

Soit $f \in C^2([a, b], \mathbb{R})$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|I_n - I| \leq \dfrac{M_2\,(b-a)^3}{12\, n^2}$.

II Méthode de Simpson

Principe : utiliser des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

Lemme : $\forall P \in \mathbb{R}_3[X]$, $\displaystyle\int_a^b P = \dfrac{b-a}{6}\left(P(a) + P(b) + 4P\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\right)$. [base]

Soit $I_n = \dfrac{b-a}{6\, n}\left(f(a) + f(b) + 2\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} f(a_k) + 4\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\dfrac{a_k + a_{k+1}}{2}\right)\right)$

Lemme : Soit $f \in C^4([a, b], \mathbb{R})$ telle que $f(a) = f(b) = f(c) = f\,'(c) = 0$ avec $c = \dfrac{a+b}{2}$. Alors $\left|\displaystyle\int_a^b f\right| \leq \dfrac{M_4}{2880}(b-a)^5$ [1]

Soit $f \in C^4([a, b], \mathbb{R})$. Alors $|I_1 - I| \leq \dfrac{M_4}{2880}(b-a)^5$.

[demo avec extension de l'interpolation de Lagrange...]

Soit $f \in C^4([a, b], \mathbb{R})$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|I_n - I| \leq \dfrac{M_4\,(b-a)^5}{2880\, n^4}$

III Méthode de Gauss

- On se place sur $I = [-1, 1]$.

Soient $a_1 < ... < a_p$ des points de I. Alors $\exists\,!\,(\lambda_1, ..., \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$, $\forall P \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$, $\displaystyle\int_{-1}^1 P = \sum_{i=1}^p \lambda_i P(a_i)$.

- Est-il possible de choisir $a_1 < ... < a_p \in I$ tel que $\exists\,!\,(\lambda_1, ..., \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$, $\forall P \in \mathbb{R}_q[X]$, $\displaystyle\int_{-1}^1 P = \sum_{i=1}^p \lambda_i P(a_i)$ avec $q \geq p$?
  - Pour $q = 2p$, c'est impossible
  - Pour $q = 2p - 1$, c'est possible : on choisit pour (a_i) les racines du $p^{ième}$ polygone orthogonal, qui est bien scindé à racines simples et ses racines sont dans $[-1, 1]$. Ce polynôme, noté L_p est appelé polynôme de Legendre.

Rem : $\forall n \geq 1$, L_n est proportionnel à $((X^2-1)^n)^{(n)}$

- Etude du cas $p = 2$: L_2 est proportionnel à $3X^2 - 1$. Soient a_1 et a_2 ses racines.

Lemme$_1$: $\forall P \in \mathbb{R}_3[X]$, $\displaystyle\int_{-1}^1 P = P(a_1) + P(a_2)$.

Lemme$_2$: $\forall f \in C^4([-1, 1], \mathbb{R})$, f et f ' nulles en a_1 et a_2 => $\left|\displaystyle\int_{-1}^1 f\right| \leq \dfrac{M_4}{135}$.

Lemme$_3$: $\forall f \in C^4([-1, 1], \mathbb{R})$, $\left|\displaystyle\int_{-1}^1 f - f(a_1) - f(a_2)\right| \leq \dfrac{M_4}{135}$

Conclusion : $\forall f \in C^4([a, b], \mathbb{R})$, $\forall n \geq 1$, $|I - I_n| \leq \dfrac{M_4\,(b-a)^5}{n^4\, 2^5\, 135}$.

72 – Théorème du relèvement

I Argument

Soit $\varphi : \theta \in]-\pi, \pi[\to e^{i\theta} \in \mathbf{U} \setminus \{-1\}$. C'est une bijection continue. La bijection réciproque est appelée argument.

On a : $\forall\ u = x + i\,y \in \mathbf{U} \setminus \{-1\}$, $\mathrm{Arg}\ u = 2\ \mathrm{Arctan}\left(\frac{y}{x+1}\right)$.

Arg est donc continue, mais ne peut pas se prolonger par continuité sur $\mathbf{U}$.

II Théorème du relèvement

❍ (Th) Soit $f \in C^k(I, \mathbf{U})$ avec I intervalle et $k \geq 1$. Alors il existe $\varphi \in C^k(I, \mathbb{R})$ telle que $\forall\ t \in I$, $f(t) = e^{i\,\varphi(t)}$.

[demo supp existe puis test quotient]

• Application : Soit $f : t \in I \to (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ de classe C^k. Soit $r(t) = \|f(t)\|_2$. r est C^k sur I.

Il existe $\varphi \in C^k(I, \mathbb{R})$ telle que $\forall\ t \in I$, $f(t) = (r(t) \cos \varphi(t), r(t) \sin \varphi(t))$.

• Rem : si $\forall\ t \in I$, $f(t) \neq -1$, $\varphi = \mathrm{Arg} \circ f$ convient.

73 – Suites et séries de fonctions C^k

I Primitivation

❍ (Th) Soit $a \in I$. Soit $(f_n) \in C^0(I, F)^{\mathbb{N}}$ telle que f_n converge uniformément vers f sur tout segment $\subset$ I. Soit h_n la primitive de f_n nulle en a. Alors h_n converge uniformément sur tout segment vers h, la primitive de f nulle en a.

[demo facile]

• Cas des séries : Soit $a \in I$. Soit (u_n) une suite de fonctions continues sur I. On suppose que $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge uniformément vers S sur tout segment.Soit v_n la primitive de u_n nulle en a. Alors $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ converge uniformément vers la primitive de S nulle en a.

II Dérivation

❍ (Th) Soit $(f_n) \in C^1(I, F)^{\mathbb{N}}$ telle que $f_n \xrightarrow{s} f$ sur I et $f'_n \xrightarrow{u} h$ sur tout segment. Alors f est C^1 sur I, $f' = h$ et $f_n \xrightarrow{u} f$ sur tout segment.

[demo avec I]

• (Th) Soit $k \geq 1$. Soit $(f_n) \in C^k(I, F)^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall\ j \in \{0, ..., k-1\}$, $f_n^{(j)} \xrightarrow{s} g_j$ sur I et $f'_n \xrightarrow{u} g_k$

Alors $f = g_0$ est C^k sur I, $\forall\ k \in \{1, ..., k\}$ $f^{(j)} = g_j$ et de plus, $\forall\ j \leq k$, $f_n^{(j)} \xrightarrow{u} g_j$ sur tout segment. [réc]

• Cas des séries : résultat analogue.

• (Ex) $\forall\ x \geq 1$, $\zeta'(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x}$.

III Exponentielle

Soit A une algèbre normée de dimension finie.

• Rappel de la définition de l'exponentielle. exp est continue sur A.

• Soit $a \in A$. Soit $e_a : t \in \mathbb{R} \to \exp(ta) \in A$.

(Th) e_a est C^∞ sur $\mathbb{R}$, et $e'_a = a\ e_a = e_a\ a$. [rapide avec II]

74 – Intégrales dépendant d'un paramètre

Soit F un ev normé de dimension finie.

I Continuité

❍ (Th) Soit $A \subset \mathbb{R}^m$. Soit $f \in C^0(A \times [a, b], F)$. Soit $g : x \in A \to \int_a^b f(x, t)\, dt \in F$. Alors g est continue sur A.

[demo avec compact & suites (f UC)]

• (Th) Généralisation : soit $f \in C^0(A \times I, F)$. Soit $g : (u, v, x) \in I^2 \times A \to \int_u^v f(x, t)\, dt \in F$. Alors g est continue sur A.

[changement de variables]

• (Ex) $\lim_{x \to 0+} \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t^2}\, dt = \ln 2$. [2 démos : l'une avec Taylor Lagrange, l'autre avec prec]

II Dérivation

On note D_1f la dérivée de f par rapport à la 1e variable.

❍ (Th) Soit A un intervalle et I = [a, b]. Soit $f : A \times I \to F$ telle que f et D_1f soient continues sur $A \times I$.

Soit $g : x \to \int_a^b f(x, y)\, dt$. Alors g est C^1 sur A, et $\forall x \in A$, $g'(x) = \int_a^b D_1f(x, t)\, dt$.

[demo bouf avec p(u, v)]

• (Ex) Soit $f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\, dt$. Soit $g(x) = \left(\int_0^x e^{-u^2}\, du\right)^2$. Alors $f + g = \pi/4$ sur $\mathbb{R}_+$, et

$\int_0^\infty e^{-u^2}\, du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ Intégrale de Gauss [demo]

• (Th) Généralisation : Soit A intervalle et I = [a, b]. Soit $f : A \times I \to F$ telle que $\forall j \le k$, $D_1^j f$ existe et est continue sur $A \times I$. Soit $g : x \to \int_a^b f(x, y)\, dt$. Alors g est C^k sur A, et $\forall x \in A$, $g^{(k)}(x) = \int_a^b D_1^k f(x, t)\, dt$. [d réc]

• (Ex) Soit $f \in C^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$. Soit $g : x \in \mathbb{R} \to f(x)/x$ si $x \neq 0$ et $f'(0)$ si $x = 0$. Alors g est C^{k-1} sur $\mathbb{R}$.

[demo prec avec $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \int_{[0, 1]} f'(tx)\, dt$]

• (Ex) $\int_0^\pi \ln\left(\frac{a - \cos x}{b - \cos x}\right) dx = \pi(\mathrm{Argch}(a) - \mathrm{Argch}(b))$.

III Formule de Fubini

(Th) Soit $f : [a, b] \times [c, d] \to F$ continue. Alors $\int_a^b \left(\int_c^d f(u, v)\, dv\right) du = \int_c^d \left(\int_a^b f(u, v)\, du\right) dv$.

[demo avec F et G]

INTEGRATION SUR UN INVERVALLE QUELCONQUE

75 – Intégration des fonctions positives

Soit I un intervalle.

I Définition

• Soit $f \in C^0PM(I, \mathbb{R}_+)$. On dit que f est intégrable (ou sommable) si $\exists\, M > 0$, $\forall$ J segment $\subset I$, $\int_J f \leq M$.
Dans ce cas, on pose $\int_I f = \text{Sup} \{ \int_J f \,/\, J \text{ segment} \subset I \}$.
• Lemme : Soit I un intervalle. Soit J segment $\subset$ I. Soit (J_n) une suite $\nearrow$ de segments d'union I. Alors $\exists\, n \in \mathbb{N}$, $J \subset J_n$.
• (Th) Soit (J_n) suite $\nearrow$ de segments d'union I. Soit $f \in C^0PM(I, \mathbb{R}_+)$. Soit $u_n = \int_{J_n} f$. On suppose (u_n) majorée.
Alors f est intégrable sur I et $\int_J f = \lim u_n = \text{Sup } u_n$
• (Th) Soit $f \in C^0PM([a, b], \mathbb{R}_+)$. Dans ce cas, f est intégrable et les deux notions d'intégrales coïncident.

II Propriétés

• (Th) Soient f et $g \in C^0PM(I, \mathbb{R}_+)$ intégrables. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Alors $f + \lambda g$ est C^0PM intégrable, et $\int(f + \lambda g) = \int f + \lambda \int g$.
• (Th) Soient f et $g \in C^0PM(I, \mathbb{R})$ telles que $0 \leq f \leq g$. Alors g intégrable $\Rightarrow$ f intégrable, et $0 \leq \int_I f \leq \int_I g$.
Plus généralement : soient f et $g \in C^0PM([a, b[, \mathbb{R})$. Si g intégrable et $f \underset{b}{=} O(g)$, alors f intégrable.
• (Th) Soit $f \in C^0(I, \mathbb{R}_+)$ intégrable. Dans ce cas, $\int_I f = 0 \Leftrightarrow f = 0$. (si I non singleton)
• (Th) Soit $f \in C^0PM(I, \mathbb{R}_+)$. Soit $a \in I$. Alors :
f intégrable sur I $\Leftrightarrow$ f intégrable sur $I \cap [a, +\infty[$ et f intégrable sur $I \cap]-\infty, a]$.
Dans ce cas, $\int_I f = \int_{I \cap [a, +\infty[} f + \int_{I \cap]-\infty, a]} f$.
• (Th) Soit $f \in C^0PM([a, b[, \mathbb{R}_+)$ et F sa primitive qui s'annule en a. Alors F est croissante, et
f intégrable sur [a, b[$\Leftrightarrow$ F majorée.
• (Th) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit $f : t \to 1/t^\alpha$. Alors :
f intégrable sur $]0, 1] \Leftrightarrow \alpha < 1$.
f intégrable sur $[1, +\infty[\Leftrightarrow \alpha > 1$.

Ex : $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$ existe <=> $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$). $\int_1^2 \frac{dt}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$ existe <=> $\beta < 1$.
• (Ex) Soit $f \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$. Alors f intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et lim f = 0 en $+\infty$ sont indépendants. [2 contrexemples]
• (Ex) Soit $f \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ décroissante. Alors f intégrable $\Rightarrow \lim x\, f(x) = 0$ en $+\infty$. [x et x/2]
Rem : la réciproque est fausse.

III Exemples

• Soit $\beta(x, y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^x t \sin^y t\, dt$. Alors $\mathcal{D}_\beta =]-1, +\infty[^2$.
• $\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-\sqrt{x}}\, dx$ converge <=> $\alpha > -1$.
• $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\, dx = -\frac{\pi}{2} \ln 2$. [Chg var avec cos puis calculs]
• $\int_0^{\infty} \frac{x\, dx}{1 + x^\alpha \sin^2 x}$ converge <=> $\alpha > 1$. [Encadrements et calcul intégral avec tan]
• Soit $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t}\, t^{x-1}\, dt$. Alors $\mathcal{D}_\Gamma =]0, +\infty[$.
• $\int_0^{\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}\, dt = \ln 2$. [encadrements Taylor Lagrange ou ∫param]

76 – Intégration des fonctions complexes

I Définition, propriétés

• (Déf) Soit $f \in C^0PM(I, \mathbb{C})$. Alors $|f|$ est C^0PM. On dit que f est intégrable si $|f|$ l'est.

Rem : f intégrable $\Leftrightarrow \overline{f}$ intégrable $\Leftrightarrow$ Re f et Im f intégrables.
• (Rappel) Définition de f^+ et f^-.
• (Déf) Soit $f \in C^0PM(I, \mathbb{C})$ intégrable. On pose $f = u + i\,v$. Alors $\int u = \int u^+ - \int u^-$, $\int v = \int v^+ - \int v^-$ et $\int f = \int u + i \int v$.
(Th) Soit J_n une suite $\nearrow$ de segments d'union I. Alors $\int_I f = \lim \int_{J_n} f$.
• Dans le cas où f est C^0PM sur un segments, les deux notions coïncident.
• (Th) Soit $f \in C^0PM(I, \mathbb{C})$. Soit $\varphi \in C^0PM(I, \mathbb{R}_+)$ intégrable. On suppose $\forall x \in I$, $|f(x)| = \varphi(x)$. Alors f est intégrable.
Cas particulier important : f bornée sur un intervalle borné $\Rightarrow$ f intégrable.
• (Th) L'ensemble des fonctions intégrables de $C^0PM(I, \mathbb{C})$ est un $\mathbb{C}$ – ev, et l'application $f \to \int_I f$ en est une forme linéaire.
• (Th) Soit $f \in C^0PM(I, \mathbb{C})$ intégrable. Alors $|\int_I f| \le \int_I |f|$.
• (Th) Soit $f \in C^0PM(I, \mathbb{C})$ intégrable et $I' \subset I$. Alors f intégrable sur I ', et $\int_{I'} f = \int_I f\,\chi_{I'}$.
• Définition des notations avec bornes de l'intervalle. Relation de Chasles.
• f est intégrable sur [a, b[implique que sa primitive nulle en a possède une limite finie en b^-.
⌦ Pour faire des intégrations par parties ou changement de variable, il faut toujours se ramener à un segment puis faire un passage à la limite (Centrale1999).

II Intégration des relations de comparaison

❍ Soit I = [a, b[. Soient φ et $\psi \in C^0PM(I, \mathbb{R})$. On suppose $\psi \ge 0$ et non intégrable.

On note $F(x) = \int_a^x \varphi$ et $G(x) = \int_a^x \psi$. Alors : $\begin{cases} \varphi \underset{b}{=} O(\psi) \Rightarrow F \underset{b}{=} O(G). \\ \varphi \underset{b}{=} o(\psi) \Rightarrow F \underset{b}{=} o(G). \\ \varphi \underset{b}{\sim} \psi \Rightarrow F \underset{b}{\sim} G. \end{cases}$ [demo 2ε]

• Soient φ et $\psi \in C^0PM(I, \mathbb{R})$. On suppose $\psi \ge 0$ et intégrable et $\varphi \underset{b}{=} O(\psi)$. φ est donc intégrable.

On note $R_1(x) = \int_x^b \varphi$ et $R_2(x) = \int_x^b \psi$. Alors $\begin{cases} R_1 \underset{b}{=} O(R_2). \\ \varphi \underset{b}{=} o(\psi) \Rightarrow R_1 \underset{b}{=} o(R_2). \\ \varphi \underset{b}{\sim} \psi \Rightarrow R_1 \underset{b}{\sim} R_2. \end{cases}$ [facile !]

• Généralisation où φ est à valeurs complexes.
• (Ex) Soit $f \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que $\lim f + f' = 0$ en $+\infty$. Alors $\lim f = 0$ en $+\infty$. [demo exp et ∫]
• (Ex) $\int_1^x \frac{e^t\,dt}{t} \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^x}{x}$. [demo IPP et ∫]
• (Ex) $\text{Arccos}\ x \underset{1}{\sim} \sqrt{2}\,\sqrt{1-x}$. [demo ∫ + directe]

III Semi-convergence

• Il existe des séries convergentes non absolument convergentes ; elles sont appelées semi-convergentes.

(Déf) Soit $f \in C^0PM([a, b[, \mathbb{C})$. Soit F la primitive de f nulle en a. On dit que $\int_a^b f$ est semiconvergente si F admet une limite finie en b et si f est non intégrable.

Attention sur]a, b[: f semiconvergente sur]a, b[$\Leftrightarrow \int_a^{\frac{a+b}{2}} f$ existe, $\int_{\frac{a+b}{2}}^b f$ existe mais f non intégrable sur]a, b[.

Ex : $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \tan x\,dx$ est non semiconvergente. $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt$ est semiconvergente [demo]

La démonstration se généralise au cas : $\int_0^\infty$ fg converge si f possède une primive bornée sur I et g C^1 décroissante de limite nulle sur $[a, +\infty[$.

IV Convergence en moyenne

• (Th) L'ensemble $\mathcal{CI}(I, \mathbb{C})$ des fonctions continues intégrables sur I est un $\mathbb{C}$ ev. L'application : $f \to \|f\|_1 = \int_I |f|$ est une norme sur cet ensemble, appelée norme de la convergence en moyenne.
Rem : I borné et convergence uniforme ⇒ convergence en moyenne. [demo]
Si $(f_n) \in \mathcal{CI}(I, \mathbb{C})^{\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I et I borné, alors (f_n) converge vers f en moyenne, et

$$\int_I f = \lim \int_I f_n$$

• (Th) Soit E l'ensemble des fonctions C^0 de carré intégrable sur I. Alors E est un $\mathbb{C}$ ev, et l'application :

$(f, g) \to \int_I \overline{f}\, g$ est un produit scalaire hermitien sur E. [demo]

La norme associée à ce produit scalaire est appelée norme de la convergence en moyenne quadratique $\| \ \|_2$.

$\forall (f, g) \in E^2$, $|<f|g>| \leq \|fg\|_1 \leq \|f\|_2\|g\|_2$. Donc ce produit scalaire hermitien est continu.

77 – Théorèmes de convergence monotone et dominée

Soit I un intervalle.

I Théorème de convergence monotone

❍ (Th) Soit $(f_n) \in (\mathbb{R}^I)^{\mathbb{N}}$. Alors :

$$\left.\begin{array}{r} (f_n) \nearrow C^0PMI \text{ sur } I \\ f_n \text{ CVS vers } C^0PM \text{ sur } I \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lim f_n \text{ intégrable} \Leftrightarrow (\int_I f_n) \text{ majorée.} \\ \text{Dans ce cas, } \int_I \lim f_n = \lim \int_I f_n = \mathrm{Sup}\{ \int_I f_n \ / \ n \in \mathbb{N} \}. \end{array}\right.$$

[d CVUSTS]

• (Th) Soit $(u_n) \in (\mathbb{R}^I)^{\mathbb{N}}$. Alors :

$$\left.\begin{array}{r} (u_n) \geq 0 \ C^0PMI \text{ sur } I \\ \sum_{n=0}^{\infty} u_n \text{ CVS vers } C^0PM \text{ sur } I \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \sum_{n=0}^{\infty} u_n \text{ intégrable sur I} \iff \sum_{n=0}^{\infty} \int_I u_n \text{ converge.} \\ \text{Dans ce cas, } \int_I \sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I u_n. \end{array}\right.$$

• (Th) Soit $(u_n) \in (\mathbb{C}^I)^{\mathbb{N}}$. Alors :

$$\left.\begin{array}{r} (u_n) \ C^0PMI \text{ sur } I \\ \sum_{n=0}^{\infty} u_n \text{ CVS vers } C^0PM \text{ sur } I \\ \sum_{n=0}^{\infty} \int_I |u_n| \text{ converge} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \sum_{n=0}^{\infty} u_n \text{ intégrable sur I.} \\ \int_I \sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I u_n \\ \int_I \left| \sum_{n=0}^{\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \int_I |u_n| \end{array}\right.$$

[demo CVUSTS]

II Théorème de convergence dominée

❍ (Th) Soit $(f_n) \in (\mathbb{C}^I)^{\mathbb{N}}$. Alors :

$$\left.\begin{array}{r} (f_n) \ C^0PM \text{ sur } I \\ \exists \varphi \ C^0PMI, \forall n \in \mathbb{N}, |f_n| \leq \varphi \\ f_n \text{ CVS vers } f \ C^0PM \text{ sur } I \end{array}\right\} \Rightarrow \lim \int_I f_n = \int_I \lim f_n$$

[d CVUSTS]

Rem : Dans ce cas, f et f_n sont intégrables sur I.

⌦ Si on veut traiter le cas où $I = [0, n]$, on prolonge f_n par 0 sur $]n, +\infty[$ et on pose $I = \mathbb{R}_+$. (X2000)

⌦ Ces théorèmes sont très importants, et les candidats ne pensent que trop rarement à s'en servir. (X1999)

• (Ex) Soit $x > 0$ fixé. Soit $f_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}$ si $t \in \ ]0, n]$, 0 sinon. Alors $\forall x > 0, \Gamma(x) = \lim_n \frac{n! \ n^x}{x(x+1)\ldots(x+n)}$.

• Intégrale de Wallis : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, dt$. Alors $\lim I_n = 0$, $\forall n \geq 1$, $n \, I_n \, I_{n-1} = \frac{\pi}{2}$, et $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

• $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt$. Alors $\lim u_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. [Wallis ; redemo de l'intégrale de Gauss]

• $\int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{n + t} dt \sim \frac{1}{n}$. [TCVD ou IPP]

• Soit $f \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$. Alors $\lim_n n \int_0^1 t^n f(t) \, dt = f(1)$. [CHV ; TCVD]

78 – Intégrales dépendant d'un paramètre

I Théorème

❍ (Th) Continuité : Soit $A \subset \mathbb{R}^m$. Soit I un intervalle. Soit $f \in C^0(A \times I, \mathbb{C})$ et $g : x \in A \to \int_I f(x, t)\, dt$. On suppose

$\exists\, \varphi \in C^0PMI(I, \mathbb{R}_+), \forall (x, t) \in A \times I, |f(x, t)| \leq \varphi(t)$ <hypothèse de domination de f>

Alors : g est C^0 sur A. [demo avec TCVD]

Rem : il suffit que $\forall$ K compact $\subset A, \exists\, \varphi \in C^0PMI(I, \mathbb{R}_+), \forall (x, t) \in K \times I, |f(x, t)| \leq \varphi(t)$

❍ (Th) Dérivation : Soit A et I intervalles. Soit $f \in C^0(A \times I, \mathbb{C})$ telle que D_1f existe est est continue sur $A \times I$.

$\exists\, \varphi \in C^0PMI(I, \mathbb{R}_+), \forall (x, t) \in A \times I, |f(x, t)| \leq \varphi(t)$ <hypothèse de domination de f>

$\exists\, \psi \in C^0PMI(I, \mathbb{R}_+), \forall (x, t) \in A \times I, |D_1f(x, t)| \leq \psi(t)$ <hypothèse de domination de D_1f>

Soit $g : x \to \int_I f(x, t)\, dt$. Alors g est C^1 sur A et $g'(x) = \int_I D_1f(x, t)\, dt$. [demo avec TCVD]

• Extension aux fonctions C^k. (toi-même)

II Fonction Γ

• (Déf) $\forall x > 0, \Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{x-1}\, dt$.

• (Th) $\forall x > 0, \Gamma(x + 1) = x\, \Gamma(x)$. [demo ipp]

• (Th) $\forall n \in \mathbb{N}, n! = \Gamma(n+1)$. [demo réc]

• (Th) Γ est C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall k \in \mathbb{N}, \Gamma^{(k)}(x) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{x-1}\, (\ln t)^k\, dt$. [demo sur [a, b]]

Rem : Γ convexe car $\Gamma'' > 0$.

☠ (Th) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. [Intégrale de Gauss]

• (Ex) $\ln \Gamma$ est convexe. [calcul et CSchwarz]

• (Ex) $\Gamma(x) \underset{0^+}{\sim} 1/x$. [demo rapide !]

⌦ La fonction Γ est bien au programme (Centrale1999)

79 – (Ex) Applications du TCVD

• Soit $f \in C^0I(]0, +\infty[, \mathbb{R})$. On note $L(f)(x) = \int_0^\infty e^{-xt} f(t)\, dt$. Alors L(f) est C^0 sur $\mathbb{R}_+$. [demo]

• Lemme de Riemann-Lebesgue : Soit $f \in C^0PM([a, b], \mathbb{C})$. Alors $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \int_a^b f(t)\, e^{i\lambda t}\, dt = 0$.

[demo si C^1 (ipp), si C^0PM ($\mathcal{E}$), sur un intervalle quelconque ($\|\ \|_1$) avec lemme]

Lemme : $\mathcal{E}(I, \mathbb{C})$ est dense dans $(\mathcal{CI}(I,\mathbb{C}), \|\ \|_1)$.

• Transformation de Fourier : soit $f \in C^0PMI(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. On pose $\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, e^{-ixt}\, dt$. Alors $\hat{f}$ est continue.

[demo si f C^0 + demo cas général TCVD]

• Soit $f : x \to \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \cos(xt)\, dt$. On admet $f(0) = \sqrt{\pi}$. Alors $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{\pi}\, e^{-\frac{x^2}{4}}$.

[demo f est C^1 puis équation différentielle ipp]

• Soit $F : x \to \int_1^\infty \frac{\ln t}{1 + xt^2}\, dt$. Alors $\mathcal{D}_F = \mathbb{R} \setminus]-1, 0]$, $F(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$ et $F(x) \underset{0^+}{\sim} -\frac{\pi}{4} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

[demos plus ou moins dures... utilisation du TCVM en 0]

• Soit $f : x \to \int_1^\infty \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t^2 - 1}}\, dt$. Alors $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$ et $f(x) \underset{0^+}{\sim} -\ln x$.

[demos plus ou moins dures avec thirc]

80 – (Ex) Séries et intégrales

Dans la plupart des exemples interviennent des séries géométriques.

I Ramassis d'exemples

- $\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1}\,dt = \zeta(2)$. [demo avec théorème diy]
- $\int_0^\infty \frac{x}{\text{sh } x}\,dx = \frac{\pi^2}{8}$ [demo avec lemme : $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{3}{4}\zeta(2)$ et on admet $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$]
- $\forall x > 1, \Gamma(x)\ \zeta(x) = \int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{e^u - 1}\,du$.

II Etude de f : $x \to \int_0^\infty \frac{\sin t}{e^{xt} - 1}\,dt$

- $\forall x > 0, f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + n^2x^2}$.
- f est C^0 sur $]0, +\infty[$. [demo avec la série et avec l'intégrale]
- $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \zeta(2) / x^2$. [demo TIL série + intégrale chv]
- $f(x) \underset{0}{=} \pi/2x + O(1)$. [demo série encadrements]

81 – (Ex) Recherche d'équivalents, méthode de Laplace

Méthode :

- repérer un point où l'intégrale se concentre
- rescaler en x pour que le maximum ait la même abscisse
- translater en 0 le maximum
- faire un développement limité en 0 pour deviner l'équivalent
- trouver une exponentielle associée à ce d.l.
- faire un changement de variable associé à l'exponentielle
- théorème de la convergence dominée

- $I_n = \int_0^1 \frac{dt}{(1 + t + t^2)^n} \sim \frac{1}{n}$.
- $W(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^x\,dt \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$.
- Formule de Stirling :

  (Ex) $\Gamma(x + 1) = \int_0^\infty e^{-t}\,t^x\,dt \underset{+\infty}{\sim} x^x\,e^{-x}\sqrt{2\pi x}$.

  (Th) $n! \sim n^n\,e^{-n}\sqrt{2\pi n}$.

82 – Comparaison série - intégrale

I Cas des fonctions positives

(Th) Soit $f \in C^0PM(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. On note $\boxed{w_n = \int_{n-1}^{n} f - f(n)}$. Alors

$$\left.\begin{array}{r} f \geq 0 \text{ sur } \mathbb{R}_+ \\ f \text{ décroissante sur } \mathbb{R}_+ \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} w_n \text{ converge.}$$

Dans ce cas, $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ converge, et $\sum_{n=0}^{\infty} f(n)$ converge $\Leftrightarrow$ f intégrable sur $\mathbb{R}_+$. [demo ; rem : $w_n \geq 0$]

[quelques exemples : Σ 1/n, Σ 1/n ln n ; Σ 1/n(ln n)$^\beta$]

II Cas des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$

- (Th) Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$. Alors

$$\left.\begin{array}{r} f\ C^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+ \\ f' \text{ intégrable sur } \mathbb{R}_+ \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} w_n \text{ est absolument convergente}$$ [demo ipp]

(Ex) Dans ce cas, $\sum_{n=0}^{\infty} f(n)$ converge $\Leftrightarrow$ f intégrable sur $[0, +\infty[$ [un peu différent de ≥ 0 : lemme]

Lemme : $\lim_{\infty} f = 0$ et $\lim_{n} \int_a^n f = \ell \in \mathbb{C} \Rightarrow \lim_{x \to \infty} \int_a^x f = \ell$.

- (Ex) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\ln n)}{n}$ diverge. [préc ou groupement paquets]
- (Ex) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{E(\sqrt{n})}}{n^\alpha}$ converge <=> $\alpha > \frac{1}{2}$ [plein de cas et paquets]

III Formule de Stirling

(Th) $n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$. [DEMO avec $s_n = \ln(n!) = n \ln n - n + ½ \ln n + c + o(1)$; Wallis pour c]

SOMMES DOUBLES

83 – Ensembles dénombrables

I Généralités

• (Déf) On dit qu'un ensemble est dénombrable s'il est en bijection sur une partie de $\mathbb{N}$.
Rem : toute partie de $\mathbb{N}$ est dénombrable.
• (Th) Soit P partie infinie de $\mathbb{N}$. Alors il existe une unique bijection strictement croissante de $\mathbb{N}$ sur P. [d]
• (Th) Soit I un ensemble infini dénombrable. Alors il existe une bijection de $\mathbb{N}$ sur I.
❍ (Th) Soit I un ensemble. Alors :
I dénombrable $\Leftrightarrow$ il existe une suite croissante de parties finies de I d'union I. [d]

II Exemples

• Ensembles dénombrables : $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}^2$, $\mathbf{A}$, $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$, $\mathbb{Q}$
• Ensembles non dénombrables : $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $[0, 1]$
Lemme : soit X un ensemble. Soit $\varphi \in \mathcal{F}(X, \mathcal{P}(X))$. Alors φ est non surjective.
• Soit $f \in P^{\mathbb{N}}$ surjective. Soit $g \in \mathbb{N}^Q$ injective. Alors P et Q dénombrables.
☠ Toute union dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable. [demo suite ↗]

84 – Suites doubles sommables

I Définition

• (Déf) Soit I un ensemble dénombrable. Soit $(u_i)_{i \in I} \in (\mathbb{R}_+)^I$. On dit que (u_i) est sommable si

$$\exists M > 0, \forall J \in \mathcal{P}_f(I), s_J = \sum_{i \in J} u_i \leq M.$$

Dans ce cas, on note $\sum\limits_{i \in J} u_i = \text{Sup}\{ s_J \,/\, J \in \mathcal{P}_f(I) \}$.
• (Th) Soit (J_n) suite croissante de parties finies de I d'union I. Alors (u_i) sommable $\Leftrightarrow$ (s_{J_n}) majorée.
Dans ce cas, $\sum\limits_{i \in I} u_i = \lim\limits_n s_{J_n}$. [Lemme : Soit $J \subset I$, J fini. Alors $\exists\, n \in \mathbb{N}, J \subset J_n$]
• (Déf) Soit $(u_i)_{i \in I} \in \mathbb{C}^I$. On dit que (u_i) est sommable si $(|u_i|)$ l'est. Dans ce cas, on définit la somme en décomposant en parties réelles et imaginaires, puis positives et négatives.
• (Th) Soit $(u_i)_{i \in I}$ sommable. Soit (J_n) suite croissante de parties finies de I d'union I. Alors $\lim s_{J_n} = \sum\limits_{i \in I} u_i$.
Remarque : Soit $(u_i)_{i \in I}$ sommable. Soit $J \subset I$. Alors J et dénombrable, et $(u_i)_{i \in J}$ est sommable.

II Interversion de sommations

❍ (Th) Soit $(u_{p,q}) \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}^2}$. Alors :

$$(u_{p,q}) \text{ sommable} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall q \in \mathbb{N}, s_q = \sum\limits_{p=0}^{\infty} u_{p,q} \text{ existe} \\ (s_q) \text{ sommable.} \end{cases}$$

[demo $\Rightarrow \Leftarrow$]

• (Th) Soit $(u_{p,q}) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^2}$ sommable. Alors : $\sum\limits_{p=0}^{\infty} \sum\limits_{q=0}^{\infty} u_{p,q}$ et $\sum\limits_{q=0}^{\infty} \sum\limits_{p=0}^{\infty} u_{p,q}$ existent et sont égales à $\sum\limits_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} u_{p,q}$.
Rem : pour savoir si $(u_{p,q})$ est sommable, on pourra utiliser le 1.
• (Th) Soient $(a_p)_{p \in \mathbb{N}}$ et $(b_q)_{q \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ sommables. Alors $(a_p b_q)$ est sommable, et :

$$\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} a_p b_q = \left(\sum_{p \in \mathbb{N}} a_p\right)\left(\sum_{q \in \mathbb{N}} b_q\right).$$

• (Th) Produit de Cauchy de deux séries : soient (u_p) et $(v_q) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ sommables. On note $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k\, v_{n-k}$. Alors (w_n) est sommable, et $\sum_{n=0}^{\infty} w_n = \left(\sum_{p \in \mathbb{N}} u_p\right)\left(\sum_{q \in \mathbb{N}} v_q\right)$. [demo J_n]

• (Ex) Soit $u_{p,q} = \dfrac{1}{p^2 + q^2}$. Alors $(u_{p,q})$ est non sommable.