22 – Signature d'une forme quadratique

I Théorème d'inertie de Sylvester

Soit E un $\mathbb{R}$ – ev de dimension finie n. Soit $q \in \mathcal{Q}(E)$. Alors il existe une base B, dite de Sylvester, telle que

$\mathrm{Mat}(q, B) = \begin{bmatrix} I_s & 0 & 0 \\ 0 & -I_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ [demo : $\exists$ bases $\perp$ et $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$]

(Th) Soit B une telle base. Alors $s = \mathrm{Max}\ \{ \dim F \ / \ F$ sev de E et $q_{|F}$ définie positive $\}$
$t = \mathrm{Max}\ \{ \dim F \ / \ F$ sev de E et $q_{|F}$ définie négative $\}$ [demo suppl]

(s, t) est appelé signature de q.
Rem : $s + t = \mathrm{rg}(q)$.

II Exemples

- Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $q(M) = \mathrm{dét}(M)$. Alors $(s, t) = (2, 2)$. [2 méthodes : algo. Gauss et recherche de sevs]
- Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $q(M) = \mathrm{Tr}(M^2)$. Alors $(s, t) = (n(n+1)/2, n(n-1)/2)$ [sevs]
- Dans $\mathbb{R}^n$, $q(x) = \sum_{i>j} x_i x_j$. Alors $(s, t) = (1, n-1)$.[astuce : $\sum_{i>j} x_i x_j = \left(\sum_{i,j} x_i x_j\right)^2 - \sum_i x_i^2$]

☠ $\forall (q_1, q_2) \in \mathcal{Q}(E)^2$, $s(q_1 + q_2) \leq s(q_1) + s(q_2)$. "La signature est sous–additive". [demo $q - q_1$ et dim A+B]

☠ Soient $q \in \mathcal{Q}(E)$, B une base de E, et $M = \mathrm{Mat}(q, B)$. Alors :
q est définie positive $\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}_n$, $\mathrm{dét}(M_k) > 0$. [$\Rightarrow$ direct $\Leftarrow$ réc]

Rem : si M inversible et symétrique, $\mathrm{dét}(M) > 0 \Leftrightarrow t \in 2\mathbb{Z}$.

- Soit $M = \mathrm{Mat}(q, B)$. On suppose $\forall k \in \mathbb{N}_{n-1}$, $\mathrm{dét}(M_k) \neq 0$. Alors :
$t = \#\{ k \in \mathbb{N}_n \ / \ \mathrm{dét}(M_k)/\mathrm{dét}(M_{k-1}) < 0 \}$ avec la convention $\mathrm{dét}(M_0) = 1$. [diy récurrence]
- Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $m_{i\,j} = 1/(i + j + 1)$. Soit q la forme quadratique canoniquement associée.
Alors sa signature est (n, 0). [demo $\int$ reconnaître un produit scalaire de fonctions]
- Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $m_{i\,j} = 1/(a_i b_j + a_j b_i)$. Trouver sa signature. [diy]

☠ Soit $q \in \mathcal{Q}(E)$ de dimension n. Alors $\mathrm{Max}\{ \dim F \ / \ q_{|F} = 0 \} = n - \mathrm{Min}(s, t)$. [demo]

- Soit $M = [\mathrm{Min}(i,j)]$ et q la forme quadratique de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associée.
Alors $q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} (x_k + \ldots + x_n)^2$, donc $(s, t) = (n, 0)$.

⌦ Il faut savoir donner l'expression analytique d'une f. quad. si on connaît sa matrice : $q(x) = {}^tXMX$ (X2000)

DETERMINANTS

23 – Groupe symétrique

Soit E un ensemble fini de cardinal n.

I Décomposition en cycles

1 – Définition

Le support d'une permutation $\sigma \in S_E$ est $\{ x \in E \,/\, \sigma(x) \neq x \}$
Rem : le support d'une permutation σ est aussi le support de σ^{-1}.
Soit $r \leq n$. $(a_1, ..., a_r)$ éléments de E distincts.
Soit $c \in S_E$; $c(a_1) = a_2, ..., c(a_{r-1}) = a_r, c(a_r) = a_1$. Notation : $c = (a_1, ..., a_r)$.
L'ordre de c est r. Son support est $\{ a_1, ..., a_r \}$.
c^{-1} est un cycle. c^2 est un cycle si r est impair (ou $r = 2$...)

2 – Propriétés

- Conjugué d'un cycle : Soit $c = (a_1, ..., a_r)$. Alors $\forall\, \sigma \in S_E, \sigma \circ c \circ \sigma^{-1} = (\sigma(a_1), ..., \sigma(a_r))$.
- (Th) Toute permutation est le produit de cycles disjoints. [dessin]
- (Th) L'ensemble des transpositions engendre S_E. [2 idées]

Rem : Si $c = (a_1, ..., a_r)$, alors $c = (a_1, a_2) \circ (a_2, a_3) \circ ... \circ (a_{r-1}, a_r)$.
- Soit $\sigma \in S_E$. L'ordre de σ est le ppcm des ordres des cycles dans sa décomposition en cycles disjoints.
- Conjugué d'une permutation : $\forall\, \sigma \in S_E, \sigma\, (c_1 ... c_q)\, \sigma^{-1} = (\sigma\, c_1\, \sigma^{-1}) ... (\sigma\, c_q\, \sigma^{-1})$. [automorphisme intérieur]

II Signature

- Lemme : Soit $\sigma \in S_E$. Soit t une transposition. Alors le nombre d'orbites de $q \circ t$ est le nombre d'orbites de q plus ou moins un. [d 2 cas]
- Déf 1 : Soit $\sigma \in S_E$. On décompose σ en transpositions : $\sigma = t_1 \circ ... \circ t_q$. On pose $\varepsilon_\sigma = (-1)^q$.
- Déf 2 : Soit $\sigma \in S_E$. On pose $\varepsilon_\sigma = (-1)^{n-\lambda}$, où λ est le nombre d'orbites. [Déf 1 $\Rightarrow$ Déf 2 réc sur q]
- (Th) ε est un morphisme de groupe de $(S_E, \circ)$ dans $(\mathbf{U}_2, \times)$.
- Le groupe alterné est $\mathcal{A}_n = \operatorname{Ker} \varepsilon = \{ \sigma \in S_n, \varepsilon_\sigma = 1 \}$. Rem : $n \geq 2 \Rightarrow \# \mathcal{A}_n = n!/2$.

III Exercices

- Il n'y a que 2 morphismes de groupes de S_E dans $\mathbb{C}^*$. [demo transp]
- Théorème de Cayley : tout groupe fini de cardinal n est isomorphe à un sous-groupe de σ_n. [Cf avant]
- Si $n \geq 3$, Alors $Z(S_E) = \{ \mathrm{Id} \}$.
- $\mathcal{A}_4$ n'a pas de sous-groupe à 6 éléments. [absurde ; s'il comprend un 3 cycle, il les comprend tous]

24 – Déterminants

I Formes n-linéaires alternées

♦ Soit E un $\mathbf{K}$ – ev. $f : E^n \to \mathbf{K}$ est n – linéaire alternée si :
- ∗ elle est n-linéaire
- ∗ $(\exists\, i \neq j, x_i = x_j) \Rightarrow f(x_1, ..., x_n) = 0$.

Rem : Alors, $(x_1, ..., x_n)$ liée $\Rightarrow f(x_1, ..., x_n) = 0$.

$\mathcal{A}_n(E)$ désigne l'ensemble des formes n – linéaires alternées.

(Th) $n > \dim E \Rightarrow \mathcal{A}_n(E) = \{0\}$.

♦ (Th) $n = \dim E \Rightarrow \dim \mathcal{A}_n(E) = 1$. [demo]

Justification : Soit $X = \mathcal{F}(E^n, \mathbf{K})$. On définit une opération de S_n sur X :

$\forall \sigma \in S_n, \forall f \in X,$ $\sigma \bullet f : (x_1, ..., x_n) \in E^n \to f(u_{\sigma(1)}, ..., u_{\sigma(n)}) \in \mathbf{K}.$ [c'est bien une action]
Application : Si f est alternée, $\sigma \bullet f = \varepsilon_\sigma f$.
♦ Soit B une base de E. On définit $\text{dét}_B(x_1, ..., x_n) = \Sigma_{\sigma \in Sn}\, \varepsilon_\sigma\, e_{\sigma(1)}{}^*(x_1) \ldots e_{\sigma(n)}{}^*(x_n)$.

C'est l'unique élément f de $\mathscr{A}_n(E)$ tel que $f(B) = 1$.
♦ (Th) Soient B et B ' deux bases de E. Alors $\text{dét}_{B'} = \text{dét}_{B'}(B) \,.\, \text{dét}_B$.
♦ (Th) Soit B une base de E et $(x_1, ..., x_n) \in E^n$. $(x_1, ..., x_n)$ est liée $\Leftrightarrow \text{dét}_B(x_1, ..., x_n) = 0$. [d]

II Déterminant d'un endomorphisme

♦ dim E = n. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Soit $f \in \mathscr{A}_n(E) \setminus \{0\}$ et $g : (x_1, ..., x_n) \in E^n \to f(u(x_1), ..., u(x_n)) \in \mathbf{K} \in \mathscr{A}_n(E)$.
$\exists\, ! \lambda \in \mathbf{K}, g = \lambda f$.On pose $\lambda = \text{dét}(u)$. Ca ne dépend pas de f (si on prend 2f, on aura 2g).
En fait, si $B = (e_1, ..., e_n)$, on a : $\text{dét}(u) = \text{dét}_B(u(e_1), ..., u(e_n))$.
♦ (Th) dét Id = 1. $\forall (u, v) \in \mathscr{L}(E)^2, \text{dét}(u \circ v) = \text{dét}(u)\, \text{dét}(v)$
♦ (Th) Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. $\text{dét}(u) \neq 0 \Leftrightarrow u \in GL(E)$. [demo]
(Ex) Soit u endomorphisme d'un $\mathbb{C}$ ev. Alors $\text{dét}_{\mathbb{R}}(u) = |\text{dét}_{\mathbb{C}}(u)|^2$ [exo 8 feuille 5]

III Déterminant d'une matrice

♦ Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. (Déf) $\text{dét}(M) = \Sigma_{\sigma \in Sn}\, \varepsilon_\sigma\, \Pi\, m_{i\,\sigma(i)}$.
♦ (Th) Soit B base de E. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Alors $\text{dét}(u) = \text{dét}(\text{Mat}(u, B))$. [d]
♦ (Th) dét $I_n = 1$. $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})^2, \text{dét}(AB) = \text{dét}(A)\, \text{dét}(B)$.
♦ (Th) $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}), A \in GL_n(\mathbf{K}) \Leftrightarrow \text{dét}(A) \neq 0$.
♦ Opérations sur un déterminant :
- Transvection : $\Delta' = \Delta$ car alterné
- Permutation : $\Delta' = -\Delta$ car antisymétrique
- Dilatation : $\Delta' = \lambda\, \Delta$ car n-linéaire

Rem : Soit $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ et B base canonique de E. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}), M = [\, C_1 \ldots C_n\,]$ Alors $\text{dét}(M) = \text{dét}_B(C_1 \ldots C_n)$.
dét est alors n–linéaire alternée sur E. (pas sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$).
♦ (Ex) Soit $(f_{i\,j})$ une famille de fonctions dérivables de I dans $\mathbb{R}$.
Soit $D : x \in \mathbb{R} \to \text{dét}([f_{i\,j}(x)]) \in \mathbb{R}$. D est alors dérivable et
$\forall x \in \mathbb{R}, D'(x) = \Sigma\, \text{dét}(C_1(x), ..., C_{i-1}(x), C'_i(x), C_{i+1}(x), ..., C_n(x))$. [demo calculs]

IV Développement d'un déterminant

(Déf) Mineur d'une matrice = déterminant d'une matrice extraite.
(Déf) Cofacteur de M : $C_{i\,j} = (-1)^{i+j} D_{i\,j}$ où $D_{i\,j}$ est le dét. de la matrice M en enlevant la ligne i et la colonne j.
(Déf) Comatrice de M : com M = $[C_{i\,j}]$
(Déf) Matrice complémentaire de M : $\tilde{M} = {}^t\text{com}\, M$
♦ (Th) Déterminant par blocs. Soit M triangulaire supérieure par blocs $\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}$. Alors $\text{dét}(M) = \text{dét}(A)\, \text{dét}(C)$.
[demo : si dét A ≠ 0, on annule B puis on bidouille une application]
♦ Développement d'un déterminant par rapport à une colonne : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. $\text{dét}(M) = \Sigma\, C_{i\,j}\, m_{i\,j}$. [évident]
♦ (Th) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Alors $\tilde{M}\, M = M\, \tilde{M} = \text{dét}(M)\, I_n$. [demo]
♦ Si $\text{dét}(M) \neq 0$, alors M est inversible et $M^{-1} = \dfrac{\tilde{M}}{\text{dét}\, M}$.
Ex : pour $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{K}), M^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$
♦ Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. $M^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}) \Leftrightarrow \text{dét}(M) \in \{-1, 1\}$. [demo]
Généralisation : pour tout sous-anneau A de $\mathbb{C}$, soit $M \in \mathcal{M}_n(A)$. $M^{-1} \in \mathcal{M}_n(A) \Leftrightarrow \text{dét}(M) \in A^*$.

V Quelques applications du déterminant

♦ Orientation de l'espace $\mathbb{R}^n$. On dit que B $\mathfrak{R}$ B ' si $\text{dét}_B(B') > 0$. C'est une relation d'équivalence sur l'ensemble des bases. Il y a 2 classes d'équivalence.
♦ Formules de Cramer : Soit $A \in GL_n(\mathbf{K}), B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$. L'unique solution de A X = B est telle que
$\forall j \in \mathbb{N}_n, x_j = \text{dét}(A_1, ..., A_{j-1}, B, A_{j+1}, ..., A_n) \,/\, \text{dét}\, A$. [demo rapide !]
♦ Soit X un ensemble. $E = \mathscr{F}(X, \mathbf{K})$. Soit $(f_1, ..., f_n) \in E^n$ libre. Alors $\exists\, (x_1, ..., x_n) \in X^n$; $\text{dét}([f_i(x_j)]) \neq 0$ (Ex) [réc]

♦ Déterminant de Van der Monde. $D = \text{dét}([a_{i-1}^{\,j-1}])$
 ∗ $D \neq 0 \Leftrightarrow (a_0, ..., a_n)$ distincts. [demo supp D = 0 et colonnes liées]
 ∗ $D = \Pi_{j>i}\,(a_j - a_i)$. [demo réc]

☠ Soit $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$. $AC = CA \Rightarrow \text{dét}(M) = \text{dét}(AD - BC)$. [exo 12 feuille 5]

VII Propriétés de la comatrice (Ex)

♦ Déterminant : $\text{dét com } M = (\text{dét } M)^{n-1}$. [3 cas]
♦ Rang : ∗ $\text{rg } M = n \Rightarrow \text{rg com } M = n$
 ∗ $\text{rg } M = n - 1 \Rightarrow \text{rg com } M = 1$
 ∗ $\text{rg } M \leq n - 2 \Rightarrow \text{rg com } M = 0$
♦ $\forall\, (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})^2$, com AB = com A com B. (on suppose **K** infini) [demo 2 cas]

VIII Exercice utile pour les équations différentielles

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit B base de E. Alors
 $\forall\, (x_1, ..., x_n) \in E^n$, $\text{dét}_B(u(x_1), x_2, ..., x_n) + ... + \text{dét}_B(x_1, ..., x_{n-1}, u(x_n)) = \text{Tr } u\ \text{dét}_B(x_1, ..., x_n)$.
 [demo pas con]

IX Résultant (Ex)

Soient $P, Q \in \mathbf{K}[X]$ non constants.
$P = a_0 + ... + a_pX^p$ avec $a_p \neq 0$ et $p \geq 1$.
$Q = b_0 + ... + b_qXq$ avec $b_q \neq 0$ et $q \geq 1$.

• $P \wedge Q \neq 1 \Leftrightarrow \exists\, (A, B) \in \mathbf{K}[X] \setminus \{0\}^{\,2}$, $\begin{cases} AP = BQ \\ d°A < d°Q \\ d°B < d°P \end{cases}$ [demo]

• $P \wedge Q \neq 1 \Leftrightarrow (P, XP, ..., X^{q-1}P, Q, XQ, ..., X^{p-1}Q)$ est liée

• Résultant : $\text{Res}(P, Q) = \begin{vmatrix} a_0 & \cdots & \cdots & a_p & 0 \\ 0 & a_0 & \cdots & \cdots & a_p \\ b_0 & \cdots & b_q & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & \cdots & b_q \end{vmatrix}$ par définition. C'est un déterminant d'ordre p + q.

On a $P \wedge Q \neq 1 \Leftrightarrow \text{Res}(P, Q) = 0$.
Exemple : $P = aX^2 + bX + c$. $\text{Res}(P, P') = -a\,(b^2 - 4ac)$.

X Déterminant de Cauchy (Ex)

Soient $(a_1, ..., a_n)$ et $(b_1, ..., b_n) \in \mathbf{K}^n$ tels que $\forall\, (i, j) \in \mathbb{N}_n^{\,2}$, $a_i + b_j \neq 0$.
$D = \text{dét}([\ 1 / a_i + b_j\ ])$. Bref, $D = \Pi_{i<j}(a_j - a_i)(b_j - b_i) \ / \ \Pi_{i,j}\,(a_i + b_j)$.
 [démo par récurrence lourde avec $C_i \leftarrow C_i - C_n$ et $L_i \leftarrow L_i - L_n$]

XI Exercice

Calcul de $D = \begin{vmatrix} x_1 & b & \cdots & b \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a & \cdots & a & x_n \end{vmatrix}$

Soit $P = \text{Dét}(M + XU)$ où $U = \Sigma\, E_{i\,j}$.
On cherche P(0) et on connaît P(–a) et P(–b). On remarque que $d°P \leq 1$.
∗ Si $a \neq b$, $D = (b\,\Pi(x_i - a) - a\,\Pi(x_i - b))/(b - a)$.
∗ Si $a = b$, $D = (-\,a\,\Sigma_j\,\Pi_{i\neq j}\,(x_i - a) + \Pi(x_i - a))$.

ELEMENTS PROPRES

25 – Endomorphismes

I Sous espaces vectoriels stables

• (Déf) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. E' un sev de E. On dit que E' est stable par u si $u(E') \subset E'$. Dans ce cas, on appelle endomorphisme de E' induit par u l'application $u' : x \in E' \to u(x) \in E'$.

❍ (Th) Soit $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que $u \circ v = v \circ u$. Alors Ker u et Im u sont stables par v.

• Matrice associée : on suppose E de dimension finie et E' un sev stable par u. Soit $(e_1, ..., e_r)$ une base de E' completée en $B = (e_1, ..., e_n)$ base de E. Alors $\text{Mat}(u, B) = \begin{bmatrix} A & * \\ 0 & * \end{bmatrix}$ où $A = \text{Mat}(u', (e_1, ..., e_r))$ et u' endom. induit.

• Si E est somme directe de sevs stables par $u \in \mathcal{L}(E)$: $E = E_1 \oplus E_2 \oplus ... \oplus E_q$. Soient $B_1, ..., B_q$ bases de $E_1, ..., E_q$. Soit B la concaténation des (B_i). Alors Mat(u, B) est diagonale par blocs, et chaque bloc est la matrice de l'endomorphisme induit par u sur E_i.

Rem : Soit $B = (e_1, ..., e_n)$ case de E. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Mat(u, B) est diagonale $\Leftrightarrow$ les droites $\mathbf{K}e_j$ sont stables par u.

• (Déf) On suppose dim E = n. On dit que $(E_0, ..., E_n)$ est un drapeau de sev si

$*$ $\forall j \in \{0, ..., n\}$, $\dim E_j = j$.

$*$ $\forall j \in \{0, ..., n-1\}$, $E_j \subset E_{j+1}$. (+ définition d'une base adaptée à un drapeau...)

Rem : Soit B adaptée au drapeau $(E_1, ..., E_n)$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors

Mat(u, B) est triangulaire supérieure $\Leftrightarrow$ les sevs $E_1, ..., E_n$ sont stables par u.

• (Ex) Soit $M \in GL_n(\mathbf{K})$ triangulaire supérieure. Alors M^{-1} est triangulaire supérieure.

[4 demos : prec th ; app $X \to MX$; $M^{-1} \in \mathbf{K}[M]$; cofacteurs]

II Polynôme d'un endomorphisme

• Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, où E est un $\mathbf{K}$ – ev. Soit $\varphi : P \in \mathbf{K}[X] \to P(u) \in \mathcal{L}(E)$. C'est un morphisme d'algèbre.

Im φ est noté $\mathbf{K}[u]$: c'est la sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ engendrée par $\{u^k, k \in \mathbb{N}\}$, appelée algèbre des polynômes en u. Elle est commutative. Ker φ est appelé idéal des polynômes annulateurs de u ($\mathbf{K}[X]$ est principal).

Rem : A principal n'implique pas A[X] principal (contrexemple avec $\mathbb{Z}$)

Rem : Soit $P \in \mathbf{K}[X]$. Alors Ker P(u) et Im P(u) sont stables par u (car u commute avec P(u)).

• (Th) Si E est de dimension finie, il existe des polynômes annulateurs : Ker $\varphi \neq \{0\}$.

• Si Ker $\varphi \neq \{0\}$, Ker φ possède un unique générateur unitaire noté π_u appelé polynôme minimal de u.

Si dim E = n, π_u existe et $d°\pi_u \leq n^2$.

❍ (Th) Théorème de décomposition des noyaux : Soient $u \in \mathcal{L}(E)$, P et $Q \in \mathbf{K}[X]$ tels que $P \wedge Q = 1$.

Alors $\text{Ker}\,(PQ)(u) = \text{Ker}\,P(u) \oplus \text{Ker}\,Q(u)$. [DEMO en utilisant Bezout]

Généralisation : Si $P_1, ..., P_q$ sont premiers entre eux 2 à 2, alors :

$$\text{Ker}\left(\prod_{j=1}^{q} P_j\right)(u) = \bigoplus_{j=1}^{q} \text{Ker}\,P_j(u)$$ [demo par récurrence sur q]

Exemples avec des projecteurs et des symétries...

III Théorème de factorisation (Ex)

E est de dimension finie n.

• Soit F sev de E de dim q. Soit $K_F = \{ u \in \mathcal{L}(E) \ / \ F \subset \text{Ker}\,u \}$. Alors $\dim K_F = n(n-q)$.

• Soient u et $w \in \mathcal{L}(E)$.

$\exists v \in \mathcal{L}(E), v \circ u = w \Leftrightarrow \text{Ker}\,u \subset \text{Ker}\,w$.

[2 d]

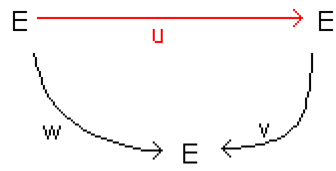
$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, bend right, "w"'] & & E \arrow[dl, bend left, "v"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

demo constructive

demo $\{ w \in \mathcal{L}(E) \ / \ \text{Ker}\,u \subset \text{Ker}\,w \} = \{ v \circ u \ / \ v \in \mathcal{L}(E) \}$ avec $\bullet_1$.

• Soient v et w $\in \mathcal{L}(E)$.

$\exists\, u \in \mathcal{L}(E), v \circ u = w \Leftrightarrow \mathrm{Im}\, w \subset \mathrm{Im}\, v$ [de même]



26 – Eléments propres

I Cas d'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$

♦ (Déf) Soit $x \in E \setminus \{0\}$. On dit que x est un vecteur propre de u si $\exists\, \lambda \in \mathbf{K}$, $u(x) = \lambda x$.
Rem : x est un vecteur propre $\Leftrightarrow$ x est une base d'une droite stable par u.
(Déf) Soit $\lambda \in \mathbf{K}$. On dit que λ est valeur propre de u si $\exists\, x \in E \setminus \{0\}, u(x) = \lambda x$.
(Déf) Soit $\lambda \in \mathbf{K}$. $E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}(u - \lambda\, \mathrm{Id})$ est appelé sev propre de u.
Rem : $E_\lambda(u) \neq \{0\} \Leftrightarrow \lambda$ est une valeur propre.
♦ Si E est de dimension finie : Soit $\lambda \in \mathbf{K}$. λ est une valeur propre $\Leftrightarrow$ dét$(u - \lambda\, \mathrm{Id}) = 0$.
L'ensemble des valeurs propres est appelé spectre de u, noté Sp(u).
❍ (Th) Soient u et v $\in \mathcal{L}(E)$. $v \circ u = u \circ v \Rightarrow \forall\, \lambda \in \mathbf{K}$, $E_\lambda(u)$ stable par v. [d]
♦ (Th) Soient $u \in \mathcal{L}(E)$, et $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ des valeurs propres distinctes de u. Alors la somme des sev propres $E_{\lambda i}$ est directe.
[demo avec le th de décomp noyaux]
♦ (Th) Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre. [demo avec préc th]
♦ (Ex) Soient $f_\lambda : x \in \mathbb{R} \to e^{\lambda x} \in \mathbb{C}$. La famille $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{C}}$ est libre. [utilisation de la dérivée D]
Soient $g_n : x \in \mathbb{R} \to \cos nx \in \mathbb{R}$. La famille $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est libre. [utilisation de D^2]
♦ (Th) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, et λ une valeur propre de u. Soit $P \in \mathbf{K}[X]$. Alors $P(\lambda)$ est valeur propre de $P(u)$. [d]
c'est-à-dire $P(\mathrm{Sp}(u)) \subset \mathrm{Sp}(P(u))$.
♦ (Th) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, et λ une valeur propre de u. Soit $P \in \mathbf{K}[X]$ tel que $P(u) = 0$. Alors $P(\lambda) = 0$. [découle de prec]
c'est-à-dire $P(u) = 0 \Rightarrow \mathrm{Sp}(u) \subset Z(P)$ ou encore $P(\mathrm{Sp}(u)) = \{0\}$.
Réciproque fausse : Dans $\mathbb{R}^2$, la rotation d'angle $\pi/2$.
Etude de quelques cas particuliers... Homothéties, projecteurs, symétries, affinités...
♦ Eléments propres d'un endomorphisme induit : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. E ' sev stable. $\forall\, \lambda \in \mathbf{K}$, $E_\lambda(u') = E_\lambda(u) \cap E'$.
Toute valeur propre de u ' est valeur propre de u.
Les vecteurs propres de u ' sont les vecteurs propres de u qui sont dans E '.
♦ Eléments propres d'un conjugué. On suppose dim E finie. Soit $a \in GL(E)$.
Soit $\varphi : u \in \mathcal{L}(E) \to a\, u\, a^{-1} \in \mathcal{L}(E)$. C'est un morphisme d'algèbre.
Soit $u \in GL(E)$ et $v = a\, u\, a^{-1}$. Alors u et v ont les mêmes valeurs propres et $\forall\, \lambda \in \mathbf{K}$, $E_\lambda(v) = a\, E_\lambda(u)$ [demo]
♦ (Ex/Th) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Si tout vecteur non nul est vecteur propre de u, alors u est une homothétie. [d]
☠ (Ex) On suppose dim E finie. Alors le centre de $\mathcal{L}(E)$ est réduit à $\mathbf{K}$ Id. [demo]
Egalement, $Z(GL(E)) = \mathbf{K}$ Id.
☠ (Ex) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que π_u existe. Alors les racines de π_u sont les valeurs propres de u. [demo]
c'est-à-dire : $\mathrm{Sp}(u) = Z(\pi_u)$

II Cas d'une matrice

♦ Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Soit B la base canonique de $\mathbf{K}^n$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que Mat(u, B) = M.
(Déf) Sp(M) = Sp(u). Les vecteurs propres de M sont les vecteurs propres de u.
$\mathrm{Sp}(M) = \{ \lambda \in \mathbf{K}, \text{dét}(M - \lambda\, I_n) = 0 \}$
♦ Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(M) \subset \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$.
Exemple : rotation d'angle $\pi/2$: $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(M) = \varnothing$; $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M) = \{ -i, i \}$.
☠ (Ex) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose $\forall\, i \in \mathbb{N}_n$, $|a_{i\,i}| > \Sigma_{j \neq i} |a_{i\,j}|$ (M est alors appelée diagonale dominante).
Alors dét$(M) \neq 0$. [demo]
Application : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $r_i = \Sigma_{j \neq i} |m_{i\,j}|$. Alors $\mathrm{Sp}(M) \subset \cup\, \bar{D}(m_{i\,i}, r_i)$ (disques fermés)
♦ Exemple de recherche de sev stable par une matrice qcq.
Rem : Soit H un hyperplan d'équation ${}^tC\, X = 0$.
H est stable par M $\Leftrightarrow \forall\, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tCX = 0 \Rightarrow {}^tCMX = 0$
$\Leftrightarrow P \subset \{ X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \ /\ {}^tCMX = 0 \}$ $\Leftrightarrow ({}^tCM, {}^tC)$ liée
$\Leftrightarrow$ C vecteur propre de ${}^tM$

III Matrices semblables

♦ (Th) Soit $P \in GL_n(\mathbf{K})$. Alors $\varphi : A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \to P A P^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est un morphisme d'algèbre appelé automorphisme intérieur.

♦ Soient X et $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. X et Y sont dites semblables si $\exists\, P \in GL_n(\mathbf{K})$, $Y = P X P^{-1}$.

(Th) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. B et B ' deux bases. Alors Mat(u, B) et Mat(u, B ') sont semblables. Inversement, soient X et Y $\in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ semblables. Alors il existe $u \in \mathcal{L}(\mathbf{K}^n)$, B et B ' bases telles que X = Mat(u, B) et Y = Mat(u, B ').

♦ (Th) Soient M et M ' $\in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ semblables. Alors M et M ' ont même trace, déterminant, rang, spectre. [~d endo]

Ex : Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, I_2 et $I_2 + E_{12}$ ont même dét., rang, trace, spectre mais ne sont pas semblables.

Rem : A et B semblables $\Rightarrow \pi_A = \pi_B$. [2 d]

♦ (Ex) Si $ab \neq 0$, alors $I_2 + a\,E_{12}$ et $I_2 + b\,E_{12}$ sont semblables. [d]

♦ (Ex) En dimension 2, M et ${}^tM$ sont semblables. [~~] En fait c'est vrai quelque soit la dimension...

♦ (Ex) Soit A et B $\in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $P \in GL_n(\mathbb{C})$. On suppose $B = P A P^{-1}$. Alors A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. [demo]

☠ (Ex) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Tr M = 0 $\Rightarrow$ M est semblable à une matrice à diagonale nulle. [récurrence ∗∗]

27 – Polynôme caractéristique

Soit E un **K** espace vectoriel de dimension finie.

I Généralités

♦ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On appelle polynôme caractéristique de A le polynôme $\chi_A = \text{dét}(A - X\, I_n)$.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit B une base de E. Alors on pose $\chi_u = \chi_{\text{Mat}(u,B)}$. [indep base...]

On constate que $\chi_A = (-1)^n\,(X^n - \text{Tr}\,A\,X^{n-1} + \ldots + (-1)^n\,\text{dét}\,A) = \Pi(a_{ii} - X) + Q$ avec $d^\circ Q \leq n - 2$.

Ex : en dimension 2, $\chi_M = X^2 - \text{Tr}\,M\,X + \text{dét}\,M$.

♦ (Th) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. $\text{Sp}(A) = Z(\chi_A) = \{\, x \in \mathbf{K} \,/\, \chi_A(x) = 0 \,\}$ [demo déf]

(Déf) L'ordre de multiplicité d'une valeur propre est la multiplicité de la racine λ dans χ_A.

(Ex) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et λ valeur propre de multiplicité m. Alors $\dim E_\lambda(u) \leq m$. [demo blocs]

Il n'y a pas toujours égalité : dans $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$, $A = I_2 + E_{12}$ vérifie $m_1 = 2$ et $E_1(A) = 1$.

(Ex) Si $E \neq \{0\}$ $\mathbb{C}$ ev de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$, alors $\text{Sp}(u) \neq \varnothing$.

(Ex) Si E est un $\mathbb{R}$ ev de dimension finie n impaire alors $\text{Sp}(u) \neq \varnothing$.

♦ Cas particuliers :

- ∗ Si $M \in T_n(\mathbf{K})$ c'est-à-dire M triangulaire supérieure, $\chi_M = \Pi\,(\lambda_i - X)$.
- ∗ Soit F sev de E stable par u. Alors $\chi_{u'} \mid \chi_u$, où u ' est l'endomorphisme induit par u. [demo base adaptée]
- ∗ Si $E = E_1 \oplus \ldots \oplus E_q$ et tous les E_j stables par u. Soit $u_j \in \mathcal{L}(E_j)$ l'endomorphisme induit. Alors $\chi_u = \Pi\,\chi_{u_j}$.

☠ (Ex) Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$. Alors $\chi_{u \circ v} = \chi_{v \circ u}$. [demo B B ' J_r]

♦ (Ex) Matrices compagnons : $A = \begin{bmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$. Alors $\chi_A = (-1)^n\,(\,a_0 + a_1\,X + \ldots + a_{n-1}\,X^{n-1} + X^n\,)$

Conséquence : tout polynôme de degré n, de coefficient dominant $(-1)^n$ est polynôme caractéristique d'une matrice d'ordre n.

II Endomorphismes trigonalisables

♦ Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est trigonalisable s'il existe B telle que $\text{Mat}(u, B) \in T_n(\mathbf{K})$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On dit que A est trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

(Th) Soit B base de E et $u \in \mathcal{L}(E)$. u trigonalisable $\Leftrightarrow$ Mat(u, B) trigonalisable.

❍ <u>Théorème de Cayley – Hamilton</u> : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors $\pi_u \mid \chi_u$, c'est-à-dire $\chi_u(u) = 0$.

[demo ∗∗ au cas où u trigonalisable : on montre que $(u - \lambda_k)(E_k) \subset E_{k-1}$ + fausse démo]

❍ (Th) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. u est trigonalisable $\Leftrightarrow$ u annule un polynôme non nul scindé. [réc ∗∗]

Lemme : Soit $P = \Pi(X - a_i)$ tel que $P(u) = 0$. Alors u possède une valeur propre.

♦ (Th) Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable. [$\pi_M \in \mathbb{C}[X]$ est scindé]

♦ Démonstration du théorème de Cayley – Hamilton :

demo₁ : Si **K** sous corps de $\mathbb{C}$...

demo₂ : Utilisation de ${}^t\text{com}\,A$. On montre au passage que ${}^t\text{com}\,A$ est un polynôme en A.

☠ (Ex) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $P \in \mathbb{C}[X]$. Alors $Sp(P(A)) = P(Sp(A))$. [demo pour $A \in T_n(\mathbb{C})$, s'y ramener sinon]
♦ (Ex) Soit E un $\mathbb{R}$ ev de dim finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors il existe une droite ou un plan stable par u. [demo]
☠ (Ex) Soit E un $\mathbb{C}$ ev de dim finie. Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'endomorphismes de E commutant 2 à 2. Alors il existe un vecteur propre commun. [demo réc sur n ∗∗]

28 – (Ex) Sevs caractéristiques

♦ (Th?Ex) Soit E un **K** ev de dim finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent. Alors il existe une base B de E telle que

$$\mathrm{Mat}(u, B) = \begin{bmatrix} 0 & & * \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$ [demo rapide !]

(Ex) Le produit de n nilpotents qui commutent 2 à 2 est nul. [exo 7 feuille 4]
(Ex) Soit E un $\mathbb{C}$ ev de dimension finie. Alors $u \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent $\Leftrightarrow Sp\, u = \{0\}$. [faux sur $\mathbb{R}$]
♦ Soit E un $\mathbb{C}$ ev de dimension finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. $\chi_u = \Pi\, (X - \lambda_j)^{\alpha_j}$.
$Z(\chi_u) = \{ \lambda_1, ..., \lambda_q \} = Sp(u)$. Th. de décomp. des noyaux : $E = \oplus \mathrm{Ker}((u - \lambda_j\, Id)^{\alpha_j})$
$\mathrm{Ker}((u - \lambda_j\, Id)^{\alpha_j})$ sont appelés <u>sevs caractéristiques</u>. Ils sont stables par u.
Il existe une base B de E telle que Mat(u, B) soit diagonale par blocs, où chaque bloc est triangulaire supérieur.
♦ Application : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que $\forall \lambda \in Sp(M)$, $|\lambda| < 1$. Alors $\lim M^k = 0$. [demo avec lemme]
Lemme : Soient $j \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in]-1, 1[$. Alors $\lim \lambda^k C_k^j = 0$.

29 – Endomorphismes diagonalisables

E est un **K** ev de dimension finie.

I Généralités

(Déf) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est diagonalisable si $E = \Sigma\, E_\lambda$ (somme des sevs propres)
❍ (Th) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. u diagonalisable ⇔ E possède une base de vecteurs propres ⇔ ∃ B, Mat(u, B) diagonale.
Soit u diagonalisable, et $E_1, ..., E_q$ ses sevs propres. $E = E_1 \oplus ... \oplus E_q$. Soient $p_1, ..., p_q$ les projecteurs associés.
Alors $\Sigma\, p_j = Id$; $\Sigma\, \lambda_j\, p_j = u$; $i \neq j \Rightarrow p_i \circ p_j = 0$.
(Ex) $p_1, ..., p_q \in \mathbf{K}[u]$. [demo Lagrange]
(Déf) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On dit que M est diagonalisable si M est semblable à une matrice diagonale.
Rem : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et B base. Alors u diagonalisable ⇔ Mat(u, B) diagonalisable.
• (Th) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. u diagonalisable $\Leftrightarrow \Sigma \dim E_\lambda = \dim E$.
Ex : $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ diagonalisable $\Leftrightarrow \lambda_1 \neq \lambda_2$.
• (Th) χ_u SARS (scindé à racines simples) ⇒ u diagonalisable. [d]
❍ (Th) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. u diagonalisable ⇔ il existe $P \neq 0$ SARS tel que $P(u) = 0$. [demo ⇔ TDN]
• (Th) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable. Soit E ' sev stable par u. Soit u ' endomorphisme induit par u sur E '.
Alors u ' est diagonalisable [demo vite !]

II Exercices

• Soit u diagonalisable. $Sp(u) = \{\lambda_1, ..., \lambda_q\}$. Alors tout sev stable est somme de sev des $E_{\lambda i}$. [demo induits]
• Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. u diagonalisable ⇔ tout sev de E possède un supplémentaire stable. [demo ⇔]
• Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable. Soit $C(u) = \{ v \in \mathcal{L}(E) \,/\, v \circ u = u \circ v \}$: commutant de u
Alors : $v \in C(u) \Leftrightarrow$ tout sev propre de u est stable par v.
$\dim C(u) = \Sigma\, (\dim E_{\lambda i})^2 \geq n$
$\forall v \in C(u)$, la matrice de v dans une base bien choisie est diagonale par blocs.
Soit $B(u) = \{ w \in \mathcal{L}(E) \,/\, \forall v \in C(u), v \circ w = w \circ v \}$: bicommutant de u. Alors $B(u) = \mathbf{K}[u]$. [demos ∗]
☠ Réduction simultanée : Soit $(u_i)_{i \in I}$ famille d'endomorphismes diagonalisables commutant 2 à 2. Alors il existe une base commune de vecteurs propres. [demo réc ∗]
• Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $B = \begin{bmatrix} A & A \\ 0 & A \end{bmatrix}$ et $C = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbf{K})$. B diagonalisable ⇒ $A = 0$.
[2,5 démos : B et C commutent + calcul de B^k (2 variantes)]

III Exemples

• $M = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -4 & -1 \end{bmatrix}$ est diagonalisable, et dim $E_{-1}(M) = 1$.

• Matrices circulantes (dans $\mathbb{C}$). Soient $a_0, ..., a_{n-1} \in \mathbb{C}$.

Soit $M = \begin{bmatrix} a_0 & a_{n-1} & & a_1 \\ a_1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & & a_1 & a_0 \end{bmatrix}$. On montre que M est diagonalisable et ses valeurs propres sont $P(\omega^k)$, où $k \in \mathbb{N}_n$, $P = a_0 + a_1X + ... + a_{n-1}X^{n-1}$, et $\omega = e^{2i\pi/n}$. Pour cela, on utilise une matrice de scrolling J... On utilise des résultats sur les matrices compagnons.

• Matrice de Jacobi (dans $\mathbb{C}$)

Soit $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix}$

En notant $P_n = \chi_M$ où M est d'ordre n, on constate que $P_n = -X P_{n-1} - P_{n-2}$.
Soit $Q_n = (-1)^n P_n$, et u_n définie par $u_n = Q_n(t)$ où $t \in \mathbb{C}$. On suppose $t \in]-2, 2[$.
On montre que $u_n = \sin((n+1)\theta)/\sin(\theta)$ où $t = 2\cos\theta$ ($\theta \in]0, \pi[$).
On a ainsi trouvé n racines de Q_n or $d°Q_n = n$ donc on a trouvé toutes les racines de Q_n, c'est-à-dire de P_n, c'est-à-dire les valeurs propres de M :

$$x_k = 2\cos(k\pi/(n+1)),\ \text{où } k \in \mathbb{N}_n.$$

Rem : polynômes de Tchebytchev de 1e espèce : $P(t) = \cos(n \operatorname{Arccos}(t))$

polynômes de Tchebytchev de 2e espèce : $P(t) = \dfrac{\sin(\ (n+1) \operatorname{Arccos} t\ )}{\sin \operatorname{Arccos} t}$

• Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $B = \begin{bmatrix} 0 & 2A \\ -A & 3A \end{bmatrix}$. A diagonalisable $\Rightarrow$ B aussi. [étude de la matrice 22 associée]

• Soit $M = \begin{bmatrix} 0 & & a_1 \\ & & \vdots \\ a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Alors elle est diagonalisable toujours pour rg M = 1 ou 0.
Si rg M = 2, elle est diagonalisable si $\alpha \neq 0$ et $\Delta \neq 0$,
où $\alpha = \Sigma_1^{n-1} a_k^2$ et $\Delta = a_n^2 - 4\alpha$. [long]

IV Endomorphisme de translation (Ex)

• Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et $A \in E$. Soit $u : M \in E \to AM \in E$. u est appelé endomorphisme de translation (attention, ce n'est pas une translation de groupe). Alors u diagonalisable $\Leftrightarrow$ A diagonalisable. [2 démos : $\mathbf{K}[X]$ et dim E_λ]
De plus, Sp(u) = Sp(A).

• Soit $B \in E$ et $v : M \in E \to MB \in E$. Alors v diagonalisable $\Leftrightarrow$ B diagonalisable [pareil]
De plus, Sp(v) = Sp(B).

• Soient $A, B \in \mathcal{M}(\mathbf{K})$ diagonalisables, et $w : M \in E \to AMB \in E$. Alors w diagonalisable.
[demo avec préc + autre démo avec le conjugué + contrexemple de la réciproque]
De plus, Sp(w) = Sp(u) . Sp(v).

30 – (Ex) Calcul de A^n

♦ Récurrence. On calcule A^2, A^3, ... jusqu'à ce qu'on devine A^n. On montre alors le résultat par récurrence sur n.
♦ Somme de deux matrices simples qui commutent : formule du binôme.
♦ Changement de base. On rend diagonale la matrice dans une autre base.
♦ Division de X^n par un polynôme qui annule A (par exemple, π_A). $X^n = P\,Q + R$. $A^n = R(A)$. On trouve R grâce aux premières puissances de A (qui sont connues).
Ex : calcul des puissances de $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ et de $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

31 – (Ex) Etude locale des endomorphismes

I Cas Général

Soit E un **K** ev de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.
• Soit $x \in E$. L'intersection des sev stables par u contenant x est le plus petit sev stable contenant x. On le note E_x.
En fait, $E_x = \text{Vect}\ \{ u^k(x) \ / \ k \in \mathbb{N} \}$. Soit $I = \{ P \in \mathbf{K}[X] \ / \ P(u)(x) = 0 \}$ idéal non vide. χ_u et $\pi_u \in I$.
I possède un unique générateur unitaire, noté π_x. On note $q = d°\pi_x$. Alors $(x, u(x), ..., u^{q-1}(x))$ est une base de E_x. [d]
Et dim $E_x = d°\pi_x$.
• Soit $x \in E$. Soit $q = d°\pi_x$, et $B = (x, ..., u^{q-1}(x))$. Soit $u' \in \mathcal{L}(E_x)$ induit par u. Alors Mat(u', B) est une matrice compagnon [Cf 27 – I] et $\chi_{u'} = (-1)^p\,\pi_x$. On a : $\pi_x = \pi_{u'}$. [d]
• Autre démonstration de Cayley – Hamilton. [très rapide]
• On suppose **K** infini. Il existe $x \in E$ tel que $\pi_x = \pi_u$. [demo : $E = \cup \text{Ker}(\pi_{x_j}(u))$]

II Endomorphismes cycliques ou monogènes

• On dit que u est monogène si $\exists\ x \in E$, $E_x = E$. Dans ce cas, $E = \{ Q(u)(x) \ / \ Q \in \mathbf{K}[X] \}$
On a : u monogène $\Leftrightarrow \pi_u = (-1)^n\,\chi_u$.
• Si u monogène, $C(u) = \mathbf{K}[u]$. [demo facile]
• Soient u monogène et F sev stable par u. Soit $v \in \mathcal{L}(F)$ induit. Alors v est monogène. [demo avec idéaux de **K**[X]]
• Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable. Alors : u monogène $\Leftrightarrow$ le spectre est simple. [demo $\Leftrightarrow$]

32 – (Ex) Matrices stochastiques

♦ Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que M est stochastique si $\begin{cases} \forall\ (i, j) \in \mathbb{N}_n^{\,2},\ m_{i\,j} \geq 0 \\ \forall\ i \in \mathbb{N}_n,\ \Sigma_j\ m_{i\,j} = 1 \end{cases}$ (somme sur chaque ligne = 1)
On note $\mathcal{S}_t(n)$ l'ensemble des matrices stochastiques.
$\mathcal{S}_t(n)$ est stable pour la multiplication. [demo avec rem]
Rem : $M \in \mathcal{S}_t(n) \Leftrightarrow M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}_+)$ et $MU = U$, où $U = {}^t[\ 1\ 1\ ...\ 1\ ] \in \mathcal{M}_{n,\,1}(\mathbb{R})$.
On note $\forall\ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\rho(M) = \text{Max}\{\ |\lambda| \ / \ \lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(M)\ \}$
$\forall\ M \in \mathcal{S}_t(n)$, $\rho(M) \leq 1$. [demo $\leq$]
♦ Soit $M \in \mathcal{S}_t(n)$. Alors $\forall\ \lambda \in \text{Sp}(M)$, $|\lambda| < 1$ ou $\exists\ k \in \mathbb{N}^*$, $\lambda^k = 1$. [demo $\leq \leq \leq$ ***]
Ex : J (matrice de scroll) est stochastique.
♦ On dit que M est stochastique stricte si $M \in \mathcal{S}_t(n)$ et $\forall\ (i, j) \in \mathbb{N}_n^{\,2}$, $m_{i\,j} > 0$.
Soit M stochastique stricte. Soit $\lambda \in \text{Sp}(M)$. Alors $|\lambda| < 1$ ou $\lambda = 1$.
♦ Soit M stochastique stricte. Alors $\lambda = 1$ est valeur propre simple.
[demo que $\text{Ker}(M - I_n) = \mathbb{C}U$ et $\text{Ker}((M - I_n)^2) = \mathbb{C}U$. Noyaux itérés $\Rightarrow \text{Ker}((M - I_n)^k) = \mathbb{C}U$]
[utilisation de la formule : $\forall\ X \in \text{Ker}((M - I_n)^2)$, $M^k X = X + k\,t\,U$]
♦ Soit M stochastique stricte. Alors M^k converge, et sa limite est un projecteur sur $\mathbb{C}U$.
Lemme : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ de rang $n - 1$. Alors $\text{Im}\ A = \text{Ker}\ \widetilde{A}$.

PRODUIT SCALAIRE SUR UN EV REEL

33 – Espaces préhilbertiens

I Produit scalaire

• (Déf) Soit E un $\mathbb{R}$ ev et φ une FBSDP sur E. On dit que φ est un produit scalaire et que E est un ev préhilbertien réel.

• Inégalité de Cauchy Schwarz...

• Soit φ un produit scalaire sur E. On note $\|x\| = \sqrt{\varphi(x, x)}$.

(Déf) Soit E un $\mathbb{R}$ ev. $N \in \mathcal{F}(E, \mathbb{R}_+)$ est une norme si $\begin{cases} \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, N(\lambda x) = |\lambda| N(x) \\ \forall (x, y) \in E^2, N(x + y) \leq N(x) + N(y) \\ \forall x \in E,\ N(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \end{cases}$

Rem : Si N ne vérifie que les 2 premiers axiomes, N est appelée seminorme.

Rem : Il y a des normes dont le carré n'est pas une forme quadratique définie positive. Par exemple, la norme dans $\mathbb{R}^2$ définie par $\|(a,b)\| = |a| + |b|$ n'est pas associée à une forme polaire. [+]

• (Th) Si φ est un produit scalaire sur E, alors $x \to \sqrt{\varphi(x, x)}$ est une norme sur E. [d]

Rem : il y a égalité dans l'inégalité triangulaire $\Leftrightarrow x = 0$ ou $\exists \lambda \in \mathbb{R}_+, y = \lambda x$.

• Polarisation... Cf formes quadratiques.

II Orthogonalité

• (Déf) Soit E préhilbertien. Soit F sev de E. On note $F^\perp = F^\circ = \{ x \in E \ / \ \forall y \in F, <x|y> = 0 \}$.

C'est un sev, et $F \cap F^\perp = \{0\}$.

Rem : $F^\perp = \cap_{y \in F} \operatorname{Ker} \varphi_y$ où $\varphi_y : x \in E \to <x|y> \in \mathbb{R}$.

• (Déf) Soient F et G sevs de E. On dit que F et G sont des supplémentaires orthogonaux
si $E = F \oplus G$ et $\forall x \in F, \forall y \in G, <x|y> = 0$ (ou encore : $E = F \oplus G$ et $G \subset F^\perp$)

• (Déf) Soient F et G deux supplémentaires orthogonaux. Le projecteur de noyau G et d'image F est appelé projecteur orthogonal sur F.

Rem : il n'y en a pas toujours (si $E \neq F \oplus F^\perp$)

Généralisation : Si $E = \oplus F_j$, avec $\forall (i, j) \in \mathbb{N}_q^2, i \neq j \Rightarrow F_i \subset F_j^\perp$, on peut définir le projecteur sur F_i parallèlement à la sommme des autres.

(Ex) Dans $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$, où $<f|g> = \int_0^1 fg$, on pose $H = \{ f \in E \ / \ f(0) = 0 \}$. C'est un hyperplan. Et $H^\perp = \{0\}$.

III Sev de dimension finie

• (Déf) On dit que E est un ev euclidien si E est un $\mathbb{R}$ ev de dimension finie muni d'un produit scalaire.

• (Th) Tout ev euclidien possède une base orthonormée. [réc]

Rem : Soit E ev euclidien et $(e_1, ..., e_n)$ <u>BON</u>. Alors $\forall i \in \mathbb{N}_n, \forall x \in E, e_i^*(x) = <x|e_i>$ et $\forall i \in \mathbb{N}_n, e_i^* = \varphi_{ei}$.

❍ (Th) Soit E préhilbertien. Soit F sev de E de dimension finie. Alors F et $F^\perp$ sont supplémentaires. [d]

(Déf) Dans ce cas, on peut définir le projecteur orthogonal sur F : p_F projecteur d'image F et de noyau $F^\perp$.

Corollaire : Soit F sev de E de dimension finie . Alors dim F = codim $F^\perp$ et $F^{\perp\perp} = F$.

Rem : $F \subset F^{\perp\perp}$ est toujours vrai.

(Déf) Soit E préhilbertien. Soit $A \subset E$ non vide. On pose $d(x, A) = \operatorname{Inf}\{ \|x - y\| \ / \ y \in A \} = \operatorname{Inf}\{ d(x, y) \ / \ y \in A \}$

❍ (Th) Soit F sev de E de dimension finie. Soit $x \in E$. Alors $\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + d^2(x, F)$. [demo]

Inégalité de Bessel : Soit $(e_1, ..., e_n)$ <u>BON</u> de F. Soit $x \in E$. Alors $\|x\|^2 \geq \Sigma <e_j|x>^2$. [d]

• (Ex) Etude de $\operatorname{Inf}_{(a, b) \in \mathbb{R}^2} \{ \int_0^1 (\sin t - a - bt)^2 \, dt \}$

(Ex) Soit $n \geq 2$. $x_1, ..., x_n$ distincts et $y_1, ..., y_n$ réels quelconques. Etude de $\operatorname{Min}_{(a, b) \in \mathbb{R}^2} \{ \Sigma(ax_i + b - y_i)^2 \}$

IV Polynômes orthogonaux (Ex)

• Soit E un ev euclidien. Soit (E_i) un drapeau. Alors il existe $(e_1, ..., e_n)$ BON de E tq. $\forall i \leq n, (e_1, ..., e_n)$ BON de E_i.

Rem : il y a 2^n BON adaptées à un drapeau donné.

• (Déf) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $w \in C^0(I, \mathbb{R}_+^*)$. On pose $<P|Q> = \int_I P(t)\, Q(t)\, w(t)\, dt$.

C'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. Il existe une suite $(P_n) \in \mathbb{R}[X]^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, (P_0, ..., P_n)$ <u>BON</u> de $\mathbb{R}_n[X]$.

Rem : $\forall n \in \mathbb{N}, d^\circ P_n = n$.

(Ex) : I =] –1, 1 [et $w = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$. On vérifie que les polynômes de Tchebytchev de 1e espèce sont orthogonaux.
• (Ex) P_n possède n racines distinctes dans]a, b[[demo avec $Q = \Pi(X - a_k)$...]
• (Ex) Soit $n \geq 1$. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}$, le coefficient dominant de P_n est positif.
Alors $\exists (\alpha_n, \beta_n, \gamma_n) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_-^*$ telle que $P_{n+1} = \alpha_n X P_n + \beta_n P_n + \gamma_n P_{n-1}$. [demo direct]
Par exemple, pour les polynômes de Tchebytchev de 1e espèce : $\boxed{T_{n+1} = 2 X T_n - T_{n-1}}$. [utile]
• (Ex) Les racines de P_{n-1} séparent les racines de P_n. [demo récurrence sur n]

34 – Espaces vectoriels euclidiens

I Généralités

• Rappel : isomorphisme canonique entre E et E*...
• Soit B = $(e_1, ..., e_n)$ BON. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors $Tr(u) = \Sigma\langle e_k \mid u(e_k)\rangle$...
• (Ex) E = $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique. $\mathcal{S}_n(\mathbf{K})^{\perp} = \mathcal{A}_n(\mathbf{K})$
• (Ex) Soit E espace vectoriel euclidien de dimension n. Alors il n'existe pas $u_1, ..., u_{n+2}$ tels que
$\forall (i, j) \in \mathbb{N}_{n+2}^2, i \neq j \Rightarrow \langle u_i | u_j\rangle < 0$. [réc]
(Ex) Il existe $(e_1, ..., e_{n+1})$ unitaires tels que $\forall (i, j) \in \mathbb{N}_{n+1}^2, i \neq j \Rightarrow \langle u_i | u_j\rangle = -1/n$.
• (Th) Soit E ev euclidien. Soit n = dim E. Soit $(e_1, ..., e_k)$ une famille orthonormale. Alors on peut la compléter pour former une BON de E. [d]
• (Th) Soit E ev euclidien. Soit n = dim E. Alors il existe une isométrie entre E et $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique. [d]

II Adjoint d'un endomorphisme

Soit E un ev euclidien.
• (Déf) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $x \in E$. L'application $y \to \langle x | u(y)\rangle$ est une forme linéaire.
Donc $\exists ! z \in E, \forall y \in E, \langle x | u(y)\rangle = \langle z | x\rangle$. On note $u^*(x) = z$. u^* est appelé adjoint de u.
Rem : $\forall (x, y) \in E^2, \langle x | u(y)\rangle = \langle u^*(x) | y\rangle$
(Th) $u^* \in \mathcal{L}(E)$. [diy]
• (Th) Soit B BON de E. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors $Mat(u^*,B) = {}^t Mat(u,B)$. [demo]
• Soient u et $v \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

$(u^*)^* = u$	$Tr(u^*) = Tr(u)$
$(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$	$Dét(u^*) = Dét(u)$
$Ker\ u^* = (Im\ u)^{\perp}$	$\chi_{u^*} = \chi_u$
$Im\ u^* = (Ker\ u)^{\perp}$	$\pi_{u^*} = \pi_u$.
$Ker(u^* \circ u) = Ker\ u$	$rg(u^*) = rg(u)$

$\forall P \in \mathbf{K}[X], P(u^*) = P(u)^*$
L'application : $u \in \mathcal{L}(E) \to u^* \in \mathcal{L}(E)$ est linéaire.
• (Th) Soit F sev de E stable par u. Alors $F^{\perp}$ est stable par u^*. [d]

III Autoadjoint

• (Déf) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est autoadjoint (ou symétrique) si $u^* = u$.
Rem : Soit A : $u \in \mathcal{L}(E) \to u^* \in \mathcal{L}(E)$. L'ensemble des autoadjoints est $E_1(A)$.
L'ensemble des autoadjoints est noté $\mathcal{S}(E)$.
• (Th) Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. p est un projecteur orthogonal $\Leftrightarrow p = p^2 = p^*$ [demo $\Leftrightarrow$ rapide]
• (Ex) Soit $f \in \mathcal{F}(E, E)$ vérifiant $\forall (x, y) \in E^2, \langle f(x) | y\rangle = \langle x | f(y)\rangle$. (f est alors dite symétrique).
Alors f est un endomorphisme. [demo]
• (Déf) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est autoadjoint positif si $u = u^*$ et $\forall x \in E, \langle u(x) | x\rangle \geq 0$.
(Déf) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est autoadjoint défini positif si $u = u^*$ et $\forall x \in E \setminus \{0\}, \langle u(x) | x\rangle > 0$.
(Ex) Si $u \in \mathcal{L}(E)$, $u^* \circ u$ est autoadjoint positif. Si $u \in GL(E)$, $u^* \circ u$ est autoadjoint défini positif.

IV Déterminant de Gram (Ex)

Soit E ev euclidien de dimension n.

• Soit $(x_1, ..., x_p) \in E^p$. On note $G(x_1, ..., x_p) = \text{dét}([<x_i|x_j>])$.
Si la famille est liée, alors $G(x_1, ..., x_p) = 0$. Sinon, $G(x_1, ..., x_p) > 0$. [demo $\Rightarrow \Rightarrow$]
• Soit $(x_1, ..., x_p)$ une base d'un sev F de E. Soit $a \in E$. Alors $G(a, x_1, ..., x_p) = d^2(a, F)\, G(x_1, ..., x_p)$. [demo ^{t}PMP]
Remarque : Si $B = (x_1, ..., x_p)$ sont linéairement indépendants, G(B) = dét(Mat(produit scalaire, B)).

35 – Automorphismes orthogonaux

I Généralités

• (Th) Soit $u \in E^E$. u conserve le produit scalaire $\Leftrightarrow$ u linéaire et conserve la norme
$\Leftrightarrow u \in GL(E)$ et $u^* = u^{-1}$. [demo a $\Leftrightarrow$ b ; c : diy]
• (Th) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et B BON de E. $u \in O(E) \Leftrightarrow u(B)$ BON de E. [~d]
• (Déf) On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est un automorphisme orthogonal si u conserve le produit scalaire.
On note O(E) l'ensemble des automorphismes orthogonaux. $O(E) = \{ u \in \mathcal{L}(E) \ / \ u \circ u^* = Id \}$
On définit $SO(E) = \{ u \in O(E) \ / \ \text{dét}(u) = 1 \} = O(E) \cap SL(E) \subset GL(E)$.
Rem : dét u = 1 n'implique pas $u \in O(E)$.
Rem : en dimension 2, $u \in SL(E) \Leftrightarrow$ u conserve l'aire.
(Ex) Soit $u \in O(E)$. F sev stable par u. Alors $F^\perp$ stable par u. [d vite]

II Générateurs, Centre

• (Th) Soient a et $b \in E$ tels que $a \neq b$ et $\|a\| = \|b\| = 1$. Alors il existe une unique réflexion s telle que s(a) = b.
[existence unicité]
$s \in \mathcal{L}(E)$ est une réflexion si $s^2 = Id$, $\dim E_1(s) = n-1$ et $E = E_{-1}(s) \boxplus E_1(s)$.
$s \in \mathcal{L}(E)$ est une réflexion s'il existe une BON B telle que $\text{Mat}(s, B) = \text{diag}(1, ..., 1, -1)$.
Rem : soit e un vecteur unitaire associé à a – b. Alors $\forall x \in E$, $s(x) = x - <x|e>e$.
Rem : soient D et D' deux droites distinctes. Il y a exactement 2 réflexions s telles que s(D) = D'.
• (Th) Soit E ev euclidien de dim $n \geq 1$. Alors tout élément de O(E) est produit d'au plus n réflexions. [demo sup]
Rem : $\forall n \geq 3$, SO(E) est engendré par les demi-tours. [demo si n = 3 : $s \circ s' = (-s) \circ (-s')$]
$r \in \mathcal{L}(E)$ est un demi-tour si $\dim E_{-1}(r) = 2$, $\dim E_1(r) = n - 2$ et $E = E_{-1}(r) \boxplus E_1(r)$.
$r \in \mathcal{L}(E)$ est un demi-tour s'il existe une BON B telle que $\text{Mat}(r, B) = \text{diag}(-1, -1, 1, ..., 1)$.
• (Ex) $Z(O(E)) = \{ Id, -Id \}$. $n \geq 3 \Rightarrow Z(SO(E)) \subset \{ Id, -Id \}$. Si n = 2, SO(E) est abélien. [demos vite]

III Le groupe O(n)

• (Déf) On dit que $M \in O(n)$ si ${}^tM\,M = I_n$, c'est-à-dire si les colonnes de M constituent une BON de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
• (Th) Soit E eve de dimension n. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit B BON de E. Alors : $u \in O(E) \Leftrightarrow \text{Mat}(u, B) \in O(n)$.
• (Th) Soit $M \in O(n)$. Alors $\text{dét}(M) \in \{ -1, 1 \}$. [2 démos : matrices, et Π réflexions]

36 – Ev euclidiens orientés de dimension 3

I Produit vectoriel

• (Déf) Soit E un ev euclidien orienté de dimension 3. On définit le produit mixte : $(x, y, z) \in E^3 \to \det(x, y, z) \in \mathbb{R}$ comme le déterminant dans une BOND.
Soient $(x, y) \in E^2$. Soit $\varphi : t \in E \to \det(x, y, t) \in \mathbb{R}$. φ est une forme linéaire donc $\exists !\, z \in E, \forall t \in E, \varphi(t) = \langle z, t\rangle$.
On note $z = x \wedge y$. On a donc : $\forall (a, b, c) \in E^3, \langle a \wedge b \mid c\rangle = \det(a, b, c)$.
• L'application $B : (x, y) \in E^2 \to x \wedge y \in E$ est bilinéaire.
∗ $\forall (x, y) \in E^2, x \wedge y = - y \wedge x$.
∗ $x \wedge y = 0 \Leftrightarrow (x, y)$ liée
∗ (x, y) libre $\Rightarrow (x, y, x \wedge y)$ est une base directe. [d]
∗ $\forall (x, y, z) \in E^3, x \wedge (y \wedge z) = \langle x|z\rangle y - \langle x|y\rangle z$

II Endomorphismes antisymétriques

• (Déf) On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est antisymétrique si $u^* = -u$.
Rem : Soit B <u>BON</u>. Soit $M = \mathrm{Mat}(u, B)$. $u^* = -u \Leftrightarrow {}^tM = -M$.
L'ev des endomorphismes antisymétriques $\mathcal{A}(E)$ est de dimension $n(n - 1)/2$. Ici, $\dim \mathcal{A}(E) = 3$.
• Soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ <u>BOND</u>. Soit $a = p\, e_1 + q\, e_2 + r\, e_3 \in E$, et $u_a : x \in E \to a \wedge x \in E$.

$$\mathrm{Mat}(u, B) = \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix}$$

Donc l'application $a \in E \to u_a \in \mathcal{A}(E)$ est un isomorphisme.
On peut décrire tout élément de $\mathcal{A}(E)$ à l'aide du produit vectoriel.

III Etude de O(E)

• <u>Rotations</u> :
Soit $u \in SO(E) \setminus \{Id\}$. Alors $1 \in Sp(u)$. [demo $u = r_1 \circ r_2$]
Il existe une <u>BON</u> $B = (e_1, e_2, e_3)$ telle que $\mathrm{Mat}(u, B) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$. $\mathrm{Mat}\left(\frac{u - u^*}{2}, B\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & 0 \end{bmatrix}$

On a donc $\frac{u - u^*}{2} = u_{\sin\theta\, e_1}$ d'après II.
• (Ex). $M = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$.
$M \in O(3)$ évident. $C_3 = C_1 \wedge C_2$ donc $u \in SO(E)$. On trouve un vecteur de l'axe et l'angle.
Rem : $\sin\theta$ n'est pas défini de manière précise. L'orientation de l'espace n'induit pas d'orientation dans chaque plan, mais il permet de lier l'orientation des plan avec celle des droites orthogonales.
• Cas où $u \in O(E) \setminus SO(E)$. u est alors une rotation ∘ une réflexion.
• (Ex) Soient r et $r' \in SO(E) \setminus \{Id\}$. $r \circ r' = r' \circ r \Leftrightarrow$ r et r' ont le même axe ou ce sont des demi-tours d'axe orthogonaux.
• Trouver des informations à partir d'une matrice M
∗ Calculer ${}^tM\, M$ et $M\, {}^tM$
∗ Calculer le déterminant pour savoir s'il s'agit d'une rotation. Si c'en est pas, la composer par une réflexion.
∗ Trouver Sp M en résolvant $\det(M - \lambda X)$
∗ Résoudre $MX = \lambda X$
∗ $\mathrm{Tr}\, M = 1 + 2\cos\theta$.
∗ $\frac{M - {}^tM}{2}$ donne X et le $\sin\theta$.

37 – Réduction des autoadjoints

Soit E un ev euclidien.

I Réduction

• Rappels...
• (Déf) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On dit que M est symétrique positive si ${}^tM = M$ et $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXMX \geq 0$.
On dit que M est symétrique définie positive si ${}^tM = M$ et $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, ${}^tXMX > 0$.

❍ (Th) $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \mathbb{R}$. [demo $AX = \lambda A$ et utilisation de A^*]

❍ (Th) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. u autoadjoint $\Leftrightarrow$ E possède une BON constituée de vecteurs propres de u.
[demo $\Leftarrow$ direct $\Rightarrow$ récurrence sur dim E avec préc]

Application : Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Alors $\exists D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale, $\exists P \in O(n)$, $M = P^{-1} D P$. [demo]

• (Th) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ autoadjoint.
u est un autoadjoint positif $\Leftrightarrow \mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$.
u est un autoadjoint défini positif $\Leftrightarrow \mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*$. [~d]

II Lien avec les formes quadratiques

Soit E ev euclidien.
• Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ autoadjoint. Soit $f_u : (x, y) \in E \times E \to \langle u(x)|y\rangle \in \mathbb{R}$. $f_u \in \mathcal{B}(E)$.
Soit B BON de E. Alors $\mathrm{Mat}(u, B) = \mathrm{Mat}(f_u, B)$. [d]

Corollaire : L'application $u \in \mathcal{S}(E) \to f_u \in \mathcal{B}(E)$ est un isomorphisme.

❍ (Th) Soit E un $\mathbb{R}$ ev de dimension finie. Soit $q_1 \in \mathcal{Q}(E)$ définie positive et $q_2 \in \mathcal{Q}(E)$.
Alors il existe une base B qui est une BON pour q_1 et qui est orthogonale pour q_2. [demo préc]
Rem : Si q_1 et q_2 sont définies positives, et qu'il existe une BON commune, $q_1 = q_2$.

Application : soient A et $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. A définie positive $\Rightarrow \exists P \in GL_n(\mathbb{R})$, $\exists$ D diagonale, $A = {}^tP\,P$ et $B = {}^tP\,D\,P$.

• Application aux coniques. Soit E un plan vectoriel euclidien. Soit $q \in \mathcal{Q}(E) \setminus \{0\}$. Soit $f \in E^*$ et $C \in \mathbb{R}$.

Soit $\mathcal{C} = \{ x \in E \,/\, q(x) + f(x) = C \}$. On peut toujours trouver une base où q est somme de carrés.
Exemple sur $\mathbb{R}^2$: $x^2 + xy - y^2 + x + y = \alpha$ est une hyperbole équilatère.

• (Ex) Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétriques positives. Alors $\det(A + B) \geq \det(A) + \det(B)$.
[demo : si dét A = dét B = 0 emploi de J_r ; si dét A $\neq 0$ par exemple : A définie positive : prec]

III Décomposition polaire (Ex ☠)

• Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive. Alors $\exists !\, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, B symétrique définie positive et $B^2 = A$.
[demo existence unicité]

• Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive. Soit $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Alors AB diagonalisable. [prec]

• Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$. Alors $\exists !\, (S, O) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times O(n)$, S symétrique définie positive et $M = SO$.
[analogies avec $z = r\,e^{i\theta}$; demo unicité puis existence]

Généralisation : si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il n'y a pas toujours unicité. [idées existence]

IV Maximin (Ex)

• Soit E un ev euclidien. $u \in \mathcal{S}(E)$. Soient $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n$ ses valeurs propres.
Soit $S = \{ x \in E \,/\, \|x\| = 1 \}$. Soit q défini par $q(x) = \langle u(x)|x\rangle$.
Alors : $\forall k \in \mathbb{N}_n$, $\lambda_k = \min\limits_{\dim F = n-k+1} \max(q(F \cap S))$ [demo $\mathrm{Vect}\{e_k, \ldots, e_n\}$]

Autre formule : $\forall k \in \mathbb{N}_n$, $\lambda_k = \max\limits_{\dim F = k} \min(q(F \cap S))$

• Soit E ev euclidien. Soit $u \in \mathcal{S}(E)$. Soit $M = \mathrm{Mat}(u, B)$. Soit $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n$ son spectre.

Soit N la matrice de $\mathscr{S}_{n-1}(\mathbb{R})$ extraite de M, et $\mu_1 \geq \ldots \geq \mu_{n-1}$ son spectre. Alors :

$\lambda_1 \geq \mu_1 \geq \ldots \geq \lambda_k \geq \mu_k \geq \lambda_{k+1} \geq \ldots \geq \mu_{n-1} \geq \lambda_n$. [demo...]

38 – Quadriques d'un ev euclidien de dimension 3

Soit E un ev euclidien de dimension 3 (sur $\mathbb{R}$).

• Une quadrique est une surface dont l'équation se met sous la forme

$q(x) + f(x) = c$, où $q \in \mathcal{Q}(E) \setminus \{0\}$, $f \in E^*$, et $c \in E$.

Dans une BON, son équation est de la forme $a\,x^2 + b\,y^2 + c\,z^2 + 2\,d\,x\,y + 2\,e\,y\,z + 2\,f\,x\,z + g\,x + h\,y + i\,z + j = 0$.
On sait qu'il existe une BON qui est q – orthogonale. Dans cette base, l'équation est de la forme :

$a\,x^2 + b\,y^2 + c\,z^2 + g\,x + h\,y + i\,z + j = 0$. [$a + b + c$ ne change pas car $P \in O(n)$]

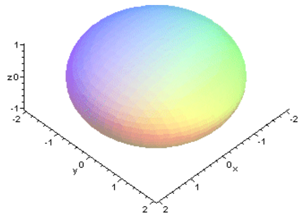
Par changement d'origine, on annule g si $a \neq 0$, on annule h si $b \neq 0$, et on annule i si $c \neq 0$.
Finalement, on obtient :

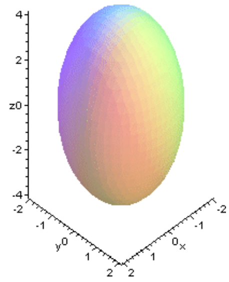
$a\,x^{i_1} + b\,y^{i_2} + c\,z^{i_3} + d = 0$, où $\{i_1, i_2, i_3\} \subset \{1, 2\}$.

• Ellipsoïde. $(s, t) = (3, 0)$. Elle est dite de révolution si $a = b$.

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ Paramétrage : $\begin{cases} x = a \cos u \\ y = b \sin u \cos v \\ z = c \sin u \sin v \end{cases}$

Sections planes : ellipses

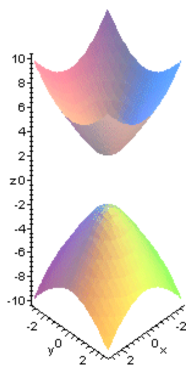




• Hyperboloïde à 2 nappes. $(s, t) = (2, 1)$.

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1$ Paramétrage H_+ : $\begin{cases} x = a \operatorname{sh} u \cos v \\ y = b \operatorname{sh} u \sin v \\ z = c \operatorname{ch} u \end{cases}$

Sections planes : n'importe quelle conique

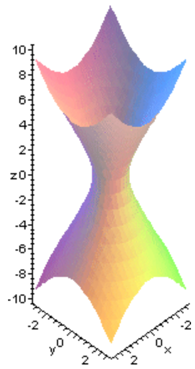


• Hyperboloïde à une nappe. $(s, t) = (2, 1)$.

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = +1$ Paramétrage : $\begin{cases} x = a \operatorname{ch} u \cos v \\ y = b \operatorname{ch} u \sin v \\ z = c \operatorname{sh} u \end{cases}$

Sections planes : n'importe quelle conique

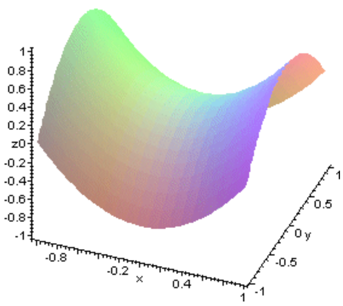
Une quadrique de ce type est engendrée par une famille de droites D_λ. Si $a = b$, l'hyperboloïde de révolution est obtenue par rotation d'une droite autour de Oz.



• Paraboloïde hyperbolique : $(s, t) = (1, 1)$

$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = z$

Sections planes : paraboles, hyperboles



Ex : L'ensemble $\mathcal{E}$ des points équidistants de 2 droites.

∗ Si elles sont parallèles, $\mathcal{E}$ est un plan.

∗ Si elles sont sécantes, $\mathcal{E}$ est la réunion de 2 plans.

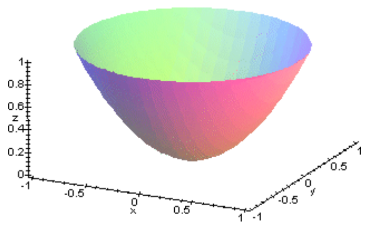
∗ Sinon, $\mathcal{E}$ est une paraboloïde hyperbolique.

Ex : $z = x\,y$ est un paraboloïde hyperbolique.

• Paraboloïde elliptique : $(s, t) = (2, 0)$

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = z$

Sections planes : paraboles, ellipses



• Cône.

Un cône de sommet A est une union de droites passant par A.

Un cône de sommet A est un ensemble stable par toute homothétie de centre A.
$\forall q \in \mathcal{Q}(E)$, $\{ x \in E \,/\, q(x) = 0 \}$ est un cône de sommet O si q est possède des vecteurs isotropes non nuls (ni définie positive ni définie négative). Ex : $z^2 = x\,y$ est un cône

• <u>Cylindre</u>
Un cylindre est une union de droites parallèles.
Un cylindre elliptique est d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
Un cylindre hyperbolique est d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.
Un cylindre parabolique est d'équation $x^2 = 2\,p\,y$.

• (Ex) Etudier $\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz = 1 \}$
C'est le cylindre de révolution de rayon $\sqrt{\frac{2}{3}}$ et d'axe $\mathbb{R}\,(1, 1, 1)$.

• Remarque : Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. $\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \varphi(x, y) = 0 \}$ est un cylindre de direction Oz.
Réciproque : L'équation de tout cylindre de direction D se met sous la forme $\varphi(P, Q) = 0$
où P et $Q \in E^*$, $\varphi \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, et $D = \operatorname{Ker} P \cap \operatorname{Ker} Q$.

PRODUIT SCALAIRE HERMITIEN

39 – Ev préhilbertiens complexes

• Soit E un $\mathbb{C}$ ev. On appelle produit scalaire sur E une forme sesquilinéaire hermitienne définie positive.
$\varphi \in \mathbb{C}^{E^2}$ est sesquilinéaire si $\forall a \in E$, $x \to \varphi(a, x)$ est linéaire et $\forall b \in E$, $x \to \varphi(x, b)$ est semilinéaire.
$\varphi \in \mathbb{C}^{E^2}$ est hermitienne si $\forall (x, y) \in E^2$, $\varphi(y, x) = \overline{\varphi(x, y)}$.
$u \in \mathbb{C}^E$ est semilinéaire si $\forall (x, y, a) \in E^2 \times \mathbb{C}$, $u(x + y) = u(x) + u(y)$ et $u(a\,x) = \bar{a}\,u(x)$
Ex : Sur $\mathbb{C}^n$, le produit scalaire canonique est $\langle x|y\rangle = \Sigma\, \bar{x}_i\, y_i$.
Sur $C^0([a, b], \mathbb{C})$, soit $w \in C^0([a, b], \mathbb{R}_+^*)$. On peut définir $\langle f|g\rangle = \int_a^b \bar{f}\, g\, w$.
• (Th) Inégalité de Cauchy – Schwarz : Soit φ produit scalaire hermitien sur E.
Alors $\forall (x, y) \in E^2$, $|\varphi(x, y)|^2 \leq \varphi(x, x)\, \varphi(y, y)$. [demo réel puis rotation $e^{i\theta}$]
Il y a égalité $\Leftrightarrow$ (x, y) est liée.
(Déf) Soit φ produit scalaire hermitien sur E. On note $\|x\| = \sqrt{\varphi(x, x)}$. C'est une norme sur E.
• Soit E préhilbertien. Soit $(x, y) \in E^2$. Alors :

$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x|y\rangle$
$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2 \operatorname{Re} \langle x|y\rangle$
$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ Identité du parallélogramme
$\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 = 4 \operatorname{Re} \langle x|y\rangle$
$4 \langle x|y\rangle = \sum_{\lambda \in \mathbf{U}_4} \lambda\, \|y + \lambda x\|^2$ [utilisation de $\sum_{\omega \in \mathbf{U}_n} \omega^k = 0 \Leftrightarrow k \notin n\mathbb{Z}$]

• (Déf) Soit E espace préhilbertien. Définition de l'orthogonalité de vecteurs, de parties de E. Définition de $F^\perp$, du projecteur orthogonal de F, des familles orthogonales, orthonormales.
Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.
Relation de Pythagore : Soit $(e_1, ..., e_n)$ une famille orthogonale. Alors $\|\Sigma\, e_i\|^2 = \Sigma \|e_i\|^2$.

40 – Ev hermitiens

I Généralités

• (Déf) Un ev hermitien est un $\mathbb{C}$ ev de dimension finie muni d'un produit scalaire.
• (Th) Soit E ev hermitien. Alors E possède une BON. [demo]
• Dualité : Soit E ev hermitien, et $x \in E$. On note $\varphi_x : y \in E \to \langle x|y\rangle \in \mathbb{C}$. $\varphi_x \in E^*$. Soit $u : x \in E \to \varphi_x \in E^*$.
u est semilinéaire. On définit $\bar{E}$ comme E, mais en changeant la loi externe : $a.x = \bar{a}\, x$. Sur $\bar{E}$, u est linéaire.
On vérifie que u est un isomorphisme de $\mathbb{C}$ ev entre $\bar{E}$ et E^*.
Conclusion : $\forall f \in E^*, \exists !\, x \in E, \forall y \in E, f(y) = \langle x|y\rangle$.

II Sev de dimension finie

• (Th) Soit F sev de E préhilbertien de dimension finie. Alors $E = F \oplus F^\perp$. On a également : $F^{\perp\perp} = F$, codim $F^\perp$ = dim F.
Soit $(e_1, ..., e_n)$ BON de F. Alors $\forall x \in E$, $p_F(x) = \Sigma \langle e_i|x\rangle\, e_i$.
• Distance de x à un sev : $\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + d^2(x, F)$.
• Inégalité de Bessel : Soit $(e_1, ..., e_n)$ famille orthonormale. Alors $\forall x \in E$, $\|x\|^2 \geq \Sigma |\langle e_i|x\rangle|^2$
• (Ex) Soit E le $\mathbb{C}$ ev des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ 2π périodiques.
On pose $\langle f|g\rangle = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}\, g$. Il s'agit d'un produit scalaire hermitien. On pose $e_k(t) = e^{i\,k\,t}$. $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est une famille orthonormale. Soit $F_n = \operatorname{Vect}\{e_{-n}, ..., e_n\}$. Soit $f \in E$. Soit $f_n = p_{F_n}(f)$. On a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, f_n(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\, \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)(t - u)\right)}{\sin\left(\frac{t - u}{2}\right)}\, du \qquad \text{[demo]}$$

La suite $d(f, F_n)$ est décroissante. [2 d]

41 – Endomorphismes hermitiens

Soit E ev hermitien.

• (Déf) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est autoadjoint, ou hermitien ($\rightleftharpoons$ symétrique pour $\mathbb{R}$) si

$$\forall (x, y) \in E^2, <u(x)|y> = <x|u(y)>.$$

(Déf) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On définit u^* par $\forall (x, y) \in E^2, <u(x)|y> = <x|u^*(y)>$.

(Th) Soit B BON de E. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors $\mathrm{Mat}(u^*, B) = {}^t\overline{\mathrm{Mat}(u, B)}$.

On note, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $A^* = {}^t\bar{A}$.

Propriétés : $(a\, u)^* = \bar{a}\, u^*$ $\quad$ $\det u^* = \overline{\det(u)}$.

❍ (Th) Soit u hermitien (c'est-à-dire $u = u^*$). Alors $\mathrm{Sp}\, u \subset \mathbb{R}$.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ hermitienne (c'est-à-dire $M = M^*$). Alors $\mathrm{Sp}\, M \subset \mathbb{R}$. [demo calculs]

Rem : $\{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ hermitiennes $\} = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus i\, \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. [+]

❍ (Th) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. $u = u^* \Leftrightarrow$ E possède une BON de vecteurs propres de u et $\mathrm{Sp}\, u \subset \mathbb{R}$. [demo rapide]

☠ (Ex) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. $u = u^* \Leftrightarrow \forall x \in E, <u(x)|x> \in \mathbb{R}$. [demo avec lemme]

Lemme : $\forall (u, v) \in \mathbb{C}^2, (\forall a \in \mathbb{C}, \bar{a}\, u + a\, \bar{v}) \Rightarrow u = v$.

Rem : sur un $\mathbb{R}$ ev, si f et g formes bilinéaires symétriques telles que $\forall x, f(x, x) = g(x, x)$, alors $f = g$.

• (Ex) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u = u^*$. Alors

$$\mathrm{Sp}\, u \subset \mathbb{R}_+ \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in E, <u(x)|x> \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists v \in \mathcal{L}(E), u = v^* \circ v.$$ [rapide]

42 – Groupe unitaire

Soit E un ev hermitien.

• (Déf) On dit que $u \in U(E)$ si $u \circ u^* = u^* \circ u = \mathrm{Id}$. On dit que $M \in U(n)$ si $M^*M = I_n$.

Soit B BON de E ev hermitien. Alors $u \in U(E) \Leftrightarrow \mathrm{Mat}(u, B) \in U(n)$.

☠ (Ex) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. $u \in U(E) \Leftrightarrow$ u diagonalisable en BON et $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbf{U}$. [d]

❍ (Th) Soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ hermitienne. Alors $\exists U \in U(n), \exists D$ diagonale réelle telle que $H = U^* D U$. [rapide !]