MP – Démonstrations

$\boxed{\mathcal{B}(X, \text{Banach}) \text{ est complet pour } \| \ \|_\infty}$.

• Soit X un ensemble et F un espace de Banach.
Soit (f_n) une suite de Cauchy d'éléments de $\mathcal{B}(X, F)$.

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq n_0, \|f_p - f_q\|_\infty \leq \varepsilon.$ (1)

• Soit $x_0 \in X$. La suite $(f_n(x_0))$ est une suite de Cauchy de F. Elle converge ; on note f(x) sa limite.
• Montrons que f est bornée.

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \|f - f_n\|_\infty \leq \varepsilon.$ (d'après 1)

Donc $f = (f - f_n) + f_n$ est bornée.
Cette relation montre que f_n converge uniformément vers f. D'où : $\mathcal{B}(X, F)$ complet pour $\| \ \|_\infty$.

$\boxed{C^0(\text{compact, Banach}) \text{ est complet pour la norme } \| \ \|_\infty}$.

• Soit K un compact et F un espace de Banach.
Soit (f_n) une suite de Cauchy de $C^0(K, F)$:

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq n_0, \|f_p - f_q\|_\infty \leq \varepsilon.$ (1)

• Soit $x_0 \in K$. La suite $(f_n(x))$ est une suite de Cauchy de F :

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq n_0, \|f_p(x) - f_q(x)\| \leq \varepsilon.$ (d'après 1)

F complet donc $(f_n(x))$ converge. On note f(x) sa limite. On définit ainsi f sur K.
• Montrons que f est continue.

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall p \geq n_0, \|f - f_p\|_\infty \leq \varepsilon$ (d'après 1)

La suite de fonctions continues (f_n) converge uniformément vers f. Donc f est continue.
• Donc (f_n) converge vers f pour $\| \ \|_\infty$. $C^0(K, F)$ est donc complet.

$\boxed{\text{Formules de Binet}}$.

$\vec{v} = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta$. On note $C = r^2\frac{d\theta}{dt}$ et $u : \theta \to \frac{1}{r}$

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{dt}{d\theta} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dt}\frac{dt}{d\theta} = -\frac{1}{C}\frac{dr}{dt}.$$

D'où $\frac{dr}{dt} = -C\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right) \Rightarrow \vec{v} = -C\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)\vec{e}_r + \frac{C}{r}\vec{e}_\theta = -C\,u'\,\vec{e}_r + C\,u\,\vec{e}_\theta$..

$\vec{a} = \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right)\vec{e}_r$.

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) = \left(\frac{dt}{d\theta}\right)\frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{C}\frac{dr}{dt}\right) = -\frac{1}{C}\frac{dt}{d\theta}\frac{d^2r}{dt^2}$$

D'où $\frac{d^2r}{dt^2} = -C\frac{d\theta}{dt}u'' = -\frac{C^2}{r^2}u'' \Rightarrow \vec{a} = \left(-\frac{C^2}{r^2}u'' - \frac{C^2}{r^3}\right)\vec{e}_r = -C^2u^2(u'' + u)\,\vec{e}_r$.

$\boxed{\text{Troisième loi de Kepler}}$.

Vitesse aréolaire : $\delta S = ½\, C\, dt$.
En intégrant sur une période, on obtient : $S = ½\, C\, T = \pi\, a\, b$.
Or $p = \frac{C^2}{\mathcal{G} M_T}$ donc $\pi^2a^2b^2 = \frac{1}{4}T^2\mathcal{G}M_T\,p$.

$p = \frac{b^2}{a} \Rightarrow 4\pi^2a^3b^2 = T^2\mathcal{G}M_T\,b^2$. D'où la conclusion : $4\,\pi^2\,a^3 = \mathcal{G}M_T\,T^2$.

Energie d'un satellite.

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_K + \mathcal{E}_P = \frac{1}{2}\,m\left(-C\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)\vec{e}_r + \frac{C}{r}\,\vec{e}_\theta\right)^2 - \frac{\mathcal{G}\,m\,M_T}{r}$$

or $r = \dfrac{p}{1 + e\cos\theta}$ donc $\dfrac{d}{d\theta}\left(\dfrac{1}{r}\right) = \dfrac{e}{p}\sin\theta$. (Binet)

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\,m\left(\frac{C^2\,e^2}{p^2}\sin^2\theta + \frac{C^2}{p^2}(1 + e\cos\theta)^2\right) - \frac{\mathcal{G}\,m\,M_T\,(1 + e\cos\theta)}{p}$$

Or $\dfrac{C^2}{p} = \mathcal{G}M_T$; $\mathcal{E} = \dfrac{\mathcal{G}\,m\,M_T}{2\,p}\left(e^2\sin^2\theta + e^2\cos^2\theta + 1 + 2\,e\cos\theta - 2 - 2\,e\cos\theta\right)$

D'où : $\mathcal{E} = \dfrac{\mathcal{G}\,m\,M_T\,(e^2 - 1)}{2\,p}$.

Cas particulier de l'ellipse : $a = \dfrac{p}{1 - e^2}$; $\mathcal{E} = -\dfrac{\mathcal{G}\,m\,M_T}{2\,a}$

Calcul de l'énergie d'un satellite dans le cas particulier de l'orbite circulaire.

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\,m\left(\frac{2\,\pi\,a}{T}\right)^2 - \frac{\mathcal{G}\,m\,M_T}{a} \text{ or } 4\,\pi^2\,a^3 = \mathcal{G}M_T\,T^2. \text{ D'où } \mathcal{E} = \frac{1}{2}\,m\,\frac{4\,\pi^2\,a^2}{4\,\pi^2\,a^3}\,\mathcal{G}M_T - \frac{\mathcal{G}\,m\,M_T}{a} = -\frac{\mathcal{G}\,m\,M_T}{2a}.$$

Choc élastique en dimension 1.

On raisonne en mesure algébrique.
Conservation de la quantité de mouvement : $m_1\,v_1 + m_2\,v_2 = m_1\,v'_1 + m_2\,v'_2$. (1)
Conservation de l'énergie : $m_1\,v_1^2 + m_2\,v_2^2 = m_1\,v'^2_1 + m_2\,v'^2_2$ (2)
(1) $\Rightarrow m_1(v'_1 - v_1) = m_2(v_2 - v'_2)$ (3)
(2) $\Rightarrow m_1(v'^2_1 - v_1^2) = m_2(v_2^2 - v'^2_2)$ (4)
(4)/(3) $\Rightarrow v'_1 + v_1 = v'_2 + v_2$. (5)
(5) et (1) : $m_1\,v_1 + m_2\,v_2 = m_1\,v'_1 + m_2\,(v'_1 + v_1 - v_2)$

d'où $v'_1 = \dfrac{(m_1 - m_2)\,v_1 + 2\,m_2\,v_2}{m_1 + m_2}$. De même pour v'_2.

Lâché d'un objet sur la Terre depuis le point T ; évaluation de la force de Coriolis
On se place dans la base du repère local terrestre. On suppose :
- latitude λ constant ; champ de gravitation G constant
- référentiel géocentrique galiléen
- pas de frottement ; la verticale du lieu est OT
- $\omega << 1$; conditions initiales : $OM_0 = (0,0,h)$. $v_0 = 0$.

Forces appliquées au point matériel (dans le référentiel terrestre) :
- gravitation + force d'inertie d'entrainement : $-\,m\,g\,\vec{e}_z$.
- force d'inertie de Coriolis : $-\,2\,m\,\omega\,\vec{e}_{Nord} \wedge \vec{v} = -\,2\,m\,\omega\,(\cos\lambda\,\vec{e}_y + \sin\lambda\,\vec{e}_z) \wedge \vec{v}$

D'où : $x'' = -\,2\,\omega\cos\lambda\,z' + 2\,\omega\sin\lambda\,y'$. (1)
$y'' = -\,2\,\omega\sin\lambda\,x'$. (2)
$z'' = -\,g + 2\,\omega\cos\lambda\,x'$. (3)

$\int(2) \Rightarrow y' = -\,2\,\omega\sin\lambda\,x$.
$\int(3) \Rightarrow z' = -\,gt + 2\,\omega\cos\lambda\,x$.
(1) $\Rightarrow x'' = 2\,\omega\cos\lambda\,g\,t - 4\,\omega^2\cos^2\lambda\,x - 4\,\omega^2\sin^2\lambda\,x = 2\,\omega\cos\lambda\,g\,t - 4\,\omega^2\,x$
on néglige $-\,4\,\omega^2\,x$.

$x'' = 2\,\omega\cos\lambda\,g\,t \Rightarrow x' = \omega\cos\lambda\,g\,t^2 \Rightarrow x = \dfrac{1}{3}\,\omega\cos\lambda\,g\,t^3$.

$\boxed{\text{Théorème de Riez}}$.

On suppose que $A = \bar{B}(0, 1) \subset E$ est compacte.
• Montrons qu'il existe un nombre fini de boules ouvertes de rayon ½ qui puissent recouvrir A.
Absurde : Supposons $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in A \setminus \bigcup_{j<n} B(x_j, \frac{1}{2})$.
(x_n) est une suite dans un compact, donc elle possède une suite extraite convergente.
Or $\forall p, q \in \mathbb{N}, p \neq q \Rightarrow \|x_p - x_q\| \geq \frac{1}{2}$. Contradiction.
• Soient $(x_1, ..., x_p)$ tels que $A \subset \cup B(x_i, \frac{1}{2})$. Montrons que E est de dimension finie.
Soit $F = \text{Vect}(x_1, ..., x_p)$. Montrons $E = F$.
Soit $y \in E$; supposons $d = d(y, F) > 0$. Soit x tel que $\|x - y\| = d$. (existe car F est de dimension finie)
Soit i tel que $\left\|\frac{x-y}{\|x-y\|} - x_i\right\| \leq \frac{1}{2}$. On a : $\|x - y - d\, x_i\| = d(y, x + dx_i) \leq \frac{1}{2} d < d$. Contradiction.

$\boxed{\text{Théorème de Baire}}$.

Soit E complet, et (U_n) une suite d'ouverts denses dans E.
Soit U un ouvert de E. Montrons que $U \cap (\cap U_n) \neq \varnothing$.
Soit $x_1 \in U \cap U_1$. Soit r_1 tel que $B_1 = \bar{B}(x_1, r_1) \subset U \cap U_1$ et $r_1 \leq 1$.
Soit $x_2 \in B_1 \cap U_2$. Soit r_2 tel que $B_2 = \bar{B}(x_2, r_2) \subset B_1 \cap U_2$ tel $r_2 \leq \frac{1}{2}$.
... etc ...
(B_n) est une suite décroissante de fermés non vide de diamètres convergeant vers zéro.
$\forall p \geq q, \|x_p - x_q\| \leq r_q$. (1)
(x_n) est une suite de Cauchy de E complet donc converge, vers x.
(1) $\Rightarrow \forall p, \|x - x_p\| \leq r_p$ donc $x \in \cap B_n$.
D'où la conclusion : $\cap U_n$ est dense dans E.

$\boxed{\text{Tr } M = 0 \Rightarrow M \text{ semblable à une matrice à diagonale nulle}}$.

Soit $\mathcal{P}_n$: "$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, Tr M = 0 $\Rightarrow$ M semblable à une matrice à diagonale nulle."
• n = 1. Tr M = 0 $\Rightarrow$ M = 0. $\mathcal{P}_n$ vraie.
• Soit $n \geq 2$. Supposons $\mathcal{P}_{n-1}$. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de trace nulle.
∗ Si M est une homothétie : $M = k\, I_n$. Tr M = 0 donc k = 0. Donc M = 0. $\mathcal{P}_{n+1}$ vraie.
∗ Sinon, soit m l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à M.
Soit $x \neq 0$ un vecteur qui n'est pas vecteur propre de m. $(x, m(x))$ est libre.
Théorème de la base incomplète à $(x, m(x))$ donne une base B de $\mathbb{C}^n$.
$M' = \text{Mat}(m, B) = \begin{bmatrix} 0 & * \\ e_1 & N \end{bmatrix}$. M est semblable à M'.
Tr M = 0 $\Rightarrow$ Tr N = 0. L'hypothèse de récurrence s'applique à N.
Soit K à diagonale nulle et $P \in GL_n(\mathbb{R})$, telle que $N = P^{-1} K P$.
Le calcul montre que $P^{-1} M' P$ est à diagonale nulle, et est semblable à M. $\mathcal{P}_n$ vraie.
D'où la conclusion.

$\boxed{\text{Sur un } \mathbb{C}\text{–ev, les endomorphismes commutant deux à deux ont un vecteur propre en commun}}$.

Soit $\mathcal{P}_n$: "$\forall$ E de dimension n, ses endomorphismes commutant deux à deux ont un vecteur propre en commun."
• $\mathcal{P}_1$: évident. N'importe quel vecteur non nul convient.
• Soit $n \geq 2$. Supposons $\mathcal{P}_1, ..., \mathcal{P}_{n-1}$. Soient $u_1, ..., u_n$ commutant deux à deux.
∗ Si $\forall i, u_i \in \mathbb{C}\, \text{Id}$: n'importe quel vecteur non nul convient. $\mathcal{P}_n$ vraie.
∗ Sinon, supposons par exemple que u_1 ne soit pas une homothétie.
Soit F un sev stable par u_1, tel que $F \neq E$ et $F \neq \{0\}$ (par exemple, F = $\mathbb{R}$ vep de u_1)
Les endomorphismes commutent donc F est stable par tous les u_i.
On applique l'hypothèse de récurrence, qui fournit un vecteur propre commun. $\mathcal{P}_n$ vraie.
D'où la conclusion.

$\boxed{\text{u trigonalisable} \Leftrightarrow \text{il existe un polynôme scindé qui annule u}}$.

$*$ Si u est trigonalisable, χ_u est scindé et le théorème de Cayley-Hamilton donne la conclusion : $\chi_u(u) = 0$.
$*$ Soit $\mathcal{P}_n$: "$\exists$ P scindé, $P(u) = u \Rightarrow$ u trigonalisable dans un ev de dimension n"

n = 1 : u toujours trigonalisable.

Soit $n \geq 2$. Supposons $\mathcal{P}_{n-1}$. Soit u endomorphisme dans E de dimension n.

Supposons $P = \prod(X - a_i)$ et $P(u) = 0$.

$\prod(u - a_i\,\mathrm{Id}) = 0$ donc au moins l'un des endomorphismes n'est pas bijectif.

$\exists$ a, $u - a\,\mathrm{Id}$ non inversible. Donc u possède une valeur propre, et un vecteur propre $x \neq 0$.
Théorème de la base incomplète donne B = (x, ...) base de E.

$M = \mathrm{Mat}(u, B) = \begin{bmatrix} a & * \\ 0 & N \end{bmatrix}$. Le calcul montre que $P(N) = 0$.

L'hypothèse de récurrence fournit $Q \in GL_n(\mathbb{R})$, $QNQ^{-1} = T \in T_n(\mathbb{R})$.

Le calcul montre que QMQ^{-1} est triangulaire. Donc u trigonalisable. $\mathcal{P}_n$ vraie.

$\boxed{\text{u autoadjoint} \Leftrightarrow \text{u possède une BON de vecteurs propre}}$.

$*$ u possède une BON de vecteurs propres $\Rightarrow \exists$ BON, Mat(u, BON) diagonale (donc symétrique) $\Rightarrow$ u autoadjoint.
$*$ Soit $\mathcal{P}_n$: "dans un eve de dimension n, u autoadjoint $\Rightarrow$ u possède une BON de vecteurs propres."

$\mathcal{P}_1$: vraie (n'importe quelle BON convient)

Soit $n \geq 2$. Supposons $\mathcal{P}_{n-1}$. Soit B_0 une BON. $\mathrm{Mat}(u, B_0) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ possède des valeurs propres dans $\mathbb{C}$.
On montre qu'il s'agit de valeurs propres dans $\mathbb{R}$.
Soit x un vecteur propre de u de norme 1. Soit $H = \{x\}^\perp$. Soit B = (x, BON de H).
Mat(u, B) est diagonale par blocs (car symétrique et x vecteur propre).
L'hypothèse de récurrence s'applique à H. Elle fournit une BON de diagonalisation de u.
D'où : $\mathcal{P}_n$ vraie.

$\boxed{\text{A et B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ symétriques positives. Alors } \det(A + B) \geq \det(A) + \det(B)}$.

$*$ Si dét A = dét B = 0. A + B est symétrique positive. Il existe une BON de diagonalisation, et les valeurs propres sont positives. Donc $\det(A + B) \geq 0$.
$*$ Si dét $A \neq 0$ par exemple. Dans $\mathbb{C}^n$, A correspond à une FBSDP, a. Soit b la forme associée à B.
Il existe une BON pour a, orthogonale pour B.

$\mathrm{Mat}(a, \mathrm{BON}) = {}^tPP$.
$\mathrm{Mat}(b, \mathrm{BON}) = {}^tPDP$.
$A + B = {}^tP(\mathrm{Id} + D)P$.

$\det(A + B) = \det(P)^2 \det(\mathrm{Id} + D) \geq \det(P)^2 (1 + \det(D)) \geq \det(P)^2 + \det(P)^2\det(D) = \det(A) + \det(B)$.
D'où la conclusion.

$\boxed{\{ x \in E \,/\, N_1(x) < 1 \} = \{ x \in E \,/\, N_2(x) < 1 \} \Rightarrow N_1 = N_2}$.

Soit $x \in E$. Montrons que $N_1(x) = N_2(x)$.
Soit $\varepsilon > 0$. $N_1\left(\dfrac{x}{N_1(x)+\varepsilon}\right) < 1 \Rightarrow N_2\left(\dfrac{x}{N_1(x) + \varepsilon}\right) < 1$, donc $N_2(x) < N_1(x) + \varepsilon$.

Passage à la limite : $N_2(x) \leq N_1(x)$. De même, $N_1(x) \leq N_2(x)$.

Conclusion : $N_1 = N_2$.

$\boxed{u_n = \sin(\ln n) \text{ admet 0 comme valeur d'adhérence}}$.

On cherche n tel que sin(ln n) soit petit. Par exemple, si l'on prend $\ln n \in \pi\,\mathbb{Z}$, ou encore $n \in \exp(\pi\,\mathbb{Z})$
Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $\varphi(n) = E(\exp(n\pi))$.

$$\exp(n\pi) \leq \varphi(n) < \exp(n\pi) + 1.$$
$$n\pi \leq \ln(\varphi(n)) < \ln(1 + \exp(n\pi))$$
$$0 \leq \ln(\varphi(n)) - n\pi < \ln(1 + \exp(n\pi)) - n\pi = v_n$$

En $+\infty$: $1 + \exp(x) = \exp(x)(1 + \varepsilon(x))$ $\qquad \varepsilon \to 0$ en $+\infty$.

$$\ln(1 + \exp(x)) = x + \ln(1 + \varepsilon(x))$$

Donc $\ln(1 + \exp(n\pi)) - n\pi$ tend vers zéro.

A partir d'un certain rang, on pourra écrire (sin croissant sur $[0, \pi/2]$) que

$$0 \leq \sin(\ln(\varphi(n))) < \sin(v_n) \text{ avec } v_n \to 0.$$

Donc $u_{\varphi(n)}$ converge vers 0, qui est donc une valeur d'adhérence.

$\boxed{f \text{ endomorphisme de groupe de } (\mathbb{R}, +) \text{ continu. Alors } \exists\, a \in \mathbb{R},\ f = a\,\mathrm{Id}}$.

Soit F la primitive de f nulle en 0. F est C^1.
$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$.
On intègre par rapport à x (y fixé), de 0 à 1 : $F(1 + y) - F(y) = F(1) - F(0) + f(y)$.
Donc f est C^1 sur $]0, +\infty[$.
Dérivons la relation de morphisme par rapport à x : $f'(x + y) = f'(x)$.
Pour x = 0 fixé, on a : $\forall y \in \mathbb{R}$, $f'(y) = f'(0)$. Donc $f = f'(0)\,\mathrm{Id}$.

$\boxed{\text{Calcul de } \int \frac{x + 1}{(x^2 + x + 1)^3}\,dx}$

$$I = \int \frac{x + 1}{(x^2 + x + 1)^3}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x + 1}{(x^2 + x + 1)^3}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x^2 + x + 1)^3}\,dx = -\frac{1}{4}\frac{1}{(x^2 + x + 1)^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right)^3}$$

Changement de variable : $x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\tan\varphi$; $\qquad \varphi = \mathrm{Arctan}\left(\frac{2x + 1}{\sqrt{3}}\right)$

$$d\varphi = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{dx}{\frac{(2x + 1)^2}{3} + 1} = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{dx}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$$

$$I = \frac{-1}{4\,(x^2 + x + 1)^2} + \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{16}{9}\int \frac{d\varphi}{(\tan^2\varphi + 1)^2} = \frac{-1}{4\,(x^2 + x + 1)^2} + \frac{16\sqrt{3}}{27}\int \cos^4\varphi\,d\varphi$$

$$\cos^4\varphi = \frac{1}{16}\,(\exp(i\varphi) + \exp(-i\varphi))^4 = \frac{1}{16}(\,2\cos(4\varphi) + 8\cos(2\varphi) + 6) = \frac{1}{8}\cos(4\varphi) + \frac{1}{2}\cos(2\varphi) + \frac{3}{8}.$$

$$I = \frac{-1}{4\,(x^2 + x + 1)^2} + \frac{\sqrt{3}}{54}\sin(4\varphi) + \frac{4\sqrt{3}}{27}\sin(2\varphi) + \frac{2\sqrt{3}}{9}\varphi + c^{te}.$$

$$\text{Or } \sin(t) = \frac{2\tan\left(\frac{t}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{t}{2}\right)} \text{ donc } \sin(2\varphi) = \frac{\frac{2(2x + 1)}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{(2x + 1)^2}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}$$

$$\text{Et } \sin(4\varphi) = 2\cos(2\varphi)\sin(2\varphi) = -2\frac{\frac{1}{3}(4x^2 + 4x - 2)}{\frac{4}{3}(x^2 + x + 1)}\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{(2x^2 + 2x - 1)(2x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2}$$

$$I = \frac{-1}{4\,(x^2 + x + 1)^2} + \frac{2\sqrt{3}}{9}\mathrm{Arctan}\left(\frac{2x + 1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{2}{9}\frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} - \frac{1}{36}\frac{(2x^2 + 2x - 1)(2x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2} + c^{te}$$

$\boxed{\text{Soit } P = \prod (X - a_k) - 1 \text{ où les } a_k \in \mathbb{Z} \text{ sont distincts. Alors } P \text{ est irréductible dans } \mathbb{Z}[X]}$.

Supposons que P ne soit pas irréductible : $P = QR$ avec Q et R dans $\mathbb{Z}[X]$.
$\forall$ k, $P(a_k) = -1 = Q(a_k)\, R(a_k)$. Donc $\forall$ k, $Q(a_k)$ et $R(a_k) \in \mathbf{U}_2$.
$\forall$ k, $Q(a_k) = -R(a_k)$.
Les a_k sont tous distincts $\Rightarrow Q = -R$ (polynômes de Lagrange) car d°Q et d°R $\leq n - 1$
Alors $P = -Q^2$. Or $\lim P = +\infty$ en $+\infty$. Contradiction.

$\boxed{\text{S ensemble fini muni d'une LCI associative. Alors } \exists\, x \in S, x^2 = x}$.

Soit $x \in S$.
S fini donc $\exists\, (p, q) \in \mathbb{N}^2$, $p > q$ et $x^p = x^q$.
Soit $k = p - q$. $\forall\, r \in \mathbb{N}$, $x^q = x^{q + rk}$.
On a : $x^{(k-1)q}\, x^q = x^{kq} = x^{kq + rk}$
D'où, pour $r = k$, $x^{kq} = x^{2kq}$. Conclusion : x^{kq} convient.

$\boxed{\begin{array}{l}\text{G groupe fini de cardinal n. A, B deux parties non vides.}\\ \#A + \#B > \#G. \text{ Alors } G = AB.\end{array}}$

Evidemment, $AB \subset G$. Montrons $G \subset AB$.
Supposons que $a \in G \setminus AB$.
$\forall\, (x, y) \in A \times B$, $x\, y \neq a$, donc $x \neq a\, y^{-1}$. Donc $a\, B^{-1} \cap A = \varnothing$.
Or $\#(a\, B^{-1}) = \#B$
$\#(a\, B^{-1}) + \#A > \#G$. Contradiction.

$\boxed{\text{Il n'existe pas de } P \in \mathbb{Z}[X] \text{ tel que } P(1) = 2 \text{ et } P(3) = 5}$.

Supposons P existe.
$P = a_0 + a_1 X + ... + a_n X^n$.
$2 = a_0 + a_1 + ... + a_n$.
$5 = a_0 + 3\, a_1 + ... + 3^n\, a_n$.
D'où $3 = 2\, a_1 + ... + (3^n - 1)\, a_n \in 2\,\mathbb{Z}$. Contradiction.

$\boxed{\text{Soit G groupe de cardinal pair. Alors } \exists\, x \in G \setminus \{e\}, x^2 = e}$.

On définit une relation d'équivalence :
$x\, \mathfrak{R}\, y \Leftrightarrow x = y^{-1}$.
Les classes d'équivalence sont soit de cardinal 2, soit de cardinal 1.
Il y a au moins une classe de cardinal 1 : $\{e\}$.
Donc, comme $\#G \in 2\,\mathbb{Z}$, il y en a une autre.

$\boxed{\text{Résoudre dans } \mathbb{Z} : x^2 + y^2 = 3z^2}$.

Soit (x, y, z) le triplet de solution tel que $|z|$ soit minimal mais non nul.
Dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $x^2 + y^2 \equiv 0$.
$x \equiv 0$, 1 ou $2 \Rightarrow x^2 \equiv 0$ ou 1, car $2^2 \equiv 1$.
$y^2 \equiv 0$ ou 1 de même.
Donc en fait, $x^2 \equiv y^2 \equiv 0$.
Donc x^2 et y^2 sont multiples de 3. Donc x et y aussi.
D'où $9 | x^2$ et $9 | y^2$. D'où $3 | z^2$. Donc $3 | z$.
Donc le triplet $\left(\frac{x}{3}, \frac{y}{3}, \frac{z}{3}\right)$ est aussi solution. Contradiction.
Conclusion : $\mathscr{S} = \{(0, 0, 0)\}$.

Quel est le dernier chiffre de 7^{7^7} ?.

$7^2 \equiv 9 \equiv -1\ [\,10\,]$
$7^4 \equiv 1\ [\,10\,]$
On cherche $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ tel que $7^7 \equiv k\ [\,4\,]$.
$7 \equiv 3\ [\,4\,]$; $7^2 \equiv 1\ [\,4\,]$; donc $7^7 \equiv 3\ [\,4\,]$.
D'où $7^{7^7} \equiv 7^3 \equiv 63 \equiv 3\ [\,10\,]$
Le dernier chiffre de 7^{7^7} est 3.

Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$. Soit $a \in \mathbb{C}$ racine de multiplicité $m > ½\ d°P$. Alors $a \in \mathbb{Q}$.

$P(a) = 0 \Rightarrow P(\bar{a}) = 0$; $P^{(k)}(a) = 0 \Rightarrow P^{(k)}(\bar{a}) = 0$.
Donc $\bar{a}$ est aussi racine de multiplicité $m > ½\ d°P$. Donc $a = \bar{a}$; $a \in \mathbb{R}$.
a est algébrique sur $\mathbb{Q}$; a est racine simple de π_a (sinon, π_a' convient).
Division euclidienne : $P = Q\ \pi_a{}^m$ avec $Q(a) \neq 0$.
Si $a \notin \mathbb{Q}$, $d°\pi_a \geq 2$: contradiction sur le degré de P.
Conclusion : $a \in \mathbb{Q}$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors $\pi_{\mathbb{C}} = \pi_{\mathbb{R}}$.

$\pi_{\mathbb{C}} \mid \pi_{\mathbb{R}}$ car $\pi_{\mathbb{R}} \in \mathbb{C}[X]$ annule A.
Soient P et $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\pi_{\mathbb{C}} = P + i\,Q$.
On a $P(A) + i\,Q(A) = 0$. Donc $P(A) = 0$ et $Q(A) = 0$.
Donc $\pi_{\mathbb{R}} \mid P$ et $\pi_{\mathbb{R}} \mid Q$. Donc $\pi_{\mathbb{R}} \mid P + i\,Q = \pi_{\mathbb{C}}$. Conclusion : $\pi_{\mathbb{R}} = \pi_{\mathbb{C}}$.

Théorème de Cauchy : Soit G groupe de cardinal n ; et p premier diviseur de n.
Alors il existe un élément de G d'ordre p.

Soit $E = \{\ (x_1, ..., x_p) \in G^p\ /\ x_1...x_p = e\ \}$. $\#E = \#G^{p-1} \in p\mathbb{Z}$.
Soit $\varphi : (x_1, ..., x_p) \in E \to (x_p, x_1, ..., x_{p-1}) \in E$.
$\varphi \in \sigma(E)$: elle se décompose en cycles.
Quels sont les éléments d'ordre 1 ?

$\varphi(X) = X \Leftrightarrow (x_p, x_1, ..., x_{p-1}) = (x_1, ..., x_p) \Leftrightarrow x_1 = x_2 = ... = x_p$.

Soit X un élément qui n'est pas d'ordre 1.

$\varphi^p(X) = X$ donc son ordre divise p premier ; c'est donc p.

$\varphi(e, ..., e) = (e, ..., e)$: il existe un élément d'ordre 1.
Donc il en existe un autre : $(a, ..., a)$, qui vérifie $a^p = e$. Son ordre divise p et n'est pas 1.
Conclusion : a convient.

Chaînette.

La chaînette est de masse linéique λ.
Equilibre d'un segment dx, orienté avec θ par rapport à $\vec{x}$:

Sur $\vec{z}$: $0 = -\lambda\sqrt{y'^2+1}\ dx\ g - T(x)\sin\theta(x) + T(x+dx)\sin\theta(x+dx)$. $\Rightarrow \dfrac{d}{dx}(T\sin\theta) = \lambda\, g\sqrt{\tan^2\theta + 1}$.

Sur $\vec{x}$: $0 = -T(x)\cos\theta(x) + T(x+dx)\cos\theta(x+dx)$ $\Rightarrow T\cos\theta = T(O)$ constante.

Donc $T\sin\theta = T(O)\tan\theta$.

D'où $T(O)\,y'' = \lambda\, g\sqrt{1 + y'^2}$.

$\dfrac{y''}{\sqrt{1+y'^2}} = \dfrac{\lambda\, g}{T(O)}$, ce qui s'intègre en $\mathrm{Argsh}(y') = \dfrac{\lambda\, g\, x}{T(O)}$ d'où $y'(x) = \mathrm{sh}\left(\dfrac{\lambda\, g\, x}{T(O)}\right)$.

Donc $y(x) = \dfrac{T(O)}{\lambda\, g}\ \mathrm{ch}\left(\dfrac{\lambda\, g\, x}{T(O)}\right)$, et $T(x) = \dfrac{T(O)}{\cos\theta} = T(O)\sqrt{1+y'^2} = T(O)\ \mathrm{ch}\left(\dfrac{\lambda\, g\, x}{T(O)}\right)$.

$\boxed{\text{Points de Lagrange}}$.

$d^3 = \mathcal{G}(m_S + m_T)\dfrac{1}{\omega^2}$.

Les points de Lagrange (L_i) sont dans le plan des orbites car sinon, la résultante des forces ne pourrait pas être nulle.
Dans le référentiel R, la somme des forces doit être nulle.

$$\vec{F}_{S \to M} + \vec{F}_{T \to M} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic} = \vec{0}.$$

$$-\frac{\mathcal{G}\, m_S\, m}{SM^3}\,\vec{SM} - \frac{\mathcal{G}\, m_T\, m}{TM^3}\,\vec{TM} - m\,(-\,\omega^2\,\vec{GM}) + \vec{0} = \vec{0}.$$

D'où $\dfrac{\mathcal{G}\, m_S}{SM^3}\,\vec{SM} + \dfrac{\mathcal{G}\, m_T}{TM^3}\,\vec{TM} = \omega^2\,\vec{GM}$

Sur l'axe ST : $\dfrac{\mathcal{G}\, m_S}{(X - X_S)^2} + \dfrac{\mathcal{G}\, m_T}{(X - X_T)^2} = \omega^2\, X$

$\boxed{\text{Chercher les idéaux de } \mathcal{M}_n(\mathbf{K})}$.

Soit I idéal de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. $\forall$ A $\in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $\forall$ B $\in$ I, AB et BA $\in$ I.
Supposons que I $\neq \{0\}$. Soit B $\in$ I non nul : $b_{k,\ell} \neq 0$.
$\forall$ i, j, $E_{i,k}\, B\, E_{\ell,j} = b_{k,\ell}\, E_{i,j} \in$ I. Donc $\sum b_{k,\ell}\, E_{i,i} = b_{k,\ell}\, I_n \in$ I.
Donc $b_{k,\ell}^{-1}\, I_n\, b_{k,\ell}\, I_n = I_n \in$ I. Donc I = $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

$\boxed{\text{Soit } A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ nilpotente. Alors } \exists\, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ B^2 = I_n + A}$.

$A^p = 0$ donc $\chi_A \mid X^p$ or $d°\chi_A = n$; donc $A^n = 0$.
Astuce : développement limité de $\sqrt{1 + x} = P(x) + x^n\,\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \to 0$ en 0 et $d°P = n$.
$1 + x = P(x)^2 + x^n\,\varepsilon'(x)$. Donc $1 + X = P^2 + X^nQ(X)$ avec $Q(0) = 0$.
$I_n + A = P(A)^2 + A^nQ(A) = P(A)^2$. Donc P(A) convient.

$\boxed{\text{Soit } X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}). \text{ Alors : X nilpotente} \Leftrightarrow \text{X et 2X semblables}}$.

∗ Supposons X et 2X semblables : soit T triangulaire supérieure telle que X semblable à T.
T est semblable à 2T. $\chi_T = \chi_{2T}$ donc Sp T = Sp 2T. Or Sp 2T = 2 Sp T (immédiat). Donc Sp T = Sp X = $\{0\}$.
Donc X nilpotent.
∗ Supposons X nilpotent. $X^n = 0$.
Soit T triangulaire supérieure semblable à X telle qu'il ne $T_{i,j} = 0$ si $i \neq j - 1$. (Admis)
Montrons que T est semblable à 2T. $\mathrm{diag}(2^n, ..., 2, 1)\ T\ \mathrm{diag}(2^{-n}, ..., ½, 1) = 2T$. D'où la conclusion.

Formule de Stierling.

Soit $u_n = \ln(n!)$. On cherche un développement asymptotique de u_n.

- $u_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(k)$.

$\int_k^{k+1} \ln(t)\,dt \le \ln(k) \le \int_{k-1}^{k} \ln(t)\,dt$ car ln ↘.

$\int_1^{n+1} \ln(t)\,dt \le u_n \le \int_0^{n} \ln(t)\,dt$. Une primitive de ln est $t\ln(t) - t$

$(n+1)\ln(n+1) - (n+1) - 1 \le u_n \le n \ln n - n$

$v_n = \ln(n+1) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 2 \le u_n - (n \ln n - n) \le 0$.

On a $v_n = o(n)$ donc $u_n = n \ln n - n + o(n)$.

- Soit $w_n = u_n - n \ln n + n$.

$w_{n+1} - w_n = \ln(n+1) - (n+1)\ln(n+1) + (n+1) + n \ln n - n = -n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + 1 = -n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + 1 = \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

Soit (h_n) bornée telle que $w_{n+1} - w_n = \frac{1}{2n} + \frac{h_n}{n^2}$.

Sommons : $w_n = \frac{1}{2}\ln(n) + k + o(1)$ avec k constante.

- $u_n = n \ln n - n + \frac{1}{2}\ln(n) + k + o(1)$.

$\exp(u_n) = n^n e^{-n} n^{1/2} e^k e^{\varepsilon_n}$ avec $\varepsilon_n \to 0$.

D'où $n! \sim K n^n e^{-n} n^{1/2}$

Il ne reste plus qu'à trouver la constante K.

- Soit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\,dt$: intégrale de Wallis. $I_0 = \frac{1}{2}\pi$.

$I_n = -\left[\sin^{n-1} t \cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} t \cos^2 t\,dt$ or $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$.

$I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$ donc $n I_n = (n-1)I_{n-2}$.

Donc $n I_n I_{n-1} = (n-1) I_{n-1} I_{n-2} =$ constante. A partir de ce résultat et de I_0 et I_1, on montre que $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Soit $n = 2p$.

$I_{2p} = \frac{2p-1}{2p} I_{n-2} = \frac{(2p-1)(2p-3)\dots1}{2p(2p-2)(2p-4)\dots2}\frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!}{(2p(2p-2)(2p-4)\dots2)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!}{2^{2p}p!^2}\frac{\pi}{2}$.

$I_{2p} \sim \frac{K\, 2^{2p} p^{2p} e^{-2p}\sqrt{2p}}{2^{2p}(K p^p e^{-p}\sqrt{p})^2}\frac{\pi}{2} \sim \frac{\pi}{K\sqrt{2\,p}} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4p}}$. D'où $K = \sqrt{2\pi}$

Conclusion : $n! = n^n e^{-n}\sqrt{2\,\pi\, n}$.

Sommes de Riemann.

Soit $f \in C^0([a, b], \mathbb{R})$. Soit $\varepsilon > 0$.

Le théorème de Heine affirme que f est uniformément continue.

Soit $\alpha > 0$ tel que $\forall (x, y) \in [a, b]^2$, $|x - y| \le \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \le \frac{\varepsilon}{b-a}$.

Soit $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ une subdivision de [a, b] de pas inférieur à α.

Soient $(b_0, \dots, b_{n-1})$ tel que $\forall i$, $a_i \le b_i \le a_{i+1}$.

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) f(b_k) - \int_a^b f\right| \le \left|\sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} (f - f(b_k))\right| \le \left|\sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k)\frac{\varepsilon}{b-a}\right| \le \varepsilon.$$

$u \in \mathcal{L}(E)$. Alors χ_u scindé $\Leftrightarrow$ tout sev stable différent de $\{0\}$ contient un vecteur propre.

• Supposons χ_u scindé. u est trigonalisable.
Soit F sev stable. Soit u' induit par u sur F. u' est trigonalisable, donc F contient un vecteur propre.
• Supposons χ_u non scindé : $\chi_u = QR$ avec Q scindé et R sans racines. $Q \wedge R = 1$.

$Q(u) = 0 \Rightarrow$ u trigonalisable $\Rightarrow$ u scindé. Impossible.

$\operatorname{Ker} R(u) = \{0\} \Rightarrow$ Théorème de décomposition des noyaux, $Q(u) = 0$. Impossible.

Donc $\operatorname{Ker} R(u) \neq \{0\}$. Supposons $\exists\, x \in \operatorname{Ker} R(u) \setminus \{0\}$, $u(x) = \lambda x$. Alors $\operatorname{Ker} (X - \lambda)u \cap \operatorname{Ker} R(u) \neq \{0\}$ impossible (Théorème de décomposition des noyaux). Donc $\operatorname{Ker} R(u)$ convient.

Parmi 13 réels distincts, il y en a deux x et y tels que $0 < \dfrac{x-y}{1+xy} < 2-\sqrt{3}$

Soient $a_1, ..., a_{13}$ des réels distincts.
$\forall\, i$, on pose $b_i = \operatorname{Arctan} a_i \in \,]-\pi/2, \pi/2[$.
$\dfrac{a_i - a_j}{1 + a_i a_j} = \dfrac{\tan b_i - \tan b_j}{1 + \tan b_i \tan b_j} = \tan(b_i - b_j)$.

Soient i, j tels que $|b_i - b_j| \leq \dfrac{\pi}{12}$.

$\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ avec $t = \tan\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$. Donc $t^2 = \dfrac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = (2-\sqrt{3})^2$ d'où $t = 2 - \sqrt{3}$.

D'où la conclusion.

Développement en fractions continues
On pose $x_0 \in \mathbb{R}$. $a_n = E(x_n)$. $x_{n+1} = \dfrac{1}{x_n - a_n}$. Alors ces suites sont définies $\Leftrightarrow x_0 \notin \mathbb{Q}$

• Supposons $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Alors $\forall\, n$, $x_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (par récurrence immédiate). Donc ces suites sont définies.

• Supposons $x_0 \in \mathbb{Q}_+$. Soient p_n et q_n tels que $x_n = \dfrac{p_n}{q_n} \geq 0$.

$x_{n+1} = \dfrac{1}{\frac{p_n}{q_n} - a_n} = \dfrac{1}{\frac{p_n - a_n q_n}{q_n}} = \dfrac{q_n}{p_n - a_n q_n}$. $p_n - a_n q_n$ est le reste de la division euclidienne de p_n par q_n.
Le dénominateur de (x_n) est une suite strictement décroissante d'entiers positifs. Contradiction.

Etude cinétique des gaz parfaits.

Soient N particules de gaz dans une enceinte de volume V.
Une paroi plane de l'enceinte a une surface S.
On note u la vitesse quadratique moyenne des particules de gaz, m leur masse.
• On considère les particules qui ont une vitesse v_x (en norme) selon x. Leur nombre est dN.

Pendant dt, combien de particules ont heurté la paroi ? $\dfrac{1}{2}\dfrac{dN}{V}.\,S\,v_x\,dt$

Chacune a transmis un effort à la paroi de $\Delta p = 2\,m\,v_x$.
La force est donc $F = \dfrac{dN\,S\,v_x\,.m\,v_x}{V} = P\,S$. D'où $P = \dfrac{dN\,m\,v_x^2}{V}$
• On intègre pour l'ensemble des vitesses.
En moyenne, $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = 3\,v_x^2$ par isotropie.
D'où $P = \dfrac{m\,u^2}{3V}\displaystyle\int_{\text{N particules}} dN = \dfrac{N\,m\,u^2}{3V}$. Conclusion : $3\,P\,V = N\,m\,u^2$.

Relation de Mayer, Loi de Laplace.

• $H = U + PV = U + nRT$,
$C_P\,dT = C_V\,dT + nR\,dT$ d'où $C_P - C_V = nR$.
• On se place sur une transformation isentropique : $dS = 0$.
$dU = \dfrac{nR}{\gamma - 1}\,dT = -P\,dV + 0$. Or $PV = nRT$: $nR\,dT = P\,dV + V\,dP = (1-\gamma)\,P\,dV$.
D'où $\dfrac{dP}{P} + \gamma\dfrac{dV}{V} = 0$, d'où $PV^\gamma =$ constante.

Détente de Joule-Thompson.

On considère un système un écoulement permanent.
D_m : débit massique, constant.
Soit $\mathscr{S}$ le système fermé constitué du gaz entre A et B, à la date t.
Pendant Δt, $\Delta U + \Delta\mathcal{E}_K + \Delta\mathcal{E}_{P\,ext} = -(P_B\,V_B - P_A\,V_A) + W_u + Q$.
$\Delta H = \Delta U + \Delta(PV) = DU + P(V_B - V_A)$
D'où : $dH + d\mathcal{E}_K + d\mathcal{E}_{P\,ext} = \delta W + \delta Q$.

Théorème de sommation des relations de comparaison.

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ avec $v_n \geq 0$ et $\sum v_n = \infty$.
On note $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ et $t_n = \sum\limits_{k=0}^{n} v_k$.
On suppose $u_n = O(v_n)$: Soit $M \in \mathbb{R}$, soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, n \geq n_0$, $|u_n| \leq M|v_n|$.
Alors $\forall\, n \geq n_0$, $s_n \leq M\,t_n$. (inégalité triangulaire). Donc $s_n = O(t_n)$.

Théorème de Weierstrass pour polynômes.

Soit $f \in C^0([0, 1], \mathbb{C})$.
Soit $f_n = c_n\,(1-X^2)^n$ avec c_n tel que $\int_{-1}^{1} f_n = 1$.
On a : $\forall\, n \in \mathbb{N}, f_n \geq 0$. $\forall\, n \in \mathbb{N}, \int_{-1}^{1} f_n = 1$. $\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, \delta > 0, \lim\limits_{n} \int_{-\delta}^{\delta} f_n = 1$.
En effet, $\dfrac{1}{2} = \int_0^1 c_n(1-t^2)^n\,dt \geq \int_0^1 c_n(1-t^2)^n\,t\,dt = \dfrac{c_n}{2(n+1)}\Big[-(1-t^2)^{n+1}\Big]_0^1 = \dfrac{c_n}{2(n+1)}$.
D'où $c_n \leq n + 1$.
D'où $\int_\delta^1 c_n\,(1-t^2)^n\,dt \leq (n+1)\int_\delta^1 (1-\delta^2)^n\,dt \leq (n+1)\,(1-\delta^2)^n \to 0$. De même sur $]-1, \delta[$.
Soit $g_n : x \to \int_{x-1}^{x+1} f_n(x-t)\,f(t)\,dt = \int_{-1}^{1} f_n(t)\,f(x-t)\,dt$. (1) (2)
L'expression (1) montre que g_n est une fonction polynômiale : il suffit de développer $f_n(x-t)$ pour le constater.
L'expression (2) montre que g_n converge uniformément vers f :
Soit $\varepsilon > 0$. Soit α tel que $\forall\,(x, y) \in [0, 1]^2$, $|x - y| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. (Heine)
Soit $\delta = \alpha / 2$.
$$|g_n(x) - f(x)| = \left|\int_{-1}^{1} f_n(t)(\,f(x-t) - f(x)\,)\,dt\right| \leq \int_{-1}^{-\delta} f_n(t)\,|f(x-t) - f(x)|\,dt + \int_{-\delta}^{\delta} f_n(t)|f(x-t) - f(x)|\,dt + \int_{\delta}^{1} f_n(t)|f(x-t) - f(x)|\,dt$$
$\leq 4\,\|f\|_\infty\,\varepsilon_n + \varepsilon \leq 2\,\varepsilon$ à partir d'un certain rang. D'où la conclusion.

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \text{ et } \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}}$$

• Soit $t_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2}$.

t_n converge, on note S sa limite.

$$t_n - t_{n-1} = \frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n(n+1)}.\ T\Sigma RC_{CVG} \Rightarrow S - t_n \sim \frac{1}{n}.$$

$$t_n = S - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Soit $v_n = t_n - S + \frac{1}{n}$.

$$v_n - v_{n-1} = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} = \frac{n-1 + n(n-1) - n^2}{n^2(n-1)} = \frac{-1}{n^2(n-1)} \sim -\frac{1}{n^3}.$$

$$\text{Or } \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^3} \le \frac{1}{k^3} \le \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^3} \text{ d'où } \frac{1}{2n} \int_n^{\infty} \frac{dt}{t^3} \le \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^3} \le \int_{n-1}^{\infty} \frac{dt}{t^3} = \frac{1}{2(n-1)^2}.$$

$$T\Sigma RC_{CVG} \Rightarrow t_n = S - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Soit $w_n = t_n - S + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}$.

$$w_n - w_{n-1} = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2(n-1)^2} = \frac{2(n-1)^2 + 2n(n-1)^2 - 2n^2(n-1) - (n-1)^2 + n^2}{2n^2(n-1)^2} = \frac{1}{2n^2(n-1)^2} \sim \frac{1}{2n^4}$$

$$TSRC_{CVG} \Rightarrow t_n = S - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

• Soit $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

$\forall$ k, $\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \le \frac{1}{k} \le \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t}$ donc $\int_1^{n+1} \frac{dt}{t} \le s_n \le \int_1^{n} \frac{dt}{t} + 1$, c'est-à-dire $\ln(n+1) \le s_n \le \ln(n) + 1$.

Donc $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \le s_n - \ln(n) \le 1$. Donc $s_n \sim \ln n$. Soit $v_n = s_n - \ln n$.

$v_n - v_{n-1} = \frac{1}{n} - \ln n + \ln(n-1) = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \sim -\frac{1}{2n^2}$. Donc v_n tend vers une constante, γ.

$TSRC_{CVG} \Rightarrow v_n \sim \gamma + \frac{1}{2n}$.

$$\text{Donc } s_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Soit $w_n = s_n - \ln(n) - \gamma - \frac{1}{2n}$.

$$w_n - w_{n-1} = \frac{1}{n} - \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2(n-1)} = \frac{2(n-1) - (n-1) + n - 2n(n-1)\left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)}{2n(n-1)}$$

$$w_n - w_{n-1} = \frac{2n - 1 - 2(n-1)}{2n(n-1)} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) = \frac{1}{2n(n-1)} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

$$w_n - w_{n-1} = \frac{3n^2 - 3n(n-1) + 2(n-1)}{6n^3(n-1)} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) = \frac{-n+1}{6n^3(n-1)} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$w_n - w_{n-1} = -\frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \sim -\frac{1}{6n^3}.$$

$$T\Sigma RC_{CVG} \Rightarrow w_n \sim -\frac{1}{12n^2}.$$

Donc $s_n = \ln(n) + g + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

$\boxed{\text{Théorème d'inversion des limites}}$.

• Soit (f_n) une suite de fonctions à valeurs dans F complet qui converge uniformément vers f sur A.
Soit $a \in \mathrm{Adh}(A)$. On suppose que $\lim f_n = \ell_n$ en a..
Montrons $\lim \ell_n = \lim f$ en a.
• Montrons que ℓ_n converge. Soit $\varepsilon > 0$. Soit n_0 tel que $\forall\, p, q \geq n_0$, $\|f_p - f_q\|_\infty \leq \varepsilon$.
$\forall\, x \in A$, $\|f_p(x) - f_q(x)\| \leq \varepsilon$. Pour $x \to a$, on obtient : $\|\ell_p - \ell_q\| \leq \varepsilon$. F complet donc ℓ_n converge.
Soit ℓ sa limite.
• Soit g_n prolongement de f sur $A \cup \{a\}$, tel que $g_n(a) = \ell_n$. Soit g prolongement de f sur $A \cup \{a\}$ tel que $g(a) = \ell$.
On montre que g_n converge uniformément vers g ; g_n est continue en a donc g aussi.
D'où $\lim g = \lim f$ en $a = \ell$.

$\boxed{\text{Théorème de Dini}}$.

• Soit K compact, $f \in C^0(K, \mathbb{R})$, $(f_n) \in C^0(K, \mathbb{R})$, $f_n \searrow$ CVS vers f sur K.
Montrons que f_n CVU vers f sur K.
• Supposons le contraire : $\|f_n\|_\infty \to \ell > 0$. On simplifie le problème : $f = 0$.
Soit x_n tel que $\|f_n\|_\infty = \|f_n(x_n)\|$. On a : $\|f_n(x_n)\| \searrow$. D'autre part, $\|f_n(x_n)\| \to \ell$. Donc $\|f_n(x_n)\| \geq \ell$.
Soit $(x_{\varphi(n)})$ une suite extraite convergente (K compact). Soit x sa limite.
$f_n(x) \to 0$: soit n_0 tel que $\forall\, n \geq n_0$, $\|f_n(x)\| \leq \ell/4$.
f_{n_0} est C^0 en x : soit $\alpha > 0$ tel que $\forall\, u \in A$, $\|u - x\| \leq \alpha \Rightarrow \|f_{n_0}(u) - f_{n_0}(x)\| \leq \ell/2$.
En particulier, $\|f_{n_0}(u)\| \leq 3\ell/4$.
Soit $n_1 > n_0$ tel que $\forall\, n \geq n_1$, $\|x_{\varphi(n)} - x\| \leq \alpha$.
$\|f_{\varphi(n_1)}(x_{\varphi(n_1)})\| \leq \|f_{n_0}(x_{\varphi(n_1)})\| \leq 3\ell/4$.
Or $\|f_n(x_n)\| \geq \ell$. Contradiction.

$\boxed{\text{Etude de } \zeta}$.

$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ est définie sur $]1, +\infty[$.
• Soit $a > 1$.
$\forall\, x > a, \forall\, N \in \mathbb{N}^*, \sum_{n=1}^{N} \left|\frac{1}{n^x}\right| \leq \sum_{n=1}^{N} \left|\frac{1}{n^a}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$.
Il y a donc convergence absolue sur $]a, +\infty[$, donc convergence uniforme ($\mathbb{R}$ complet) ; donc ζ est continue sur $]a +\infty[$.
Conclusion : ζ est continue sur $]1, +\infty[$.
• ζ est limite simple de fonctions décroissantes et convexes, donc elle est décroissante et convexe.
• Le théorème d'inversion des limites sur $]2, +\infty[$ donne la limite en $+\infty$: 1.

$\boxed{\text{Weiertrass } C_{2\pi}}$.

Soit $P_n = c_n\left(\frac{\cos(x) + 1}{2}\right)^n = c_n(\cos(2x))^{2n}$. On a : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $P_n \geq 0$ et $\int_{-\pi}^{\pi} P_n = 1$.
$\forall\, n \in \mathbb{N}, \frac{1}{2} = \int_0^{\pi} P_n \geq \frac{c_n}{2^n} \int_0^{\pi} (\cos(x) + 1)^n \sin(x)\, dx = \frac{c_n}{2^n\,(n+1)} \Big[-(\cos(x) + 1)^{n+1}\Big]_0^{\pi} = \frac{2\,c_n}{n+1}$ d'où $c_n \leq \frac{1}{2}(n+1)$.
On a : $\int_\delta^\pi P_n \leq (n+1) \int_\delta^\pi \cos(2\delta)^{2n}\, dt \leq \pi\, (\cos(2\delta)^2)^n\, (n+1) \to 0$ si $n \to \infty$.
La conclusion est la même que dans le cas polynomial.

> Soit $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ avec $\| \|_\infty$. Soit $T(x)(t) = \int_0^t x(s)\,ds$. Exprimer $T^n(x)(t)$ avec une seule intégrale.

T(x) est la primitive de x nulle en 0.
Taylor avec reste intégral appliqué à $T^n(x)$:

$$T^n(x)(t) = \sum 0 + \int_0^t \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} (T^n(x)^{(n)})(s)\,ds.$$

Or $D \circ T = Id$; donc $D^n \circ T^n = Id$. D'où $T^n(x)(t) = \int_0^t \frac{(x-t)^{n-1}}{n!} x(s)\,ds$.

> $f \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ monotone intégrable. Montrer $\lim_{h \to 0^+} h \sum_{k=0}^{\infty} f(kh) = \int_0^\infty f$

Si f croissante, $\int_0^x f \geq x\, f(0)$ qui ne peut converger que si $f(0) = 0$.
En fait, f décroissante.

$$\int_k^{k+1} f \leq h\, f(kh) \leq \int_{k-1}^{k} f \text{ donc } \int_0^{N+1} f \leq h \sum_{k=0}^{N} f(kh) \leq \int_0^N f + h\, f(0).$$ Pour $h \to 0$, on a la conclusion.

> Soit $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que f et f'' soient de carrés intégrables. Alors f' l'est, et $\left(\int_{\mathbb{R}} f'^2\right)^2 \leq \left(\int_{\mathbb{R}} f^2\right)\left(\int_{\mathbb{R}} f''^2\right)$

- On a : $\int_0^x f'^2 = [ff']_0^x - \int_0^x ff''$ est croissante (car $f'^2 \geq 0$), donc possède une limite ℓ finie ou infinie.

  $g(x) = ff'(x) - ff'(0) + i(x) \to \ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

$|ff''| \leq \frac{1}{2}(f^2 + f''^2)$ donc ff'' est intégrable sur $\mathbb{R}$: i possède une limite en $+\infty$.

Cauchy-Schwarz : $|i(x)| \leq \sqrt{\left(\int_0^x f^2\right)\left(\int_0^x f''^2\right)}$.

- Si $\ell = +\infty$, $ff'(x) \to +\infty$ pour $x \to +\infty$.

  $1 = o(ff'(x))$

  $T\int RC_{CV} \Rightarrow x = o(f^2(x))$ car $(f^2)' = 2\, ff'$.

  Contradiction : f^2 doit être intégrale.
- Donc $\ell \in \mathbb{R}$. f' est de carré intégrable. g possède une limite en $+\infty$, donc ff' aussi.

  Si $ff' \to a > 0$ en $+\infty$, alors $f^2(x) \sim 2\,\ell\, x$. ($T\int RC_{DV}$). Contradiction : f^2 doit être intégrale.

  Donc $ff' \to 0$ en $+\infty$.
- De même sur $\mathbb{R}_-$.
- La conclusion en découle.

$\boxed{\text{Evaluation de l'erreur dans l'interpolation de Lagrange}}$.

• Soit $f \in C^{(n+1)}([a, b], \mathbb{R})$. Soit $(a_0, ..., a_n)$ subdivision de $[a, b]$.
On réalise l'interpolation à partir des points de cette subdivision.
• Soit $x_0 \in [a, b] \setminus \{a_0, ..., a_k\}$
Soit $\varphi : x \to f(x) - A \prod (x - a_k)$, avec A tel que φ s'annule en x_0.
φ s'annule n+2 fois, φ' s'annule n+1 fois, $\varphi^{(2)}$ s'annule n fois, $\varphi^{(n+1)}$ s'annule 1 fois.
$\forall$ x, $\varphi^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - A\ (n+1)!$.
Donc $\exists$ c, $A = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$. Or $A \prod (x_0 - a_k) = f(x_0)$.
D'où $f(x_0)(n+1)! = \prod (x_0 - a_k)\ f^{(n+1)}(c)$.
• Donc $\forall x \in [a, b]$, $|f(x_0)| \leq \dfrac{\prod (x - a_k)\ M_{n+1}}{(n+1)!}$.
• Soit g fonction à interpoler. Soit $f = g - P_{interp}$. $d°P_{interp} = n$ (on interpole n+1 points).
$P_{interp}^{(n+1)} = 0$. D'où $\forall x \in [a, b]$, $|g(x_0) - P_{interp}(x_0)| \leq \dfrac{\prod (x - a_k)\ M_{n+1}}{(n+1)!}$.

$\boxed{\text{Soit } f \in C^n(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \text{ qui a n+1 zéros. Soit P polynôme scindé dans } \mathbb{R}[X] \text{ de degré n. Alors P(D)(f) s'annule}}$.

Soit $\mathcal{P}_n$: "Cette propriété est vraie au rang n."
$\mathcal{P}_0$: f s'annule une fois. $P(D)(f) = \lambda f$ s'annule une fois.
Soit $n \geq 1$. Supposons $\mathcal{P}_{n-1}$.
Soit P de degré n scindé. On le met sous la forme $P = (X - \lambda) Q$.
Soit f qui s'annule n+1 fois. Soit $g = (D - \lambda\, Id) f$.
Soit $h : x \to \exp(-\lambda x) f(x)$. h s'annule n+1 fois. $h'(x) = \exp(-\lambda x) g(x)$ s'annule n fois.
L'hypothèse de récurrence affirme que $\exists c \in \mathbb{R}$, $Q(D)(g)(c) = 0$. Or $Q(D)(g) = P(D)(f)$.
D'où la conclusion.

$\boxed{\text{Soit } f : t \to \sum_{k=0}^{n} \lambda_k t^{\alpha_k} \text{ où } l_k \text{ sont non nuls et } a_k \text{ réels distincts. Alors f a au plus n zéros sur } \mathbb{R}_+^*}$.

Soit $\mathcal{P}_n$: "Cette propriété est vraie au rang n."
$\mathcal{P}_0$: $f = \lambda_0 t^{\alpha_0}$ ne s'annule pas sur $]0, +\infty[$.
Soit $n \geq 1$. Supposons $\mathcal{P}_{n-1}$. Soit $f(t) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k t^{\alpha_k}$. Soit i tel que $\alpha_i = \mathrm{Min}\{a_k\ /\ k \in \{0, ..., n\}\}$.
On a : $f(t) = t^{\alpha_i}\left(\lambda_0 + \sum_{k \neq i} \lambda_k t^{\alpha_k}\right) = t^{\alpha_i}(\lambda_0 + g(t))$ Si f s'annule n+1 fois, $\lambda_0 + g$ aussi, donc g s'annule n fois.
L'hypothèse de récurrence permet de conclure : cela n'est pas possible.
D'où la conclusion.

Formule de Taylor pour $\mathcal{F}(\mathbb{R}^2, F)$.

Soit $f \in C^2(U, F)$ avec U ouvert de $\mathbb{R}^2$.
Soit $a \in U$. Soit $h \in -a + U$.
Soit $\varphi(t) = f(a + th)$.

$$f(a + h) - f(a) = \int_0^1 \varphi'(t)\,dt = \int_0^1 D_hf(a + th)\,dt = \int_0^1 \sum_{i=0}^{2} h_i D_if(a + th)\,dt$$

Or $D_if(a + th) = D_if(a) + t\,d(D_if)_a(h) + \|th\|\varepsilon_i(th)$.

$$f(a + h) - f(a) = \int_0^1 \sum_{i=0}^{2} h_i \left(D_if(a) + \|th\|\varepsilon_i(th) + t \sum_{j=0}^{2} h_j D_jD_if(a)\right) dt$$

$$= df_a(h) + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2} h_i h_j D_jD_if(a) + \int_0^1 \sum_{i=0}^{2} h_i \|th\|\varepsilon_i(th)\,dt.$$

avec $\left\| \int_0^1 \sum_{i=0}^{2} h_i \|th\|\varepsilon_i(th)\,dt \right\| \le \|h\| \int_0^1 t \sum_{i=0}^{2} \|\varepsilon_i(th)\|\,dt \le \|h\|\,\|h\|_\infty \sum_{i=0}^{2} \mathop{Sup}_{t\in[0,1]} \|\varepsilon_i(th)\| \int_0^1 t\,dt = \|h\|^2\,\varepsilon(h).$

Unicité d'une solution l'équation de la chaleur.

Soit (E) : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial f}{\partial t}$. Soient $0 < x_1 < x_2$, et $h > 0$.
Dans $\mathbb{R}^2$, on pose $A = x_1 e_1 + h e_2$, $B = x_1 e_1$, $C = x_2 e_1$, $D = x_2 e_1 + h e_2$.
Soit $K = [A, B] \cup [B, C] \cup [C, D]$. Soit $R = [x_1, x_2] \times [0, h]$.
Soit f solution de (E) nulle sur K. Montrons que f est nulle sur R.
Supposons que f ne soit non nulle. Par exemple, elle admet un maximum non nul.
Soit $\varepsilon = \dfrac{\mathrm{Sup}\, f(R)}{2\,x_2^2}$. Soit $g(x, t) = f(x, t) + \varepsilon\, x^2$.
g admet aussi un maximum non nul sur $R \setminus K$. En effet, $g(x_2, t) = \varepsilon\, x_2^2 < \mathrm{Sup}\, f(R)$. C'est vrai aussi sur tout K.
Soit E le point où g est maximale.
On a : $\dfrac{\partial g}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} \le 0$ et $\dfrac{\partial g}{\partial t} \ge 0$ (car le maximum est sur $R \setminus K$).
$0 \le \dfrac{\partial g}{\partial t} = \dfrac{\partial f}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} - 2\,\varepsilon < 0$. Contradiction.
Conclusion : $f(R) = \{0\}$.

Gradient et laplacien en coordonnées polaires.

Soit $f \in C^2(U, \mathbb{R})$ avec U ouvert de $\mathbb{R}^2$.
Soit $\vec{e}_r : \theta \to (\cos(\theta), \sin(\theta))$.
Soit $\vec{e}_\theta : \theta \to (-\sin(\theta), \cos(\theta))$.
Soit $F : (r, \theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = f(r\,\vec{e}_r(\theta))$.

$$\frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta) = D_1f(r\,\vec{e}_r(\theta))\cos(\theta) + D_2f(r\,\vec{e}_r(\theta))\sin(\theta) = < \vec{\mathrm{grad}}\, f(r\,\vec{e}_r) \mid \vec{e}_r(\theta) >$$

$$\frac{\partial F}{\partial \theta}(r, \theta) = -D_1f(r\,\vec{e}_r(\theta))\,r\sin(\theta) + D_2f(r\,\vec{e}_r(\theta))\,r\cos(\theta) = < r\,\vec{\mathrm{grad}}\, f(r\,\vec{e}_r(\theta)) \mid \vec{e}_\theta(\theta) >$$

Donc $\dfrac{\partial F}{\partial r}(r, \theta)\,\vec{e}_r + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial F}{\partial \theta}(r, \theta)\,\vec{e}_\theta = \vec{\mathrm{grad}}\, f(r\,\vec{e}_r(\theta))$

A partir de maintenant, notations abrégées.

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial F}{\partial r}\right) = D_1^2 f\, r\cos^2\theta + D_2D_1f\, r\cos\theta\sin\theta + D_1D_2f\, r\cos\theta\sin\theta + D_2^2 f\, r\sin^2\theta + \frac{\partial F}{\partial r}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} = -r\frac{\partial F}{\partial r} + D_1^2 f\; r^2\sin^2(\theta) - D_1D_2f\, r^2\sin(\theta)\cos(\theta) - D_1D_2f\, r^2\cos(\theta)\sin(\theta) + D_2^2\, f\, r^2\cos^2(\theta).$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial F}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} = D_1^2 f + D_2^2 f = \Delta f.$$

Champ rayonné par un dipôle.

• $\vec{A} = \dfrac{\mu_0\, q\, \vec{v}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{4\,\pi\, r}\,\vec{e}_z = \dfrac{\mu_0\, \dot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{4\,\pi\, r}\,\vec{e}_z.$ (forme intégrée de la relation de Poisson)

• Jauge de Lorentz : $\mathrm{div}\,\vec{A} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial V}{\partial t} = 0$. Or $\mathrm{div}(f(r)\,\vec{e}_z) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(r) \cdot \vec{e}_z$, et $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(r) = f'(r)\,\vec{e}_r$.

D'où $\dfrac{\partial V}{\partial t} = -\,c^2\left(-\dfrac{\mu_0\, \dot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{4\,\pi\, r^2} - \dfrac{\mu_0\, \ddot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{4\,\pi\, r\, c}\right)\vec{e}_r\,\vec{e}_z \approx \dfrac{c\,\mu_0\, \ddot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)\cos\theta}{4\,\pi\, r}$. Donc $V = \dfrac{c\,\mu_0\, \dot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)\cos\theta}{4\,\pi\, r}$

• $\vec{B} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(f(r)\,\vec{e}_z) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(r) \wedge \vec{e}_z = -\,f'(r)\sin\theta\,\vec{e}_\varphi$. D'où $\vec{B} = \dfrac{\mu_0\, \ddot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)\sin\theta}{4\,\pi\, r\, c}\,\vec{e}_\varphi$.

• $\vec{E} = -\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V - \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \dfrac{\mu_0\, \ddot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)\cos\theta}{4\,\pi\, r}\,\vec{e}_r - \dfrac{\mu_0\, \ddot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{4\,\pi\, r}\,\vec{e}_z$. Or $\vec{e}_z = \cos\theta\,\vec{e}_r - \sin\theta\,\vec{e}_\theta$. D'où $\vec{E} = = \dfrac{\mu_0\, \ddot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)\sin\theta}{4\,\pi\, r}\,\vec{e}_\theta$.

• $d\mathcal{P} = R\, dS = \dfrac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}\, dS$ or $\vec{B} = \dfrac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c}$

$d\mathcal{P} = \dfrac{E^2}{c\,\mu_0}\, r^2\, d\Omega = \dfrac{\mu_0\, \ddot{p}^2\left(t - \frac{r}{c}\right)\sin^2\theta}{16\,\pi^2\, c}\, d\Omega$. Donc $\mathcal{P} = 2\pi\displaystyle\int_0^\pi \dfrac{\mu_0\, \ddot{p}^2\left(t - \frac{r}{c}\right)\sin^3\theta\, d\theta}{16\,\pi^2\, c} = \dfrac{\mu_0\, \ddot{p}^2\left(t - \frac{r}{c}\right)}{8\,\pi\, c}\int_0^\pi \sin^3\theta\, d\theta.$

Or la valeur moyenne de $\sin^3$ est $\dfrac{4}{3\pi}$. D'où $\mathcal{P} = \dfrac{\mu_0\, \ddot{p}^2\left(t - \frac{r}{c}\right)}{6\,\pi\, c}$: formule de Larmor.

Réflexion d'une OPPM sur un plan métallique sous incidence normale.

• Etude de l'onde transmise : $\vec{j} = \sigma\,\vec{E}$.

Maxwell :

$-\,i\,\vec{k} \wedge \vec{E} = -\,i\,\omega\,\vec{B}$	(MF)	
$-\,i\,\vec{k} \wedge \vec{B} = \mu_0\,\sigma\,\vec{E}$	(MA)	(ARQP)
$-\,i\,\vec{k}\,\vec{E} = 0$	(MG)	
$-\,i\,\vec{k}\,\vec{B} = 0$	(MΦ)	

$\vec{k} \wedge (\mathrm{MF}) \Rightarrow -\,i\,(\vec{k}\,\vec{E})\,\vec{k} + i\,\vec{k}^2\,\vec{E} = -\,i\,\omega\,\vec{k} \wedge \vec{B} = \omega\,\mu_0\,\sigma\,\vec{E}$.

D'où $k^2 = -\,i\,\omega\,\mu_0\,\sigma$.

$k = (1 - i)\sqrt{\dfrac{\mu_0\,\sigma\,\omega}{2}} = \dfrac{1 - i}{\delta}$.

Donc $\vec{E}_t(x, t) = E_{t_0}\cos(\omega_t\, t - k_t\, x)\exp\left(-\dfrac{x}{\delta}\right)$ avec $k_t = \mathrm{Re}(k)$.

• Onde incidente : $\vec{E}_i(\vec{r}, t) = \underline{E}_{i_0}\exp(i(\omega\, t - \vec{k}\,\vec{r}))\,\vec{e}_y$.

Onde réfléchie : $\vec{E}_r(\vec{r}, t) = \underline{E}_{r0}\exp(i(\omega_r\, t - \vec{k}_r\,\vec{r}))\,\vec{e}_y$.

Onde transmise : $\vec{E}_t(\vec{r}, t) = \underline{E}_{r0}\exp(i(\omega_r\, t - \vec{k}_t\,\vec{r}))\,\vec{e}_y$.

• $\forall$ P $\in$ plan, $\vec{E}_i(\overrightarrow{OP}, t) + \vec{E}_r(\overrightarrow{OP}, t) = \vec{E}_t(\overrightarrow{OP}, t)$.

$E_{i_0}\cos(\omega\, t) + E_{t_0}\cos(\omega_t\, t) = E_{r0}\cos(\omega_r\, t)$ La famille $t \rightarrow \cos(\omega x)$ étant libre, $\omega = \omega_r = \omega_t$.

$\vec{k}\,\overrightarrow{OP} = \vec{k}_r\,\overrightarrow{OP} = \vec{k}_t\,\overrightarrow{OP}$ donc $(\vec{k} - \vec{k}_r)$ est orthogonal au plan ; Donc $\vec{k}_r = -\,\vec{k}$ (dans le vide).

D'autre part, $\vec{k}_t = k_t\,\vec{e}_x$.

• $\underline{E}_{i_0} + \underline{E}_{r_0} = \underline{E}_{t_0}$. (1) Continuité de $\vec{E}$

$\dfrac{1}{c}\,\underline{E}_{i_0} - \dfrac{1}{c}\,\underline{E}_{r_0} = \dfrac{1 - i}{\delta\,\omega}\,\underline{E}_{t_0}$. (2) Continuité de $\vec{B}$

$(1)\,\dfrac{i - 1}{\delta\omega} + (2) \Rightarrow \left(\dfrac{i - 1}{\delta\omega} + \dfrac{1}{c}\right)\underline{E}_{i_0} + \left(\dfrac{i - 1}{\delta\omega} - \dfrac{1}{c}\right)\underline{E}_{r_0} = 0.$

Donc $\underline{r} = -\dfrac{\dfrac{i - 1}{\delta\omega} + \dfrac{1}{c}}{\dfrac{i - 1}{\delta\omega} - \dfrac{1}{c}} = -\dfrac{\dfrac{1 + i}{2c} + \dfrac{1}{\delta\omega}}{-\dfrac{1 + i}{2c} + \dfrac{1}{\delta\omega}} = \dfrac{1 + (1 + i)\dfrac{\delta\omega}{2c}}{1 + (1 + i)\dfrac{\delta\omega}{2c}} \approx -\,1 + (1 + i)\,\dfrac{\delta\omega}{c}$ pour $\delta\omega << c$.

Guide d'onde.

On se place dans le mode TE_{0p}.
$\vec{E} = E_0(y)\cos(\omega t - kz)\,\vec{e}_x$.

D'Alembert : $E_0''(y)\cos(\omega t - kz) - k^2 E_0(y)\cos(\omega t - kz) = -E_0(y)\dfrac{\omega^2}{c^2}\cos(\omega t - kz)$

$$E_0''(y) = -\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)E_0(y) = -\alpha^2 E_0(y).$$

Conditions limites : $E_0(b) = E_0(-b) = 0$.

Si $\alpha \in i\,\mathbb{R}$, $E_0(y) = A\exp(i\,\alpha\,x) + B\exp(-i\,\alpha\,x)$.

Il faut dans ce cas : $A\exp(i\,\alpha\,b) + B\exp(-i\,\alpha\,b) = 0$.
$A\exp(-i\,\alpha\,b) + B\exp(i\,\alpha\,b) = 0$.

Ce qui implique $A^2 = B^2$ puis $A = -B$: comme $\alpha\,b \neq 0$, cela ne peut être vrai.

Donc $\alpha \in \mathbb{R}_+$. $E_0(y) = A\cos(\alpha\,x) + B\sin(\alpha\,x)$. Il faut : $A\cos(\alpha\,b) + B\sin(\alpha\,b) = 0$.
$A\cos(\alpha\,b) - B\sin(\alpha\,b) = 0$.

Donc $A\cos(\alpha\,b) = 0$ et $B\sin(\alpha\,b) = 0$.
Si $\sin(\alpha\,b) = 0$, $A = 0$ et $B \neq 0$. $\alpha b = p\pi$ avec $p \in \mathbb{Z}$
Si $\cos(\alpha\,b) = 0$, $A \neq 0$ et $B = 0$. $\alpha b = p\pi$ avec $p \in \mathbb{Z} + 1/2$.

Relation de dispersion : $\dfrac{p^2\pi^2}{b^2} - \dfrac{\omega^2}{c^2} + k^2 = 0 \Rightarrow d\omega\,\omega = c^2\,dk\,k$. Donc $v_g\,v_\varphi = c^2$. Soit $\lambda_0 = \dfrac{2\pi}{k} = \dfrac{2\pi c}{\omega}$.

$v_\varphi = \dfrac{\omega}{k} = \dfrac{\omega}{\sqrt{\dfrac{\omega^2}{c^2} - \dfrac{p^2\pi^2}{b^2}}} = \dfrac{c}{\sqrt{1 - \dfrac{\lambda_0^2 p^2}{4b^2}}}$. On déduit $v_g = c\sqrt{1 - \dfrac{\lambda_0^2 p^2}{4b^2}}$.

Mais pourquoi $v_g = \dfrac{d\omega}{dk}$?

Soit un signal $s(0, t) = A\cos(\omega_1 t)\cos(\omega_2 t)$ avec $\omega_1 >> \omega_2$.
$\omega_1 \to$ porteuse $\omega_2 \to$ enveloppe.

On a : $s(0, t) = \dfrac{A}{2}\cos((\omega_1 + \omega_2)t) + \dfrac{A}{2}\cos((\omega_1 - \omega_2)t)$.

$$s(x, t) = \frac{A}{2}\cos((\omega_1 + \omega_2)t - k(\omega_1 + \omega_2)x) + \frac{A}{2}\cos((\omega_1 - \omega_2)t - k(\omega_1 - \omega_2)x)$$
$$= A\cos\left(\omega_1\,t - \frac{1}{2}(k(\omega_1 + \omega_2) + k(\omega_1 - \omega_2))x\right)\cos\left(\omega_2\,t - \frac{1}{2}(k(\omega_1 + \omega_2) - k(\omega_1 - \omega_2))x\right)$$

La vitesse de phase est la vitesse de la porteuse : c'est $v_\varphi = \dfrac{\omega_1}{k(\omega_1)}$.

La vitesse de groupe est la vitesse de l'enveloppe : $v_g = \dfrac{2\,\omega_2}{k(w_1 + \omega_2) - k(\omega_1 - \omega_2)} = \dfrac{2\,\omega_2}{2\,\omega_2\,\dfrac{dk}{d\omega}(\omega_1)} = \dfrac{d\omega}{dk}(\omega_1)$.

Comme v_g est indépendant de ω_2, on peut utiliser le principe de superposition, et généraliser ce résultat à tout signal modulé à la pulsation ω_1.

Propagation dans un cable coaxial.

• Soit un élément de cable de longueur dx. Il y a une capacité $dC = \Gamma\, dx$ (parallèle) et une inductance $dL = \Lambda\, dx$ (série).
Monsieur Kirchhoff affirme qu'alors, à une date t :

$$U(x) = U(x + dx) + \Lambda\, dx \frac{dI}{dt}$$

et $$I(x) = I(x + dx) + \Gamma\, dx \frac{dU}{dt}$$

Cela s'écrit aussi : $\frac{\partial U}{\partial x} = -\Lambda \frac{\partial I}{\partial t}$ et $\frac{\partial I}{\partial x} = -\Gamma \frac{\partial U}{\partial t}$ donc $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \Lambda\Gamma \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$.

Donc la vitesse de propagation est $\frac{1}{\sqrt{\Lambda\Gamma}}$.

• Plaçons une résistance R au bout du circuit (pour x = 0).
$U(x, t) = U_1(x, t) + U_2(x, t)$ $\qquad I = I_1(x, t) + I_2(x, t)$
$U_1(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right)$ $I_1(x, t) = \Gamma\, c\, f\left(t - \frac{x}{c}\right)$.
$U_2(x, t) = g\left(t + \frac{x}{c}\right)$ $I_2(x, t) = -\Gamma\, c\, g\left(t + \frac{x}{c}\right)$.
A la limite : $U_1(0, t) + U_2(0, t) = R\,(I_1(0, t) + I_2(0, t))$.
C'est-à-dire : $(1 - R\Gamma c)\, f(t) = -(1 + R\Gamma c)\, g(t)$.

$$r = \frac{g}{f} = \frac{1 - R\Gamma c}{1 + R\Gamma c}.$$

On remarque que :

On remarque que :	$R = 0$	$\Rightarrow r = 1$	(court-circuit)
	$R = \infty$	$\Rightarrow r = -1$	(coupe-circuit)
	$R = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}$	$\Rightarrow r = 0$	(résistance caractéristique du système)

Equation intrinsèque : $R^2 + s^2 = a^2$.

$\frac{1}{R} = \gamma = \frac{d\alpha}{ds}$ donc $\left(\frac{ds}{d\alpha}\right)^2 + s^2 = a^2$.

$$2 \frac{ds}{d\alpha} \frac{d^2 s}{d\alpha^2} + 2\, s \frac{ds}{d\alpha} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 s}{d\alpha^2} = -s$$

$s = A \cos(\alpha) + B \sin(\alpha)$.

Supposons $s = \cos(\alpha)$. On a alors $R = \frac{ds}{d\alpha} = -\sin \alpha$.

$$\frac{dx}{d\alpha} = R \cos(\alpha) = -\sin \alpha \cos \alpha = -\frac{1}{2} \sin(2\alpha) \Rightarrow x = \frac{1}{4} \cos(2\alpha).$$

$$\frac{dy}{d\alpha} = R \sin(\alpha) = -\sin^2\alpha = -\frac{1 - \cos(2\alpha)}{2} \Rightarrow y = -\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4} \sin(2\alpha).$$

Il s'agit d'une cycloïde.

$\boxed{\text{Equation intrinsèque : } R = 1 + s^2}$.

• $\dfrac{ds}{d\alpha} = 1 + s^2 \Rightarrow \dfrac{ds}{1 + s^2} = d\alpha \Rightarrow \text{Arctan}(s) = \alpha$; $s = \tan\alpha$.

$R = \dfrac{ds}{d\alpha} = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha = 1 + s^2$

• $\dfrac{dx}{ds} = \cos(\alpha) = \dfrac{1}{\sqrt{1+s^2}} \Rightarrow x = \text{Argsh}(s)$.

$\dfrac{dy}{ds} = \sin(\alpha) = \sqrt{\dfrac{s^2}{1 + s^2}} = \dfrac{s}{\sqrt{1 + s^2}} \Rightarrow y = \sqrt{1 + s^2}$.

$y = \sqrt{1 + \text{sh}^2(x)} = \text{ch}(x)$: c'est bien l'équation d'une chaînette.

• $\dfrac{dx}{d\alpha} = R\cos(\alpha) = \dfrac{1}{\cos\alpha} \Rightarrow x = \ln\left|\tan\left(\dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right| = \ln\left|\dfrac{1}{\cos(\alpha)} + \tan(\alpha)\right|$

$\dfrac{dy}{d\alpha} = R\sin(\alpha) = \dfrac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha} \Rightarrow y = \dfrac{1}{\cos\alpha}$.

Donc $x = \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right) = \text{Argch}\, y$: c'est bien l'équation d'une chaînette.

$\boxed{\text{Expression de } \gamma \text{ en fonction des dérivées de } f}$.

• Pour les matheux : Soit $f \in C^2(U, \mathbb{R}^2)$, paramétrage non normal de Γ.

$f'(t) = \dfrac{dM}{dt} = \dfrac{dM}{ds}\dfrac{ds}{dt} = \|f'(t)\|\, \vec{T}$

$f''(t) = \dfrac{d^2M}{ds^2}\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2 + \dfrac{dM}{ds}\dfrac{d^2s}{dt^2} = \dfrac{d^2s}{dt^2}\vec{T} + \left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2 \gamma\, \vec{N}$.

$\|\text{dét}(f''(t), f'(t))\| = \|f'(t)\|^3\, \gamma$.

• Pour les physiciens : dans le repère de Frenet, $\vec{a} = \dfrac{d\bar{v}}{dt}\vec{T} + \dfrac{v^2}{\rho_C}\vec{N}$ et $\vec{v} = \bar{v}\,\vec{T}$.

Donc $\|\vec{a} \wedge \vec{v}\| = \dfrac{\|v\|^3}{\rho_C}$, d'où $\rho_C = \dfrac{\|\vec{v}\|^3}{\|\vec{a} \wedge \vec{v}\|}$.

Théorème de Poincaré.

• Soit $E = \mathbb{R}^n$ ev euclidien.
Soit f forme différentielle C^1 fermée sur U ouvert étoilé. Montrons que f est exacte.
On a : $f \in C^1(U, \mathcal{L}(E, \mathbb{R}))$.
Soit $a \in U$ tel que $\forall x \in U$, $[a, x] \subset U$.
• Supposons que g soit une primitive de f : dg = f, c'est-à-dire $D_h g(a) = dg_a(h) = f(a)(h)$.

$$\forall h \in -a + U,\ g(a + h) - g(a) = \int_0^1 D_h g(a + th)\, dt = \int_0^1 f(a + th)(h)\, dt.$$

• Soit $g \in C^2(U, \mathbb{R})$ définie par : $\forall h \in -a + U$, $g(a + h) = \int_0^1 f(a + th)(h)\, dt$. Montrons qu'il s'agit d'une primitive de f.

Soit $F \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ champ de vecteur associé à f. On a : $\langle F(a) | b \rangle = f(a)(b)$.

Donc $g(a + h) = \int_0^1 \langle F(a + th) | h \rangle\, dt = \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 h_k F_k(a + th)\, dt$.

On a : $D_1 g(a + h) = \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 h_k D_1F_k(a + th)\, dt + \int_0^1 F_1(a + th)\, dt$.

On a : $D_1 g(a + h) = \int_0^1 \left(F_1(a + th) + \sum_{k=0}^{n} h_k D_kF_1(a + th) \right) dt = \int_0^1 (F_1(a + th) + D_hF_1(a + th))dt$.

$D_1 g(a + h) = \left[t F_1(a + th) \right]_0^1 = F_1(a + h)$.
De même pour $D_2 g, \ldots, D_n g$.

On a : $\langle \vec{\text{grad}}\, g\, (a + h) \mid \vec{k} \rangle = \sum_{k=0}^{n} \langle D_i g(a + h) \mid \vec{k} \rangle = \sum_{k=0}^{n} \langle F_i(a + h) | \vec{k} \rangle = \langle F(a + h) | \vec{k} \rangle$.

Donc $\vec{\text{grad}}\, g = F$. g est bien une primitive de F.

On a : $dg = \sum_{k=0}^{n} D_k g\, dx_k = \sum_{k=0}^{n} F_k\, dx_k = f$.

Extrémas liés.

• Soit U ouvert de $\mathbb{R}^3$. Soient F et $\varphi \in C^1(U, \mathbb{R})$. Soient $\mathcal{S} = \{ X \in U \,/\, F(X) = 0 \}$ et $X_0 \in \mathcal{S}$.
Supposons que $\vec{\text{grad}}\, F(X_0) \neq 0$ et que X_0 soit un maximum local de φ sur $\mathcal{S}$.
Montrons que $\vec{\text{grad}}\, \varphi(X_0)$ et $\vec{\text{grad}}\, F(x_0)$ est liée.
• Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ description paramétrique de $\mathcal{S}$.
$X_0 = (x_0, y_0, z_0) = f(u_0, v_0) = f(P_0)$.
P_0 est un maximum local de $\varphi \circ f$.
Donc $d(\varphi \circ f)_{P_0} = 0 = d\varphi_{X_0} \circ df_{P_0}$.
$\forall A$, $d\varphi_{X_0}(df_{(u0, v0)}(A)) = \langle \vec{\text{grad}}\, \varphi(X_0) | df_{P_0}(A) \rangle = 0$.
• $F \circ f = 0 \Rightarrow \forall P$, $dF_{f(P)} \circ df_P = 0$
En particulier, $dF_{X_0} \circ df_{P_0} = 0$
donc $\forall A$, $\langle \vec{\text{grad}}\, F(X_0) \mid df_{P_0}(A) \rangle = 0$: le plan tangent est orthogonal à $\vec{\text{grad}}\, F(X_0)$.
Donc $\vec{\text{grad}}\, \varphi(X_0)$ est lié à $\vec{\text{grad}}\, F(X_0)$.

Solution permanente de l'équation de diffusion pour une boule de σ uniforme.

Soit une boule de rayon R de σ uniforme. Soit T sa température permanente. On impose T(R).
On a, en régime permanent : $\text{div}\, \vec{j}_{th} - \sigma = 0$.
La symétrie veut que $\vec{j}_{th} = j(r)\, \vec{e}_r$. En calculant le flux sur une boule de rayon r,

$$j(r)\, 4\, \pi\, r^2 = \frac{4}{3} \pi\, r^3\, \sigma \qquad \text{D'où } j(r) = \frac{\sigma\, r}{3} = -K \frac{dT}{dr}.$$

On intègre entre R et r : $T(r) - T(R) = \dfrac{\sigma(R^2 - r^2)}{6K}$.

Ondes de température.

Soit un milieu semi-infini de diffusibilité D sans sources.

On a : $D\,\Delta T = \dfrac{\partial T}{\partial t}$.

On pose $T(0, t) = T_0 \exp(i(\omega t))$

On cherche k tel que $T(x, t) = T_0 \exp(i(\omega t - k x))$

On obtient : $-D k^2 = i\,\omega$ $\quad k = (1 - i)\sqrt{\dfrac{\omega}{2D}}$. $\quad$ Vitesse de phase : $v_\varphi = \dfrac{\omega}{k} = \sqrt{2D\omega}$.

Théorème de Carathéodory : Soient d et m $\in \mathbb{N}$.
Montrer que si $x \in \mathbb{R}^d$ est barycentre de $\{(x_i, \lambda_i) / i \in \{1, ..., m\}\}$, il existe $(y_1, ..., y_{d+1}) \subset \{x_i\}$ et $(\mu_1, ... \mu_{d+1})$ tels que x soit barycentre de $\{(y_i, \mu_i) / i \in \{1, ..., d+1\}\}$

• Si $d+1 \geq m$, la propriété est évidente.
• Supposons $d+1 < m$. Soit x un tel vecteur.
∗ On cherche (μ_i) non tous nuls tels que

$$\sum \mu_i = 0$$
$$\sum \mu_i x_i = 0$$

Soit $f : (\mu_1, ..., \mu_m) \in \mathbb{R}^m \to (\sum \mu_i, \sum \mu_i x_i) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$. f est linéaire.
Théorème du rang : $m = \dim \mathrm{Ker}\, f + \mathrm{rg}\, f \leq \dim \mathrm{Ker}\, f + d + 1$.
Donc $\dim \mathrm{Ker}\, f \geq m - d - 1 > 0$. f non injective ; donc il existe bien de tels (μ_i).
∗ Donc $\forall A \in \mathbb{R}$, $x = \sum (\lambda_i - A\,\mu_i) x_i$.

Si l'on veut avoir des coefficients positifs (et si λ_i étaient positifs), on peut prendre $A = \mathrm{Inf}\left\{-\dfrac{\lambda_i}{\mu_k} / \mu_k < 0\right\}$.

Equations qui régissent le fonctionnement d'un moteur à courant continu. Schéma-bloc.

• Soit un moteur à courant continu avec N fils de longueur a, baignant dans un champ B d'un aimant, sur un cylindre de rayon c.
L'ensemble du circuit a une résistance équivalente R et une inductance équivalente L.

∗ Pour chaque fil, la force de Laplace est F = I a B. Donc le moment total est $\mathscr{C}_m = N\ I\ a\ B\ c$.

∗ Le moteur est alimenté par une tension U : $U = e + R\ I + L\dfrac{dI}{dt}$, où e est la f.e.m. dûe à la variation de Φ.

∗ On a (induction de Lorentz) : $e = N\ V\ B\ a = N\ a\ c\ B\ \omega$.

∗ L'arbre moteur fait tourner un moment d'inertie J : $J\dfrac{d\omega}{dt} = \mathscr{C}_m$ (pas de frottements)

• En applicant l'opérateur de Laplace, on obtient (conditions initiales nulles) :

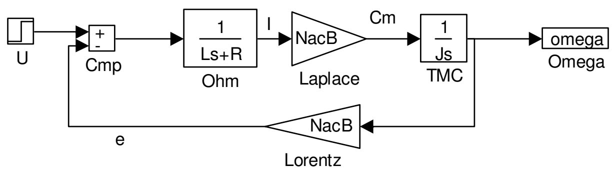
$C_m(p) = N\ a\ B\ c\ I(p)$. (force de Laplace)

$U(p) = E(p) + R\ I(p) + L\ p\ I(p) \quad \Rightarrow I(p) = \dfrac{U(p) - E(p)}{R + L\ p}$. (loi d'Ohm)

$E(p) = N\ a\ c\ B\ \Omega(p)$. (induction de Lorentz)

$J\ p\ \Omega(p) = C_m(p). \quad \Rightarrow \Omega(p) = \dfrac{C_m(p)}{J\ p}$. (théorème du moment cinétique)

Entrée : on cherche $H(p) = \dfrac{\Omega(p)}{U(p)}$.
D'où le schéma bloc de droite.



On a : $H(p) = \dfrac{\dfrac{NacB}{(R + Lp)Jp}}{1 + \dfrac{N^2a^2c^2B^2}{(R + Lp)Jp}} = \dfrac{NacB}{JLp^2 + JRp + N^2a^2c^2B^2}$.

$$H(p) = \frac{\dfrac{1}{NacB}}{1 + \dfrac{JR}{N^2a^2c^2B^2}\,p + \dfrac{JL}{N^2a^2c^2B^2}\,p^2}.$$

• $K = \dfrac{1}{NacB}$ homogène à $s^{-1}.\ V^{-1} = Wb^{-1}$.

$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{N^2a^2c^2B^2}{JL}} = \dfrac{NacB}{\sqrt{JL}}$ homogène à s^{-1}.

$\xi = \dfrac{1}{2}\dfrac{NacB}{\sqrt{JL}}\dfrac{JR}{N^2a^2c^2B^2} = \dfrac{R}{2NacB}\sqrt{\dfrac{J}{L}}$ homogène à 1.

Application numérique :

N = 10 a = 1 cm c = 0,5 cm B = 0,5 T J = 0,1 kg m² L = 0,01 H R = 100 Ω.

Alors

$K = 4000$ rad s^{-1} V^{-1}.

$\omega_0 = 0{,}0079$ Hz

$\xi = 632\ 455$ (il n'y a pas de dépassement)

• Simplification : inductance nulle.

$H(p) = \dfrac{\dfrac{1}{NacB}}{1 + \dfrac{JR}{N^2a^2c^2B^2}\,p}$. Système du 1er ordre.

K inchangé. $\tau = 5$ ans !

$\boxed{\text{p premier impair et q diviseur premier de } 2^p - 1. \text{ Alors } q \equiv 1\ [2p]}$.

• q est impair car diviseur d'un nombre impair ; donc $2 | q - 1$.
• Montrons que $p | q - 1$. On a : $q | 2^p - 1$ donc $2^p \equiv 1$ [q].
Dans $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$, gr(2) est un sous-groupe dont le cardinal divise p, qui est premier. gr(2) ≠ {2} car 0 ∈ gr(2).
Donc #gr(2) = p.
Le cardinal d'un sous-groupe divise le cardinal du groupe (théorème de Lagrange) donc $p | \#(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}^*) = q - 1$.
• $p | q - 1$, $2 | q - 1$ et $p \wedge 2 = 1$ implique $q \equiv 1$ [2p].

$\boxed{A, B, X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ tels que } AX = XB \text{ et } X \neq 0. \text{ Montrer que A et B ont une valeur propre commune}}$.

• Montrons par récurrence sur n que $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^nX = XB^n$.
Soit $n \geq 2$. Supposons la propriété vraie au rang $n - 1$.
Alors $A^nX = A(A^{n-1}X) = A(XB^{n-1}) = (AX)B^{n-1} = XB^n$.
• Donc $\forall P \in \mathbb{C}[X]$, $P(A)\, X = X\, P(B)$.
Donc $X\, \chi_A(B) = 0$; comme X est non nul, $\chi_A(B)$ n'est pas inversible.
Donc $\exists \lambda \in \mathrm{Sp}\, A$, $\det(B - \lambda I_n) = 0$; donc $\lambda \in \mathrm{Sp}\, A \cap \mathrm{Sp}\, B$.

$\boxed{\text{Inverse d'une série entière}}$.

• Soit (a_n) et f sa série entière associée de rayon $R_f > 0$ avec $a_0 \neq 0$.
Montrons que 1/f admet un développement en série entière.

∗ Supposons gf = 1 avec $g(t) = \sum b_n t^n$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} a_k\, b_{n-k} = \delta_{1n}$.
Ainsi, $a_0 b_0 = 1$, $a_0b_1 + a_1b_0 = 0$, etc... On peut ainsi définir b_n par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = \delta_{1n} - \frac{1}{a_0} \sum_{k=1}^{n} a_k\, b_{n-k}$$

∗ Soit (b_n) ainsi défini. Montrons que $R_g > 0$. On suppose $a_0 = 1$ pour simplifier.
$R_f > 0$ donc $\exists A > 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq A^n$.

$|b_0| = |a_0| \leq 1$. $|b_1| \leq |a_1b_0| \leq A$. $|b_2| \leq |a_1b_1| + |a_2b_0| \leq 2\, A^2$

Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|b_n| \leq 2^n A^n$ par récurrence sur n.
Soit $n \geq 1$. $|b_n| \leq \sum_{k=1}^{n} A^k\, 2^{n-k} A^{n-k} \leq A^n \sum_{k=0}^{n-1} 2^k = A^n \dfrac{1-2^n}{1-2} \leq 2^n A^n$. D'où la conclusion : $R_g > 0$.
• Supposons que $R_f \geq a$ et que f ne s'annule pas sur D(0, a). Montrons que $R_g \geq a$.
On se rappelle de la relation : $\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(r\, e^{it})\, dt = a_n r^n$.

Soit $g_r(t) = \dfrac{1}{f(r\, e^{it})}$. g_r est C^∞ car $f(r\, e^{it})$ est C^∞ (calcul des dérivées).

∗ Soit $n \in \mathbb{Z}$. Soit $u_n(r) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-int}}{f(r\, e^{it})}\, dt$. La fonction de 2 variables r et t est continue sur $[-a, a] \times [-\pi, \pi]$

$\forall r > 0$, $u_n'(r) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-int}}{f(r\, e^{it})^2}\, f'(r\, e^{it})\, e^{it}\, dt$, en notant $f'(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_n\, (n-1)\, x^{n-1}$.

Intégration par parties : $u_n'(r) = \dfrac{1}{2i\pi r} \Big[f(r\, e^{it})\, e^{-int} \Big]_{-\pi}^{\pi} + \dfrac{1}{r} \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(r\, e^{it})\, e^{-int}\, dt$.

D'où $u_n'(r) = \dfrac{n}{r} u_n(r)$. Donc $\exists K_n \in \mathbb{R}$, $\forall r > 0$, $u_n(r) = K_n\, r^n$.

∗ $\forall n < 0$, u_n est continue sur un voisinage de 0. Donc $K_n = 0$.

∗ $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall r \in [0, a[$, $\dfrac{1}{f(r\, e^{it})} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} K_n\, r^n\, e^{int}$.   ($g_r$ est C^∞ donc sa série de Fourier converge abs. donc pct.)

Donc $\forall z \in D(0, a)$, $\dfrac{1}{f(z)} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} K_n\, z^n$. D'où la conclusion.

$\boxed{\text{Formules de Cardan}}$.

• Soit $P = a X^3 + b X^2 + c X + d \in \mathbb{R}[X]$.
On pose $Q = P \circ (X - k)$ avec k tel que Q n'ait pas de terme en X^2.
On a : $3 a k = b$, d'où la valeur de k.

• Soit $Q = X^3 + pX + q$. Soient x_1, x_2, x_3 ses racines.
On a : $\Sigma x_1 = 0$, $\Sigma x_1x_2 = p$ et $x_1x_2x_3 = -q$.
Soient $\theta_1 = (x_1 + jx_2 + j^2x_3)^3$ et $\theta_2 = (x_1 + j^2x_2 + jx_3)^3$.

• $\theta_1\theta_2 = ((x_1 + jx_2 + j^2x_3)(x_1 + j^2x_2 + jx_3))^3 = (\Sigma x_1^2 - \Sigma x_1 x_2)^3$.
Or $(\Sigma x_1)^2 = \Sigma x_1^2 + 2 \Sigma x_1 x_2$. Donc $\Sigma x_1^2 = - 2 p$.
Donc $\theta_1\theta_2 = (- 3p)^3 = - 27 p^3$.

• $\theta_1 + \theta_2 = 2 \Sigma x_1^3 - 3 \Sigma x_1^2x_2 + 12 x_1x_2x_3$.

$$\left.\begin{array}{l} x_1^3 + p x_1 + q = 0 \\ x_2^3 + p x_2 + q = 0 \\ x_3^3 + p x_2 + q = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \Sigma x_1^3 + p \Sigma x_1 + 3 q = 0 \Rightarrow \Sigma x_1^3 = - 3 q.$$

$(\Sigma x_1^2)(\Sigma x_1) = \Sigma x_1^3 + \Sigma x_1^2x_2 \Rightarrow \Sigma x_1^2x_2 = - \Sigma x_1^3 = 3 q$.
D'où $\theta_1 + \theta_2 = - 6 q - 9 q - 12 q = - 27q$.

• Donc θ_1 et θ_2 sont racines de : $R = X^2 + 27 q X - 27 p^3$.
$\Delta = 27^2 q^2 + 4 \times 27 p^3 = 27(4 p^3 + 27 q^2)$.

• Appelons a_1 et a_2 des racines cubiques de θ_1 et θ_2.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + jx_2 + j^2x_3 = a_1 \\ x_1 + j^2x_2 + jx_3 = a_2 \end{cases} \quad \text{Alors } x_1 = \frac{a_1 + a_2}{3},\ x_2 = \frac{j^2a_1 + ja_2}{3} \text{ et } x_3 = \frac{ja_1 + j^2a_2}{3}.$$

• Si $\Delta < 0$, θ_1 et θ_2 sont complexes conjugués. Soit a une racine cubique de θ_1.
Alors $\bar{a}$ est une racine cubique de θ_2. On prend $a_1 = a$ et $a_2 = \bar{a}$.
Dans ce cas, $x_1 \in \mathbb{R}$.
Le conjugué de x_2 est $\dfrac{j\bar{a} + j^2a}{3} = x_2$. Donc $x_2 \in \mathbb{R}$. De même pour x_3.
Dans ce cas, les 3 racines sont réelles.

• Si $\Delta > 0$, θ_1 et θ_2 sont réels. On peut choisir a_1 et a_2 réels. Donc $x_1 \in \mathbb{R}$.
Mais comme (j, j^2) est une famille libre de vecteur de $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{R}$ ev,
x_2 et x_3 seront complexes.

• Si $\Delta = 0$, $\theta_1 = \theta_2 \in \mathbb{R}$. On a alors $x_2 = x_3 \in \mathbb{R}$, et $x_1 = - x_2$.

$\boxed{x_1, x_2, x_3 \text{ racines de } X^3 - 6X^2 + 11X + w. \text{ Trouver } w \text{ pour que } x_1 - x_2 = 2}$.

On a : $x_1 + x_2 + x_3 = 6$. (1)
$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 11$. (2)
$x_1x_2x_3 = - w$. (3)
On veut $x_2 = x_1 - 2$. (4)

$(1, 4) \Rightarrow 2x_1 + x_3 = 8 \Rightarrow x_3 = 8 - 2x_1$.
$(2, 4) \Rightarrow x_1(x_1 - 2) + x_1(8 - 2x_1) + (x_1 - 2)(8 - 2x_1) = 11$
$x_1^2 - 2 x_1 + 8 x_1 - 2 x_1^2 + 8x_1 - 2x_1^2 - 16 + 4x_1 = 11$
$- 3x_1^2 + 18x_1 = 27$
$x_1^2 - 6x_1 - 9 = 0 \Rightarrow x_1 = 3$.
$(3, 4) \Rightarrow x_1(x_1 - 2)(8 - 2x_1) = -w$.
$w = - 3 \times 1 \times 2 = - 6$.

$\boxed{u \text{ diagonalisable. Sp } u = \{\lambda_1, ..., \lambda_q\}. \text{ Alors tout sev stable est somme de sevs des } E_{\lambda_i}}$.

• Soit E stable par u. Alors $E = \Sigma(E_\lambda \cap E)$.
• Réciproque évidente.

$\boxed{\text{u diagonalisable} \Leftrightarrow \text{tout sev de E possède un supplémentaire stable}}$.

• Si u est diagonalisable, soit F sev de E. Soit B_F une base de F.
Soit B une base de vecteurs propres de u. On complète B_F avec B pour former B' base de E.
Alors Vect(B' \ B_F) est un supplémentaire stable de F.
• Supposons que tout sev de E possède un supplémentaire stable, et que u ne soit pas diagonalisable.
Soit F la somme des sev propres de U. $F \neq E$.
Soit H hyperplan contenant F. Soit D tel que $E = H \oplus D$ et D stable par u.
Soit $x \in D \setminus \{0\}$. x est vecteur propre donc $x \in F$. Contradiction.

$\boxed{\text{u diagonalisable. } vu = uv \Leftrightarrow \text{tout sev propre de u est stable par v}}$.

• Supposons que uv = vu. Alors (Th) donne conclusion.
• Supposons que tout sev propre de u stable par v.
$\forall \lambda \in$ Sp u, on note v_λ induit par v sur $E_\lambda(u)$.
$\forall \lambda \in$ Sp u, $\forall x \in E_\lambda$, $vu(x) = v(\lambda x) = \lambda v_\lambda(x) = uv_\lambda(x) = uv(x)$.
Comme la somme des sev propres est E, on a uv = vu.
$\dim C(u) = \Sigma (\dim E_\lambda)^2$ (utilisation de l'application $v \to (v_\lambda)$)

$\boxed{\text{u diagonalisable. } B(u) = \mathbf{K}[u]}$.

• $\forall P \in \mathbf{K}[X]$, $\forall v \in C(u)$, $P(u)v = vP(u)$ donc $\mathbf{K}[u] \subset B(u)$.
• Soit $v \in B(u)$. $v_\lambda \in Z(E_\lambda)$ donc v_λ est une homothétie.
Donc $v = \Sigma\, a_\lambda\, e_\lambda$, et $u = \Sigma\, b_\lambda\, e_\lambda$.
$\exists P \in \mathbf{K}[X]$, $v = P(u)$. (Interpolation de Lagrange)