Premier problème

I

1. $E_p = -\dfrac{Gm_1m_2}{r}$

Démonstration (non demandée) :

$$dE_p = -\vec{F}_1 \cdot \overrightarrow{dr_1} - \vec{F}_2 \cdot \overrightarrow{dr_2} = -\vec{F}_2 \cdot (\overrightarrow{dr_2} - \overrightarrow{dr_1}) = \frac{Gm_1m_2\vec{r}\cdot\overrightarrow{dr}}{r^3} = \frac{Gm_1m_2rdr}{r^3} \Rightarrow E_p = -\frac{Gm_1m_2}{r}$$

2. $\overrightarrow{OC} = \dfrac{m_1\vec{R}_1 + m_2\vec{R}_2}{m_1+m_2}$

D'après le principe de l'action et de la réaction, la somme des forces sur les deux particules est nulle, donc C décrit un mouvement rectiligne uniforme dont on peut calculer la vitesse, constante, à l'aide des valeurs à un instant quelconque :

$$\vec{V}_C = \frac{m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2}{m_1+m_2}$$

3. L'énergie cinétique des deux masses dans le référentiel barycentrique est

$$E_c^* = \frac{1}{2}m_1\left(\frac{d\overrightarrow{CA_1}}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\frac{d\overrightarrow{CA_2}}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}m_1(\vec{V}_1-\vec{V}_C)^2 + \frac{1}{2}m_2(\vec{V}_2-\vec{V}_C)^2$$

$$= \frac{1}{2}m_1V_1^2 + \frac{1}{2}m_2V_2^2 - (m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2)\cdot\vec{V}_C + \frac{1}{2}(m_1+m_2)V_C^2 = \frac{1}{2}m_1V_1^2 + \frac{1}{2}m_2V_2^2 - \frac{1}{2}(m_1+m_2)V_C^2$$

$$= \frac{1}{2}m_1V_1^2 + \frac{1}{2}m_2V_2^2 - \frac{1}{2}(m_1+m_2)\left(\frac{m_1\vec{V}_1+m_2\vec{V}_2}{m_1+m_2}\right)^2 = \frac{m_1m_2(V_1^2+V_2^2-2\vec{V}_1\cdot\vec{V}_2)}{2(m_1+m_2)}$$

Soit $E_c^* = \dfrac{1}{2}\mu v^2$ où $\mu = \dfrac{m_1m_2}{m_1+m_2}$.

4.

$$m_1\frac{d^2\vec{R}_1}{dt^2} = \vec{F}_1 = \frac{Gm_1m_2\vec{r}}{r^3}$$

$$m_2\frac{d^2\vec{R}_2}{dt^2} = \vec{F}_2 = -\frac{Gm_1m_2\vec{r}}{r^3}$$

Divisons la seconde équation par m_2, la première par m_1 et retranchons membre à membre

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)\vec{F}_2$$

Posons $\dfrac{1}{\mu} = \dfrac{1}{m_1} + \dfrac{1}{m_2}$

$$\mu\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_2 = -\frac{Gm_1m_2\vec{r}}{r^3}$$

Cette force est la force subie par la deuxième particule ; elle est égale au gradient en $\vec{r}$ de l'énergie potentielle d'interaction.

5. La conservation de l'énergie de la particule fictive de masse μ et de rayon vecteur $\vec{r}$ impose que son énergie $E = \dfrac{1}{2}\mu v^2 - \dfrac{Gm_1m_2}{r}$ soit constante. Les particules restent à distance finie si cette énergie est négative, soit

$\dfrac{v^2}{2} - \dfrac{G(m_1+m_2)}{r} < 0$ ou $v^2r < 2G(m_1+m_2)$.

6.a) Les particules restent à distance fixe si le mouvement relatif est un mouvement circulaire, soit si

$$\mu\frac{v^2}{r} = \frac{Gm_1m_2}{r^2} \Rightarrow v^2r = G(m_1+m_2)$$

6.b) $\Omega = \dfrac{v}{r} = \sqrt{\dfrac{G(m_1+m_2)}{r_0^3}}$ $\quad T = \dfrac{2\pi}{\Omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{r_0^3}{G(m_1+m_2)}}$

II

1. $F_x = m\Omega^2 x - \dfrac{Gm_1 m\,\text{signe}(x+r_1)}{(x+r_1)^2} - \dfrac{Gm_2 m\,\text{signe}(x-r_2)}{(x-r_2)^2}$ où la fonction $\text{signe}(x)$ vaut 1 si x est positif et -1 si x est négatif. La force de Coriolis a une composante nulle sur l'axe $x'Cx$.

2. $dU = -F_x dx \Rightarrow U(x) = -\int F_x dx = -\dfrac{1}{2}m\Omega^2 x^2 - \dfrac{Gm_1 m}{|x+r_1|} - \dfrac{Gm_2 m}{|x-r_2|}$

3. En réalité, il est plus direct d'étudier la fonction $F_x(x)$, dont les zéros donnent les positions d'équilibre. Comme la fonction $-\dfrac{\text{signe}(x)}{x^2}$ est une fonction croissante dans chacun des deux intervalles $\left]-\infty,0\right[$ et $\left]0,+\infty\right[$ où elle est définie et comme la fonction x est une fonction croissante, la fonction $F_x(x)$, somme de trois fonctions croissantes, est une fonction croissante de $-\infty$ à $+\infty$ sur chacun des trois intervalles où elle est définie ; elle s'annule donc une seule fois dans chacun de ces trois intervalles : $\left]-\infty,-r_1\right[$, $\left]-r_1,r_2\right[$ et $\left]r_2,+\infty\right[$. Il y a trois positions d'équilibre, une entre les deux astres et les deux autres entre chaque astre et l'infini.

4. Pour un mouvement selon $x'Cx$, ces positions d'équilibres paraissent instables, puisque la force est une fonction croissante de l'abscisse.

En réalité, le mouvement est soumis aussi à la force de Coriolis, perpendiculaire à la vitesse et n'a pas de raison d'être rectiligne. On ne peut donc pas répondre de cette façon à la question posée.

III

1.

$$\vec F_1 = -\frac{Gm_2 m_1 \overrightarrow{A_2A_1}}{d^3} - \frac{Gm_3 m_1 \overrightarrow{A_3A_1}}{d^3} = -\frac{Gm_1}{d^3}\left(m_2\overrightarrow{A_2A_1} + m_3\overrightarrow{A_3A_1}\right) = -\frac{Gm_1}{d^3}\left(-m_2\overrightarrow{CA_2} - m_3\overrightarrow{CA_3} + m_2\overrightarrow{CA_1} + m_3\overrightarrow{CA_1}\right).$$

Or $m_1\overrightarrow{CA_1} + m_2\overrightarrow{CA_2} + m_3\overrightarrow{CA_3} = \vec 0$

D'où $\vec F_1 = -\dfrac{Gm_1(m_1+m_2+m_3)\overrightarrow{CA_1}}{d^3}$

2. La condition d'équilibre pour un mouvement de rotation autour de C avec la vitesse angulaire Ω est $\vec F_i = -m_i\Omega^2\overrightarrow{CA_i}$, qui est réalisée si $\Omega^2 = \dfrac{G(m_1+m_2+m_3)}{d^3}$

3. L'énergie potentielle est la somme des énergies potentielles associées aux deux attractions gravitationnelles et à la force centrifuge, car la force de Coriolis ne travaille pas : $U = -\dfrac{Gm_1 m}{d_1} - \dfrac{Gm_2 m}{d_2} - \dfrac{1}{2}m\Omega^2(X^2+Y^2)$.

4. La force est la somme des deux attractions gravitationnelles, de la force centrifuge et de la force de Coriolis. Les trois premières forces, qui sont des champs de force, ont pour résultante $-\overrightarrow{\text{grad}}U$ et la quatrième est $-2m\vec\Omega\wedge\vec v$, d'où d'après la loi fondamentale de la dynamique $\vec a = -\overrightarrow{\text{grad}}u - 2\vec\Omega\wedge\vec v$

5. Projetons l'équation précédente sur les deux axes :

$$\ddot X = -\frac{\partial u}{\partial X} + 2\Omega\dot Y$$

$$\ddot Y = -\frac{\partial u}{\partial Y} - 2\Omega\dot X$$

En développant u et en tenant compte que $-\overrightarrow{\text{grad}}U$ est nul en $(X_0 Y_0)$:

$$\ddot x = -xu_{XX} - yu_{XY} + 2\Omega\dot y$$

$$\ddot y = -xu_{XY} - yu_{YY} - 2\Omega\dot x$$

6. Remplaçons x et y par les expressions proposées et simplifions par $\exp(\lambda t)$:

$$\lambda^2 a = -au_{XX} - bu_{XY} + 2\Omega\lambda b$$

$$\lambda^2 b = -au_{XY} - bu_{YY} - 2\Omega\lambda a$$

système qui n'admet que la solution $a=0, b=0$, sauf si son déterminant est nul :

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 + u_{XX} & u_{XY} - 2\Omega\lambda \\ u_{XY} + 2\Omega\lambda & \lambda^2 + u_{YY} \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda^2 + u_{XX})(\lambda^2 + u_{YY}) - (u_{XY} + 2\Omega\lambda)(u_{XY} - 2\Omega\lambda) = 0$$

$$\lambda^4 + (u_{XX} + u_{YY} + 4\Omega^2)\lambda^2 + u_{XX}u_{YY} - u_{XY}^2 = 0$$

Remarque préliminaire sur 7.

Démontrons le résultat que l'énoncé demande d'admettre.

L'énergie potentielle massique du mobile est $u = -\frac{1}{2}\Omega^2(X^2+Y^2) - \frac{Gm_1}{\sqrt{(X+r_1)^2+Y^2}} - \frac{Gm_2}{\sqrt{(X-r_2)^2+Y^2}}$

D'autre part,

$$Gm_1 = \alpha G(m_1+m_2) = \alpha\Omega^2 d^3 \quad Gm_2 = (1-\alpha)G(m_1+m_2) = (1-\alpha)\Omega^2 d^3 \quad r_1 = (1-\alpha)d \quad r_2 = \alpha d$$

$$u = -\frac{1}{2}\Omega^2(X^2+Y^2) - \frac{\alpha\Omega^2 d^3}{\sqrt{(X+(1-\alpha)d)^2+Y^2}} - \frac{(1-\alpha)\Omega^2 d^3}{\sqrt{(X-\alpha d)^2+Y^2}}$$

$$X_0 = \frac{r_2 - r_1}{2} = (\alpha - 1/2)d \quad Y_0 = \frac{d\sqrt{3}}{2}$$

Le calcul peut alors être programmé dans le langage du logiciel de calcul formel maple :

```
> u:=-Omega^2*(X^2+Y^2)/2-alpha*Omega^2*d^3/sqrt((X+(1-alpha)*d)^2+Y^2)-(1-
alpha)*Omega^2*d^3/sqrt((X-alpha*d)^2+Y^2):
> uXX:=subs(X=(alpha-1/2)*d,Y=d*sqrt(3)/2,diff(u,X,X)):
uYY:=subs(X=(alpha-1/2)*d,Y=d*sqrt(3)/2,diff(u,Y,Y)):
uXY:=subs(X=(alpha-1/2)*d,Y=d*sqrt(3)/2,diff(u,X,Y)):
> simplify(lambda^4+lambda^2*(4*Omega^2+uXX+uYY)+(uXX*uYY-uXY^2),assume=positive);
```

$$\lambda^4 + \lambda^2\Omega^2 - \frac{27}{4}\alpha^2\Omega^4 + \frac{27}{4}\alpha\Omega^4$$

7.a) Par définition, α est compris entre 0 et 1. Si $\Delta > 0$, les deux racines en λ'^2 sont réelles, ont un produit positif et une somme négative, donc sont toutes deux négatives, donc les quatre racines en λ' sont imaginaires pures. La position d'équilibre est donc stable.

Si $\Delta = 0$, il y a une racine double $\lambda'^2 = -1/2$ et la solution est du type $x = (a+bt)\exp(i\Omega t/\sqrt{2}) + (a'+b't)\exp(-i\Omega t/\sqrt{2})$. La position d'équilibre est donc instable.

7.b) Si $\Delta < 0$, $\lambda'^2 = \frac{-1 \pm i\sqrt{-\Delta}}{2}$: les racines en λ' sont complexes ; deux d'entre elles ont un argument égal en valeur absolue à la moitié de celui de $-1 + i\sqrt{-\Delta}$, donc compris entre 0 et $\pi/2$, et ont donc une partie réelle positive ; les deux autres ont une partie réelle négative. Quel que soit le signe de Ω, deux des exponentielles en $\exp(\lambda t)$ tendent vers l'infini quand $t \to \infty$, donc la position d'équilibre est instable.

7.c) La position d'équilibre est donc stable si $\Delta > 0$, soit $f(\alpha) = 1 - 27\alpha(1-\alpha) > 0$.

Or l'étude de $f(\alpha)$ montre que $f(0) = 1$, $f(1) = 1$ et que les racines de $f(\alpha) = 0$ sont $\alpha = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{69}}{18}$.

Donc la position d'équilibre est stable si α appartient à l'un des deux intervalles $\left]0, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{69}}{18}\right[$ ou $\left]\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{69}}{18}, 1\right[$, soit]0; 0,0352[ou]0,9648 ;1[.

8. L'objet en question aurait une position d'équilibre stable. Il en va de même pour le système Jupiter-Soleil. L'existence des astéroïdes troyens, qui occupent les deux points de Lagrange du système Soleil-Jupiter non alignés avec ces astres, est une illustration de cette stabilité.

9. Pour de petits mouvements orthogonaux au plan de rotation des deux astres, la force gravitationnelle est une force de rappel, la force centrifuge est parallèle au plan, donc ne joue pas de rôle, et la force de Coriolis est nulle (produit vectoriel de vecteurs parallèles) : U est minimum sur le plan et la position d'équilibre est donc stable vis à vis de ces mouvements.

Deuxième problème

1.a) $G = U + pV - TS \quad dG = \delta Q + \delta W + pdV + Vdp - TdS - SdT = Vdp - SdT$; à température fixée : $G(p_2) - G(p_1) = \int_{p_1}^{p_2} Vdp$

1.b) Le volume est alors approximativement constant et $G(p_2) - G(p_1) = (p_2 - p_1)V$

1.c) $V = \dfrac{nRT}{p} \quad G(p_2) - G(p_1) = nRT \ln\dfrac{p_2}{p_1} \quad \mu = \mu^0 + RT\ln\dfrac{p}{p^0}$

2.a) $\mu(p_2) - \mu(p_1) = \int_{p_1}^{p_2} V_m dp = RT\ln\dfrac{f_2}{f_1}$

D'autre part, $\int_{p_1}^{p_2} V_m^0 dp = RT\ln\dfrac{p_2}{p_1}$. Retranchons membre à membre :

$$\int_{p_1}^{p_2}(V_m - V_m^0)dp = RT\left(\ln\frac{f_2}{f_1} - \ln\frac{p_2}{p_1}\right)$$

Si $p_1 \to 0$, $\ln f_1 - \ln p_1 \to 0$, d'où $\ln\dfrac{f}{p} = \int_0^p \dfrac{V_m(p',T) - V_m^0(p',T)}{RT}dp' = \int_0^p \dfrac{Z(p') - 1}{p'}dp'$, cqfd.

2.b) Comparons l'équation de Van der Waals à celle des gaz parfaits.

Le remplacement de V_m par $V_m - b$ fait que si la pression tend vers l'infini le volume molaire tend vers b au lieu de zéro. Ceci exprime que les molécules ne peuvent s'interpénétrer et qu'il existe des forces répulsives très grandes à courte distance.

Le remplacement de p par $p + a/V_m^2$ exprime que la pression dans le gaz est plus forte que la pression mesurée, c'est-à-dire la pression sur une interface, et que les molécules s'attirent à grande distance, d'où le terme supplémentaire $-a/V_m$ dans l'énergie interne, représentant l'énergie potentielle négative de ces forces.

$\ln\dfrac{f}{p} = \int_0^p\left(\dfrac{V_m}{RT} - \dfrac{1}{p}\right)dp$. Développons $1/p$ au voisinage de $V_m = \infty$ en puissances décroissantes de V_m, en supposant a et b petits devant V_m (la méthode demandée par l'énoncé me paraît moins commode).

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{\dfrac{RT}{V_m - b} - \dfrac{a}{V_m^2}} = \frac{V_m - b}{RT\left(1 - \dfrac{a}{V_m^2}\dfrac{V_m - b}{RT}\right)} \approx \frac{V_m - b}{RT}\left(1 + \frac{a}{V_m^2}\frac{V_m - b}{RT}\right) \approx \frac{V_m}{RT} - \frac{b}{RT} + \frac{a}{R^2T^2} + \ldots$$

$$\ln\frac{f}{p} \approx \left(\frac{b}{RT} - \frac{a}{R^2T^2}\right)p$$

$$f = 10^6 \exp\left(10^6\left(\frac{37\times10^{-6}}{8{,}31\times298{,}15} - \frac{0{,}42}{(8{,}31\times298{,}15)^2}\right)\right) = 947900$$

Le terme en a l'emporte sur le terme en b. Le volume molaire est plus petit que celui d'un gaz parfait, parce que l'effet des forces attractives à grande distance l'emporte sur celui des forces répulsives à courte distance.

3.a) V_{im}^L est alors une constante, donc $f_i = a_i^L p_i^{\text{sat}} \exp\left(\int_0^{p_i^{\text{sat}}} \dfrac{Z_i(p_i') - 1}{p_i'}dp_i'\right)\exp\left(\dfrac{V_{im}^L(p_i - p_i^{\text{sat}})}{RT}\right)$.

3.b) V_{im}^L est alors négligeable, donc $f_i = a_i^L p_i^{\text{sat}} \exp\left(\int_0^{p_i^{\text{sat}}} \dfrac{Z_i(p_i') - 1}{p_i'}dp_i'\right)$.

3.c) Pour tous les constituants de la phase gazeuse, $Z_i(p_i') = 1$, donc $f_i = a_i^L p_i^{\text{sat}}$.

3.d) Pour tous les constituants des phases liquides, $a_i^L = x_i^L$, donc $f_i = x_i^L p_i^{\text{sat}}$.

4. $f_i = p_i \Rightarrow x_i^L p_i^{\text{sat}} = p_i$.

La courbe d'ébullition correspond à la limite de l'équilibre entre la phase liquide et la phase vapeur quand cette dernière apparaît. Alors, le titre dans le mélange est le titre dans le liquide, aussi la courbe d'ébullition est le graphe de p en fonction de x_1^L. Son équation est $p = p_1 + p_2$, soit :

$$p = x_1^L p_1^{\text{sat}} + (1 - x_1^L)p_2^{\text{sat}}$$

La courbe de rosée correspond à la limite de l'équilibre entre la phase liquide et la phase vapeur quand la phase liquide apparaît. Alors, le titre dans le mélange est le titre dans la vapeur, aussi la courbe de rosée est le graphe de p en fonction de $x_1^V = \dfrac{p_1}{p}$. Donc

$x_1^L = p_1 / p_1^{\text{sat}} = x_1^V \, p / p_1^{\text{sat}} \quad x_2^L = p_2 / p_2^{\text{sat}} = (1 - x_1^V) p / p_2^{\text{sat}}$

$x_1^L + x_2^L = 1 \Rightarrow x_1^V \, p / p_1^{\text{sat}} + (1 - x_1^V) p / p_2^{\text{sat}} = 1$

D'où l'équation de la courbe de rosée : $p = \dfrac{1}{\dfrac{x_1^V}{p_1^{\text{sat}}} + \dfrac{1 - x_1^V}{p_2^{\text{sat}}}}$