Corrigé possible pour EML 07 (**option scientifique**)[1]

Premier problème

Prtie I : Étude de l'application f

1) On a $f \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1 = f(0)$ car $\ln(1+x) \sim x$, donc f est continue en 0 et ainsi elle l'est sur $[0,+\infty[$.
2) a) f est C^1 sur $]0,+\infty[$ en tant que quotient de fonctions C^1 sur $]0,+\infty[$.
On a facilement $f'(x)$.
b) On a $A(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x} - \ln(1+x)$ donc son $DL_2(0)$ est
$1-(1-x+x^2+o(x^2))-(x-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)) = -\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$.
Ainsi $f' \underset{x\to 0}{\sim} -1/2$ et tend donc bien vers $-1/2$.
c) En posant $f'(0)=-1/2$ on a que f est C^1 sur $[0,+\infty[$.
d) On a $A'(x) = \dfrac{-x}{(1+x)^2} \leq 0$ dons A décroît de $[0,+\infty[$ sur $]-\infty,0]$.
Ainsi $A \leq 0$ et on en déduit que $f' \leq 0$. D'où la décroissance de f.
e) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ car les puissances l'emportent sur le ln.
3)a) f est 2 fois dérivable car quotient de fonctions 2 fois dérivable. On a facilement $f''(x)$.
b) On a $B'(x) = 2x\dfrac{x^2+x+2}{(x+1)^4} \geq 0$ donc B croît de $[0,+\infty[$ sur $[0,+\infty[$.
Ainsi $B \geq 0$ et donc f est bien convexe (car $f'' \geq 0$).

Partie II : Un développement en série

1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{N}(-1)^k t^k = \sum_{k=0}^{N}(-t)^k = \frac{1-(-t)^{N+1}}{1+t}$ (grâce à la somme des $N+1$-ers termes de la suite géométrique de raison $-t$).
En intégrant sur $[0,x]$, on a le résultat.
3) $\displaystyle |J_N(x)| \leq \int_0^x \frac{t^{N+1}}{1+t}dt \leq \int_0^x t^{N+1}dt = \frac{x^{N+2}}{N+2}$.
4) On a $J_N(x) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car si $x=1$ on a $|J_N|$ majoré par $\dfrac{1}{N+2}$ et si $x\in[0,1[$, on a $x^{N+2}\to 0$.
Ainsi en faisant tendre N vers $+\infty$ dans la question 2) on a que la série converge et vaut $\ln(1+x)$ (après avoir fait un décalage d'indice).

Partie III : Égalité d'une intégrale et d'une somme de série

1) $\displaystyle |f(x) - \sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^k x^k}{k+1}| = |\frac{J_N(x)}{x}| \leq \frac{x^{N+1}}{N+2}$.

[1] email : hedi.joulak@gmail.com

2) La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ CA (règle de Riemann).

$$\left|\int_0^1 (f-\sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^k x^k}{k+1})\right| \leq \int_0^1 |f(x)-\sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^k x^k}{k+1}|dx \leq \int_0^1 \frac{x^{N+1}}{N+1}dx = \frac{1}{(N+1)(N+2)} \to 0.$$

Or $\displaystyle\int_0^1 (f-\sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^k x^k}{k+1}) = \int_0^1 f - \sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^k}{(k+1)^2} = \int_0^1 f - \sum_{k=1}^{N+1}\frac{(-1)^{k-1}}{(k+1)^2}$ et on fait tendre N vers $+\infty$ pour avoir l'égalité.

3) Pour avoir ces 2 égalités on a juste écrit les termes pairs et impairs de n.

4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2}$ donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

D'où $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2} = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{12}$. Ce qui donne la valeur de l'intégrale.

Partie IV : Recherche d'extremum pour une fonction réelle de deux variables réelles

1) G est C^2 car F est C^∞ (fonction définie par une intégrale).

On a $\dfrac{\partial G}{\partial x}(x,y) = yF'(xy) - F'(x) = yf(xy) - f(x)$, G est sym en x,y on a $\dfrac{\partial G}{\partial y}(x,y) = xf(xy) - f(y)$.

$\dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x,y) = y^2 f'(xy) - f'(x)$, $\dfrac{\partial^2 G}{\partial y^2}(x,y) = x^2 f'(xy) - f'(y)$ et $\dfrac{\partial^2 G}{\partial x\partial y}(x,y) = f(xy) + xyf'(xy)$.

2) $\begin{cases} \frac{\partial G}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial G}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} yf(xy) - f(x) = 0 \\ xf(xy) - f(y) = 0 \end{cases}$

$xL_1 - yL_2$ donne $yf(y) = xf(x)$ soit $\ln(1+x) = \ln(1+y)$ et donc $x = y$.

En remplaçant dans L_1, on a $xf(x^2) - f(x) = 0 \Longleftrightarrow \ln(1+x^2) - \ln(1+x) = 0$ donc $x^2 = x$ i.e. $x = 1$ (car $x > 0$).

Ainsi on a un unique point critique qui est $(1,1)$.

3) $r = \dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2}(1,1) = f'(1) - f'(1) = 0$, $s = \dfrac{\partial^2 G}{\partial x\partial y}(1,1) = \dfrac{1}{2}$ et $t = \dfrac{\partial^2 G}{\partial y^2}(1,1) = 0$.

Donc $s^2 - rt = 1/4 > 0$ et ainsi on n'a pas d'extremum en $(1,1)$ pour G.

Deuxième problème

Étude d'un endomorphisme de E

1) $(X^2-1)P$ est un polynôme de degré $\leq n+2$ donc sa dérivée seconde est un polynôme de degré $\leq n$. Il est donc bien dans E.

2) Simples vérifications...

3) Φ va de E dans E d'après la question précédente, et Φ est linéaire grâce à linéarité de la dérivée.

4) Pour $k \geq 2$, $\Phi(X^k) = (X^{k+2} - X^k)'' = (k+2)(k+1)X^k - k(k-1)X^{k-2}$ et on a

$$A = mat(\Phi, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 6 & \cdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & -k(k-1) & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & (k+1)(k+2) & & -n(n-1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & (n+1)(n+2) \end{pmatrix}.$$

5) a) On a une matrice triangulaire supérieure donc les valeurs propres se trouvent sur la diagonale. $Sp(A) = \{(k+1)(k+2)\}_{0 \leq k \leq n}$, on a bien $n+1$ vp distinctes.
b) Φ est bijectif car $0 \notin Sp(A)$.
c) Comme Φ a $n+1$ vp distinctes, il est diagonalisable et $dim E_{\lambda_k} = 1$.
6) a) Pour trouver le vecteur propre P associé à la vp λ_k, on doit résoudre le système $(A - \lambda_k I)X = 0$ où X est le vecteur colonne avec les coefficients de P.
En posant celui-ci, on remarque que les dernières équations (toutes celles donnant les coefficients devant les termes de degré $\geq k+1$) donnent des coefficients nuls. Ainsi P est bien de degré k.
b) $\Phi(Q)(X) = \Phi(P)(-X) = ((X^2-1)P(-X))'' = 2P(-X) - 4XP'(-X) + (X^2-1)P''(-X) = \lambda_k P(-X) = \lambda_k Q(X)$, c'est donc bien un vecteur propre.
7) Il existe une base de vecteurs propres $(P_k)_k$ avec $degP_k = k$, comme $Q(X) = P(-X)$ on peut avoir le coefficient de ces polynômes strictement positif, et on obtiendra l'unicité de cette base en le choisissant $=1$.
Comme $P_{2k}(-X) = P_{2k}(X)$, P_{2k} est pair, et comme $P_{2k+1}(-X) = -P_{2k+1}(X)$, P_{2k+1} est impair.
8) On a donc $P_0 = 1$, $P_1 = X$, $P_2 = X^2 - 1/5$ et $P_3 = X^3 - 3/7X$ (car on sait que P_3, par exemple, est de la forme $X^3 + aX$ et on résout $\Phi(P_3) = 20P_3$).

Partie II : Un produit scalaire sur E

1) C'est bien une forme bilinéaire symétrique (la linéarité vient de celle de l'intégrale). Elle est bien positive car $(P|P) = \displaystyle\int_{-1}^{1}(1-x^2)P^2(x)dx$ est l'intégrale d'une fonction positive. De plus , elle est nulle si $(1-x^2)P^2(x) = 0$ et donc $P = 0$ (car l'intégrale d'une fonction continue et positive est nulle si la fonction est nulle).
On a donc bien un produit scalaire sur E.
2) a) $(\Phi(P)|Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1}(1-x^2)((x^2-1)P)''Q = -\int_{-1}^{1}((x^2-1)P)'((1-x^2)Q)'$
$= \displaystyle\int_{-1}^{1}(x^2-1)P((1-x^2)Q)'' = (P, \Phi(Q))$ avec 2 ipp successives.
C'est donc bien un endomorphisme symétrique.
b) $\forall i \neq j$, $(\Phi(P_i), P_j) = \dfrac{1}{\lambda_i}(\Phi(P_i), P_j) = \dfrac{1}{\lambda_i}(P_i, \Phi(P_j)) = \dfrac{\lambda_j}{\lambda_i}(P_i, P_j)$
Or $\lambda_i \neq \lambda_j$ donc nécessairement, $(P_i, P_j) = 0$ et donc la famille est orthogonale.
3) a) Tout polynôme S de degré $\leq j-1$ se décompose de manière unique suivant la famille $(P_0, \ldots, P_{j-1})$ (car c'est une base) donc par linéarité et grâce à l'orthogonalité de la famille on a $(S, P_j) = 0$.

b) On a $(1, P_j) = \displaystyle\int_{-1}^{1} (1-x^2)P_j = 0$, si P_j gardait un signe constant sur $]-1,1[$ l'intégrale serait de ce signe or ici elle est nulle, donc impossible.
c) Comme P_j change de signe, par le théorème de la bijection (localement), on a l'existence d'une racine (que l'on peut considérer de multiplicité impaire car il y a un changement de signe).
4) a) $m \leq j$ car on ne peut avoir plus de racines que la valeur du degré du polynôme.
b) $P_j = \displaystyle\prod_{i=1}^{m} (X - x_i)^{2s_i+1} Q(X)$ où Q est de signe constant (car composé de termes ayant soit aucune racine, soit une racine de multiplicité paire).
D'où $S_m P_j = \displaystyle\prod_{i=1}^{m} (X - x_i)^{2s_i} Q$ est bien de signe constant.
c) On a $(S_m, P_j) = \displaystyle\int_{-1}^{1} (1-x^2) S_m P_j = 0$ si $m \leq j-1$, or $S_m P_j$ est de signe constant (il en sera donc de même pour l'intégrale) donc nécessairement $m = j$.
d) Ainsi toutes les racines de multiplicité impaire de P_j sont en fait des racines simples et représentent toutes les racines (car il y en a j au maximum).