Partie I

1. $\dfrac{t}{t+n} = 1 - \dfrac{n}{t+n}$ donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{t+n}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 1 - \frac{n}{t+n}\,\mathrm{d}t = [t - n\ln(t+n)]_0^1 = 1 - n\big(\ln(n+1) - \ln n\big) = 1 - n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ donc $\boxed{\dfrac{1}{n} - \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}$.

   Or $1 - n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = 1 - n\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + o\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)\right) = 1 - 1 + \dfrac{1}{2n} + o\Big(\dfrac{1}{n}\Big)$ donc $u_n \sim \dfrac{1}{2n^2}$; Deux séries à termes positifs et équivalent ayant la même nature, $\boxed{\Sigma u_n \text{ converge.}}$

2. $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\big(\ln(k+1) - \ln k\big) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$ par ¡¡télescopage¿¿ des termes.

   En passant à la limite quand $n \to +\infty$, $S = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n$.

3. Pour $t \in [0,1]$, $\dfrac{1}{n+1} \leqslant \dfrac{1}{t+n} \leqslant \dfrac{1}{n-1}$ donc $\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\int_0^1 t\,\mathrm{d}t \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n-1}\int_0^1 t\,\mathrm{d}t$ et, puisque $\displaystyle\int_0^1 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$, $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right) \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}\right)$.

   Or $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{n+1}$ et $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n}$ donc $\dfrac{1}{2(n+1)} \leqslant \displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k = \frac{1}{2n}$:

   $\boxed{\dfrac{1}{2(n+1)} \leqslant S - S_n = \dfrac{1}{2n}}$.

4. S_n constitue une valeur approchée de S à 10^{-2} [respectivement 10^{-6}] près, si $\dfrac{1}{2n} \leqslant 10^{-2}$ [resp. $\dfrac{1}{2n} \leqslant 10^{-6}$] ; $n = 50$ [resp. $n = 5.10^5$] convient, ce qui, dans le deuxième cas, est beaucoup trop grand si on tient compte de l'erreur cumulée sur le demi-million de termes à additionner.

Partie II

1. On notera ici $a : t \mapsto \dfrac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}$ et $b : t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t}$.

   En 0 : $a(t) = \dfrac{1 - (1 - t - t^2/2 + o(t^2))}{t} = 1 + \dfrac{t}{2} + o(t)$ donc a admet un prolongement de classe $\mathcal{C}^1$ (et même $\mathcal{C}^\infty$ en utilisant un développement en série entière) en 0_+.

   A est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

   De plus, a est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$; De même, b est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ est impropre convergente en $+\infty$, car $\dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t} \ll \mathrm{e}^{-t}$ en $+\infty$.

   B est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ (l'intégrale définissant $B(0)$ est impropre divergente en 0)

   A et B sont $\mathcal{C}^\infty$ sur leur domaine de définition comme primitives d'une fonction $\mathcal{C}^\infty$, donc *a fortiori* continues et dérivables.

2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-(1-u)^n}{u}\,\mathrm{d}u \overset{v:=1-u}{=} \int_0^1 \frac{1-v^n}{1-v}\,\mathrm{d}v = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} v^k\,\mathrm{d}v = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1}$

   Alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \int_0^1 \frac{1-(1-u)^n}{u}\,\mathrm{d}u \overset{t:=n.u}{=} \int_0^n \frac{1-(1-\frac{t}{n})^n}{\frac{t}{n}}\frac{\mathrm{d}t}{n} = \int_0^n \frac{1-(1-\frac{t}{n})^n}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1-(1-\frac{t}{n})^n}{t}\,\mathrm{d}t + \int_1^n \frac{1-(1-\frac{t}{n})^n}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1-(1-\frac{t}{n})^n}{t}\,\mathrm{d}t + \ln n - \int_1^n \frac{(1-\frac{t}{n})^n}{t}\,\mathrm{d}t$

3. (a) Soit $\alpha : u \mapsto \mathrm{e}^{-u} - (1-u)$; alors $\alpha(0) = 0$ et $\alpha'(u) = -\mathrm{e}^{-u} - 1 \geqslant 0$ pour $u \geqslant 0$ donc $\alpha(u) \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}_+$.
Soit $\beta : u \mapsto 1 - (1+u)\mathrm{e}^{-u}$; $\beta(0) = 0$ et $\beta'(u) = -u\mathrm{e}^{-u} \leqslant 0$ pour $u \geqslant 0$ donc $\beta(u) \leqslant 0$; Alors $(1-u)^2\mathrm{e}^{-u} \leqslant \dfrac{(1-u)^2}{1+u} \leqslant 1-u$.

(b) Pour $\alpha \in [0,1]$, $(1-\alpha)^{n+1} - (1-\alpha)^n = -\alpha(1-\alpha)^n \geqslant -\alpha$ donc, par sommation, $(1-\alpha)^n \geqslant -n\alpha$

(c) Si $u \in [0,1]$, $\mathrm{e}^{-u} - u^2\mathrm{e}^{-u} \leqslant 1-u$ donc $\mathrm{e}^{-u} - 1 + u \leqslant u^2\mathrm{e}^{-u}$; Posons $u := \dfrac{t}{n}$ pour $t \in [0,n]$
$\mathrm{e}^{-t} - \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{-nu} - (1-u)^n \leqslant \mathrm{e}^{-nu} - 1 + nu \leqslant nu^2\mathrm{e}^{-nu} \leqslant \dfrac{nt^2}{n^2}\mathrm{e}^{-t} = \dfrac{t^2}{n}\mathrm{e}^{-t}$ et d'autre part $\mathrm{e}^{-t} - \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n \geqslant 0$.

(d) Alors $S_n - (A(1) - B(1)) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n}{t}\,\mathrm{d}t - \int_1^n \frac{\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n}{n}\,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t =$
$\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n}{t}\,\mathrm{d}t + \int_1^n \frac{\mathrm{e}^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n}{t}\,\mathrm{d}t + \int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t = I_1 + I_2 + I_3$
En appelant K_2 l'intégrale convergente $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 3$, $0 \leqslant I_1 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{t^2}{n}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{K_2}{n}$, $0 \leqslant I_1 \leqslant \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^2}{n}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{K_2}{n}$, et $0 \leqslant I_3 \leqslant \displaystyle\int_n^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{e}^{-n}$ donc $0 \leqslant S_n - (A(1) - B(1)) \leqslant \dfrac{2K_2}{n} + \mathrm{e}^{-n}$ tend vers 0 en $+\infty$.
Par passage à la limite, $\boxed{S = A(1) - B(1)}$.

Partie III

1. $A(x) - A(1) = \displaystyle\int_1^x \frac{1 - \mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ et $B(x) - B(1) = -\displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$; Par soustraction, $A(x) - A(1) + B(x) - B(1) = \displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln x$ donc $S = A(x) - B(x) - \big(A(x) - B(x) - A(1) - B(1)\big) = A(x) - B(x) - \ln x$

2. (a) Pour tout $t \in [x, +\infty[$, $0 \leqslant \dfrac{1}{t} \leqslant \dfrac{1}{x}$ donc $0 \leqslant \displaystyle\int_x^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{x}\int_x^{\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{x}\left[\mathrm{e}^{-t}\right]_x^{\infty} \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$

(b) $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$ est décroissante comme produit de fonctions décroissantes ; De plus : $\dfrac{\mathrm{e}^{-x_0}}{x_0} \leqslant \dfrac{10^{-2}}{3}$ pour $x_0 \approx 4,2555$ donc $x_0 = 4,5$ convient.

3. (a) $\dfrac{1 - \mathrm{e}^{-t}}{t} = \dfrac{1}{t}\left(1 - \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-t)^n}{n!}\right) = \dfrac{1}{t}\left(\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}t^n}{n!}\right) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}t^{n-1}}{n!} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n t^n}{(n+1)!}$ donc par intégration : $A(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n t^{n+1}}{(n+1)(n+1)!} = \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}t^n}{n.(n)!}$; (avec un rayon de convergence infini, comme celui de e^t) $\boxed{a_n = \dfrac{(-1)^n}{n.n!}}$

(b) $\left|\dfrac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = x.\dfrac{n.n!}{(n+1)(n+1)!} = \dfrac{x}{n+1}\dfrac{1}{n+1} \leqslant 1$ pour $0 \leqslant x \leqslant n$; Donc $|a_n x^n|$ est décroissante et tend vers 0 (puisque $x^n \ll n!$ quand $n \to +\infty$).
Toutes les conditions du théorème spécial des séries alternées sont vérifiées, et donc $\left|\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k\right| \leqslant |a_{n+1}x^n| = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)(n+1)!}$.

4. On prend alors $x := x_0 = 4,5$, puis n assez grand pour que $|A(x) - A_n(x)| \leqslant \dfrac{10^{-2}}{3}$ (avec $A_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k x_0^k$) ; $n = 13$ convient ; Alors $|S - A_n(x_0) - \ln x_0| \leqslant |S - A(x_0) - \ln x_0| + |A(x_0) - A_{n_0}(x_0)| \leqslant |S - A(x_0) - \ln x_0 - B(x_0)| + |B(x_0)| + |A(x_0) - A_{n_0}(x_0)| \leqslant \dfrac{2}{3}10^{-2}$.
$A_{n_0}(x_0) - \ln x_0$ est une approximation à 10^{-2} près de S ; on trouve $\boxed{S \approx 0,58}$
En fait, Maple donne $S = 0,57721566490\ldots$

Partie IV

1. Pour $x \geqslant 0$, f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$; Pour $x \in]-1,0[$, $\mathrm{e}^{-t}.t^x \overset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t^x}$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^x}$ converge, donc $F(x)$ existe.

2. $t \mapsto t^a\mathrm{e}^{-t}$ (resp. $t \mapsto t^b\mathrm{e}^{-t}$) est continue sur $]0,1[$, (resp. $]1,+\infty[$) et $1^a\mathrm{e}^{-1} = 1^b\mathrm{e}^{-b} = 1$, donc φ est continue sur $]0,1[$, $]1,+\infty[$ et en 1, donc sur $\mathbb{R}_+^*$.

   Si $a \leqslant x \leqslant b$, $t^b \leqslant t^x \leqslant t^a$ si $t \in]0,1[$ et $t^a \leqslant t^x \leqslant t^b$ si $t > 1$ donc, par intégration sur $]0,1[$ puis $]1,+\infty[$, $|f(x,t) \leqslant \varphi(t)$ pour tous $t \in]0,+\infty[$ et $x \in [a,b]$.

   D'autre part $\displaystyle\int_0^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^a\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge (en 0, $t^a\mathrm{e}^{-t} \sim t^a$ et $a > -1$) et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} t^b\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge (en $+\infty$, $t^b\mathrm{e}^{-t} \leqslant \mathrm{e}^{-t/2}$).

   Il en résulte que $f(x,t)$ est dominée indépendamment de $x \in]-1,+\infty[$ par une fonction φ d'intégrale absolument convergente, ce qui implique la continuité de φ $]-1,+\infty[$ conformément au programme de PT.

3. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = t^x\mathrm{e}^{-t}\ln t$ existe et est clairement continue sur $[a,b]\times]0,+\infty[$; pour montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,+\infty[$, il faut montrer une propriété de domination analogue sur $\dfrac{\partial f}{\partial x} = t^x\mathrm{e}^{-t}\ln t$.

   Posons $\psi(t) = \begin{cases} -t^a\mathrm{e}^{-t}\ln t & \text{si} \quad t \in]0,1[\\ t^b\mathrm{e}^{-t}\ln t & \text{si} \quad t > 1 \end{cases}$; Alors $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \psi(t)$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \psi(t)\,\mathrm{d}t$ converge, car $-t^a\mathrm{e}^{-t}\ln t \overset{t\to 0}{\ll} t^{(a-1)/2}$ et $\dfrac{a-1}{2} > -1$; $-t^b\mathrm{e}^{-t}\ln t \overset{t\to +\infty}{\ll} \mathrm{e}^{-t/2}$.

   Finalement F est $\mathcal{C}^1$ et $\boxed{F'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^x\mathrm{e}^{-t}\ln t\,\mathrm{d}t}$.

4. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ln t\,\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-t}\ln t\right]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} -\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t = B(1)$; De plus (en remarquant au préalable que $(1 - \mathrm{e}^{-t})\ln t \sim t\ln t \to 0$ en 0) $A(1) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t = \left[(1-\mathrm{e}^{-t})\ln t\right]_0^1 - \int_0^1 \ln t.\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 0 - \int_0^1 \ln t.\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ donc $B(1) - A(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln t\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = F'(0)$ Comme $S = A(1) - B(1)$, $F'(0) = -S$.

5. Pour tout $x > 0$, $\mathrm{e}^{-xt}\ln t = \mathrm{e}^{-xt/2}.\mathrm{e}^{-xt/2}\ln t \overset{t\to +\infty}{\ll} \mathrm{e}^{-xt/2}$, donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln t\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$ converge.

   De plus, $\mathrm{e}^{-xt}\ln t \overset{t\to 0}{\ll} \ln t$ et $\displaystyle\int_0^1 \ln t\,\mathrm{d}t$ donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln t\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$ converge.

   En posant $u := xt$, $I(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}\ln\left(\frac{u}{x}\right)\frac{\mathrm{d}u}{x} = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}(\ln u - \ln x)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{x}\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}\ln u\,\mathrm{d}u - x\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u\right)$;
   $I(x) = \dfrac{1}{x}\left(-S - \ln x\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u\right) = -\dfrac{1}{x}(S + \ln x)$.

Christian Rieffel, Lycée Louis Armand — Poitiers ch.rieffel@free.fr