

1. La matrice tMAM est élément de $\mathcal{M}_{p,p}$, sa transposée est ${}^tM {}^tA ({}^tM) = {}^tMAM$ car A est symétrique.
 Pour tout $X \in \mathcal{M}_{p,1}$ on observe que :

$$({}^tMAMX | X) = (A MX | MX) \geq 0$$

car A est positive. La matrice tMAM est donc bien positive.

On peut remarquer que si A est définie positive et que M est régulière (ce qui implique $n = p$), alors tMAM est définie positive. En effet dans ce cas, si $X \neq 0$, alors $MX \neq 0$ et comme A est définie positive :

$$({}^tMAMX | X) = (A MX | MX) > 0$$

2. Si $A \in \mathcal{S}_n$ toutes ses puissances sont symétriques puisque pour tout $p \in \mathbb{N}$, ${}^t(A^p) = ({}^tA)^p = A^p$.

Les puissances d'ordre pair sont nécessairement positives, car pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}$:

$$(A^{2k}X | X) = (A^kX | A^kX) \geq 0$$

puisque c'est un carré scalaire.

Si de plus A est positive, ses puissances d'ordre impair sont positives, puisque pour tout entier k , $A^{2k+1} = ({}^tA^k) A A^k$, qui est positive d'après la question 1.

3. Supposons que A soit positive (resp. définie positive) et soit λ une valeur propre de A . Il existe un vecteur $X \in \mathcal{M}_{n,1}$ non nul tel que $AX = \lambda X$. Si A est positive :

$$(AX | X) = (\lambda X | X) = \lambda (X | X) \geq 0$$

l'inégalité étant stricte si A est définie positive. Comme $(X | X) > 0$, puisque $X \neq 0$, on en déduit que si A est positive $\lambda \geq 0$ et si A est définie positive, $\lambda > 0$.

Réciproquement supposons que les valeurs propres de A soient toutes ≥ 0 (resp. > 0). On sait que A , étant réelle symétrique, est diagonalisable en base orthonormée. Il existe donc une matrice orthogonale P et une matrice diagonale Δ telles que $A = P^{-1}\Delta P = {}^tP\Delta P$ (puisque P est orthogonale). D'après la question 1 (et la remarque faite) il suffit de prouver que la matrice Δ est positive (resp. définie positive).

Les matrices A et Δ étant semblables elles ont les mêmes valeurs propres qui sont donc positives (resp. > 0) ; ces valeurs propres sont les coefficients diagonaux de Δ que nous noterons $(\lambda_i)_{i=1..n}$. Pour tout vecteur $X \in \mathcal{M}_{n,1}$ de coordonnées $(x_i)_{i=1..n}$ on a :

$$(\Delta X | X) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \geq 0$$

Si de plus $X \neq 0$ et que les valeurs propres sont > 0 , alors :

$$(\Delta X | X) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 > 0$$

La matrice A est donc positive (resp. définie positive).

4. Remarquons qu'il est nécessaire que A soit positive pour qu'il existe une matrice C (symétrique) telle que $A = C^2$ d'après la remarque de la question 2. Montrons que cette condition est aussi suffisante pour qu'il existe une matrice C symétrique telle que $C^2 = A$. En effet, si A est positive, il existe une matrice diagonale Δ de coefficients diagonaux $(\lambda_i)_i$ positifs et une matrice orthogonale P telles que $A = P^{-1}\Delta P$. Les coefficients diagonaux de Δ étant positifs, ils ont des racines carrées et si Δ_1 est la matrice diagonale de coefficients diagonaux $(\sqrt{\lambda_i})_i$, on obtient en posant $C = P^{-1}\Delta_1 P$:

$$C^2 = P^{-1}\Delta_1^2 P = P^{-1}\Delta P = A$$

La matrice C est bien symétrique car Δ est symétrique et $P^{-1} = {}^tP$, et elle est positive car ses valeurs propres sont positives. Bien entendu si A est définie positive, les λ_i sont > 0 donc les $\sqrt{\lambda_i}$ sont > 0 , donc la matrice C trouvée est définie positive.

5. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Il est clair que si $X \in \mathcal{M}_{n,1}$ est tel que $CX = \sqrt{\lambda}X$ alors $AX = C^2X = \lambda X$. On en déduit pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+$ l'inclusion

$$\text{Ker}(C - \sqrt{\lambda}I_n) \subset \text{Ker}(A - \lambda I_n)$$

Pour établir l'inclusion opposée considérons les endomorphismes symétriques a et c de l'espace $\mathcal{M}_{n,1}$ associés aux matrices A et C . Comme $c^2 = a$, a et c commutent, donc $a - \lambda \text{Id}$ commute avec c ; on en déduit que le sous-espace $N = \text{Ker}(A - \lambda I_n) = \text{Ker}(a - \lambda \text{Id})$ est stable par c . L'endomorphisme symétrique c , supposé positif, induit donc sur N un endomorphisme symétrique et positif c_1 tel que $c_1^2 = \lambda \text{Id}_N$. L'endomorphisme c_1 est diagonalisable (en BON) et les valeurs propres de c_1 sont nécessairement des racines carrées de λ ; comme elles sont de plus positives, cela implique que ces valeurs propres ne peuvent être que $\sqrt{\lambda}$; on en déduit $c_1 = \sqrt{\lambda} \text{Id}_N$. Cela implique l'inclusion $\text{Ker}(a - \lambda \text{Id}) \subset \text{Ker}(c - \sqrt{\lambda} \text{Id})$ et finalement l'égalité de ces noyaux.

N.B. On ne suppose pas que λ soit effectivement une valeur propre de A , ni que A et C soient définies positives (on suppose seulement que A et C sont positives).

6. Reprenons pour plus de clarté les endomorphismes associés aux matrices. L'espace $\mathcal{M}_{n,1}$ est somme directe des sous-espaces propres de a et si λ est une valeur propre de a , sur l'espace propre $\text{Ker}(a - \lambda \text{Id})$ l'endomorphisme c coïncide d'après la question précédente avec $\sqrt{\lambda} \text{Id}$; cela implique, par le théorème de définition d'une application linéaire dans une somme directe,

l'unicité de c . Il existe donc une unique matrice C symétrique et positive telle que $C^2 = A$. Si de plus A est définie positive, d'après la question 4) cette matrice est définie positive.

D'après la question 5) tout vecteur propre de A est aussi vecteur propre de C , donc toute base de vecteurs propres de A est aussi une base de vecteurs propres de C . Il faut supposer que c'est ce qu'entend l'auteur de l'énoncé par l'expression :

“dans toute base ... la matrice C est diagonale”

7. Comme A est définie positive ses valeurs propres sont > 0 , donc non nulles, donc A est inversible. La matrice A^{-1} est aussi symétrique et ses valeurs propres sont les inverses des valeurs propres de A donc aussi > 0 . La matrice A^{-1} est donc symétrique définie positive et, d'après ce qui précède, il existe une unique matrice symétrique positive C' telle $C'^2 = A^{-1}$; C' est définie positive; $C' = A^{-1/2}$.
8. Notons C la matrice symétrique positive telle que $C^2 = A$; la matrice C^{-1} est aussi symétrique et définie positive et $(C^{-1})^2 A = C^{-1} C^{-1} C C = I_n$, donc $(C^{-1})^2 = A^{-1}$. Par unicité on en déduit $C^{-1} = C'$ ou encore avec les notations de l'énoncé : $(A^{1/2})^{-1} = A^{-1/2}$.
9. On peut remarquer que $A \preceq B$ si, et seulement si, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}$, $(AX | X) \leq (BX | X)$, puisqu'on a l'égalité :

$$(BX | X) - (AX | X) = ((B - A)X | X)$$

La relation est donc trivialement réflexive et transitive. Si $A \preceq B$ et $B \preceq A$, les formes quadratiques associées aux matrices symétriques A et B sont identiques, donc ces matrices sont identiques. La relation est donc aussi antisymétrique.

10. Remarquons que ${}^t C B C - {}^t C A C = {}^t C (B - A) C$. Si $A \preceq B$, la matrice $B - A$ est positive et d'après la question 1 la matrice ${}^t C (B - A) C$ est aussi positive. On en déduit ${}^t C A C \preceq {}^t C B C$.
11. Si $I_n \preceq A$, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}$ non nul on a

$$0 < (X | X) \leq (AX | X)$$

donc A est définie positive et par conséquent inversible (question 7). On peut appliquer la question 10 en remplaçant A par I_n , B par A et C par la matrice symétrique $A^{-1/2}$ introduite dans la question 7. On trouve :

$$A^{-1/2} I_n A^{-1/2} \preceq A^{-1/2} A A^{-1/2} = A^{-1/2} A^{1/2} A^{1/2} A^{-1/2}$$

En appliquant le résultat de la question 8 on en déduit :

$$A^{-1} \preceq I_n$$

12. Par définition la matrice A est définie positive ; pour tout $X \neq 0$, $(BX | X) \geq (AX | X) > 0$, donc B est aussi définie positive, et par conséquent inversible.

Soit C la matrice symétrique définie positive telle que $C^2 = A$. On a :

$$A \preceq B \quad \text{donc} \quad I_n = C^{-1}AC^{-1} \preceq C^{-1}BC^{-1}$$

D'après la question 11 on en déduit :

$$CB^{-1}C \preceq I_n \quad \text{d'où} \quad B^{-1} = C^{-1}CB^{-1}CC^{-1} \preceq C^{-1}C^{-1} = (C^2)^{-1} = A^{-1}$$

13. On sait que les valeurs propres de la matrice (symétrique) D sont les zéros du polynôme $X^2 - (a + c)X + ac - b^2$. La matrice D est positive si, et seulement si, les racines de ce polynôme sont positives (question 3). Une CNS est que le produit et la somme des racines soient tous les deux ≥ 0 , soit $a + d \geq 0$ et $ac \geq b^2$.

14. Comme :

$$B - D = \begin{bmatrix} a & -b \\ -b & 1 \end{bmatrix}$$

les conditions $0 \preceq D$ et $D \preceq B$ sont toutes les deux équivalentes à :

$$a + 1 \geq 0 \quad \text{et} \quad a \geq b^2$$

Enfin comme la deuxième condition implique la première, on obtient la CNS : $a \geq b^2$.

D'autre part :

$$D^2 = \begin{bmatrix} a^2 + b^2 & (a+1)b \\ (a+1)b & b^2 + 1 \end{bmatrix} \quad B^2 = \begin{bmatrix} 4a^2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

donc

$$B^2 - D^2 = \begin{bmatrix} 3a^2 - b^2 & -(a+1)b \\ -(a+1)b & 3 - b^2 \end{bmatrix}$$

On obtient par conséquent :

$$\text{tr}(B^2 - D^2) = 3(a^2 + 1) - 2b^2 \quad \det(B^2 - D^2) = (3a^2 - b^2)(3 - b^2) - b^2(a+1)^2$$

La trace est toujours > 0 puisque si $a \geq b^2$ on a :

$$\text{tr}(B^2 - D^2) = 3(a^2 + 1) - 2b^2 \geq 3(a^2 + 1) - 2a = 2(a^2 + 1) + (a - 1)^2$$

mais pour $a = b^2$:

$$\begin{aligned} \det(B^2 - D^2) &= (3a^2 - a)(3 - a) - a(a+1)^2 = \\ &= -a((3a - 1)(a - 3) + (a+1)^2) = \\ &= -a(4a^2 - 8a + 4) = -4a(a - 1)^2 = -4b^2(b^2 - 1)^2 \end{aligned}$$

On en déduit que si $b \neq 0$, $b \neq 1$ et $a = b^2$, on a $D^2 \not\preceq B^2$ alors que $0 \preceq D \preceq B$.

15. Posons $P^{-1}X = Y$; comme $P\Delta P^{-1}X = \lambda X$ on en déduit $\Delta Y = \lambda Y$. Notons (y_i) les coordonnées de Y ; l'égalité précédente s'écrit $\forall i \lambda_i y_i = \lambda y_i$; si i est tel que $\lambda_i \neq \lambda$, alors $y_i = 0$. D'autre part $RX = Pf(\Delta)P^{-1}X$, donc $P^{-1}RX = f(\Delta)Y$; ce vecteur a pour coordonnées $(f(\lambda_i)y_i)_i$; si $\lambda_i \neq \lambda$, $y_i = 0$ donc $f(\lambda_i)y_i = f(\lambda)y_i$ et si $\lambda_i = \lambda$ alors $f(\lambda_i)y_i = f(\lambda)y_i$; on en déduit l'égalité $P^{-1}RX = f(\lambda)Y$ et finalement $RX = f(\lambda)X$.
16. Posons $R_P = Pf(\Delta_P)P^{-1}$ et $R_Q = Qf(\Delta_Q)Q^{-1}$. D'après la question 15 les endomorphismes associés aux matrices R_P et R_Q coïncident sur les espaces propres de M et comme M est diagonalisable, l'espace $\mathcal{M}_{n,1}$ est somme directe des espaces propres de M . Les endomorphismes associés aux matrices R_P et R_Q sont donc identiques; on en déduit $R_P = R_Q$.
17. Pour tout $r \in \mathbb{R}$, la fonction φ_r est continue sur $]0, +\infty[$. La fonction $s \mapsto s\varphi_r(s)$ est intégrable sur $]0, 1]$ si, et seulement si, $r < 1$ (règle de Riemann), et la fonction φ_r est intégrable au voisinage de $+\infty$ si, et seulement si, $r > 0$ (règle de Riemann). La fonction φ_r est donc élément de E si, et seulement si, $0 < r < 1$.
En posant $u = st$ dans l'intégrale (pour $t > 0$) on obtient facilement :

$$L_{\varphi_r}(t) = \int_0^{+\infty} \frac{t ds}{(1+st)s^r} = t^r \int_0^{+\infty} \frac{du}{(1+u)u^r} = t^r \varphi_r(1)$$

18. Posons $A = P\Delta P^{-1}$ où P est une matrice orthogonale et Δ est diagonale, de coefficients diagonaux ≥ 0 puisque A est positive. Notons $(\lambda_i)_i$ les coefficients diagonaux de Δ . La matrice $I_n + s\Delta$ a pour coefficients diagonaux la famille $(1 + s\lambda_i)_i$ (tous > 0), son inverse $(I_n + s\Delta)^{-1}$ a pour coefficients diagonaux la famille $((1 + s\lambda_i)^{-1})_i$ et la matrice $I_n - (1 + s\Delta)^{-1}$ a donc pour coefficients diagonaux la famille $(1 - (1 + s\lambda_i)^{-1})_i$; il s'agit par conséquent de la matrice $f_s(\Delta)$. De l'égalité :

$$f_s(\Delta) = I_n - (1 + s\Delta)^{-1}$$

on tire sans difficultés :

$$f_s(A) = Pf_s(\Delta)P^{-1} = P(I_n - (1 + s\Delta)^{-1})P^{-1} = I_n - (1 + sA)^{-1}$$

car l'application $M \mapsto PMP^{-1}$ est un automorphisme de l'algèbre $\mathcal{M}_n$.

19. Supposons $0 \preceq A \preceq B$; on a évidemment $sA \preceq sB$ puisque $s > 0$ et $I_n + sA \preceq I_n + sB$ (la différence est positive); on a aussi $0 \prec I_n \preceq I_n + sA$. D'après la question 12 on en déduit $(I_n + sB)^{-1} \preceq (I_n + sA)^{-1}$ puis enfin par différence $f_s(A) \preceq f_s(B)$. La fonction f_s est donc matriciellement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
20. Pour $t \in \mathbb{R}_+$ on remarque que $L_\varphi(t) = \int_0^{+\infty} f_s(t)\varphi(s) ds$. Montrons que pour tout $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}$ on a l'égalité :

$$(L_\varphi(A)X | Y) = \int_0^{+\infty} (f_s(A)X | Y) ds$$

Si X vérifie $AX = \lambda X$ alors pour tout $s > 0$, $f_s(A)X = f_s(\lambda)X$ et $L_\varphi(A)X = L_\varphi(\lambda)X$ (question 15) ; dans ce cas :

$$\begin{aligned}
(L_\varphi(A)X | Y) &= L_\varphi(\lambda) (X | Y) = (X | Y) \int_0^{+\infty} f_s(\lambda) \varphi(s) \, ds = \\
&= \int_0^{+\infty} (X | Y) f_s(\lambda) \varphi(s) \, ds = \\
&= \int_0^{+\infty} (f_s(\lambda)X | Y) \varphi(s) \, ds = \\
&= \int_0^{+\infty} (f_s(A)X | Y) \varphi(s) \, ds
\end{aligned}$$

Cette égalité s'étend par linéarité à toute somme de vecteurs propres de A donc à tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}$ puisque A est diagonalisable. Enfin pour $Y = X$ on obtient l'égalité à démontrer.

21. L'application f_s étant matriciellement croissante sur $\mathbb{R}_+$ (question 19) il est clair par monotonie de l'intégrale, et la question précédente, que l'application L_φ est matriciellement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
22. Pour $r \in]0, 1[$ l'application φ_r est élément de E (question 17). L'application L_{φ_r} est alors matriciellement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Or pour tout $t > 0$ on a : $L_{\varphi_r}(t) = t^r L_{\varphi_r}(1)$, ce qui est vrai aussi pour $t = 0$. Comme $L_{\varphi_r}(1) = \int_0^{+\infty} \frac{ds}{(1+s)s^r} > 0$ on en déduit que l'application $t \mapsto t^r$ est matriciellement croissante sur $\mathbb{R}_+$.