Centrale 2009. Option MP. Mathématiques II.

Corrigé pour serveur UPS par JL. Lamard (jean-louis.lamard@prepas.org)

Partie I. Produit de deux automorphismes autoadjoints positifs.

I.A - Généralités

A.1) Un endomorphisme symétrique u de E est orthodiagonalisable. Notons $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ son spectre, $\mathcal{B}$ une base orthonormée de vecteurs propres et (x_i) les composantes d'un vecteur x quelconque de E dans cette base.

Alors $\big(u(x)|x\big) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i x_i^2$ et il est ainsi immédiat que u est positif (resp. défini positif) si et seulement si $\lambda_i \geqslant 0$ (resp. $\lambda_i > 0$) pour tout i de 1 à n. $\square$

A.2) Si $u \in S^{++}(E)$ sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $\operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ avec $\lambda_i > 0$ donc u est inversible et la matrice de u^{-1} dans la base $\mathcal{B}$ est $\operatorname{diag}(\dfrac{1}{\lambda_1}, \dfrac{1}{\lambda_2}, \ldots, \dfrac{1}{\lambda_n})$.

Comme la base est orthonormée cela prouve déjà que u^{-1} est symétrique et la question précédente prouve qu'il est défini positif. $\square$

A.3.a) On reprend les notations précédentes en notant qu'ici on a simplement $\lambda_i \geqslant 0$. Soit s l'endomorphisme de matrice $\operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})$ dans la base $\mathcal{B}$. Comme $\mathcal{B}$ est orthonormée, s est symétrique et il est positif d'après la permière question. En outre en considérant les matrices dans la base $\mathcal{B}$ il vient que $u = s^2$. $\square$

A.3.b) Ainsi $\big(u(x)|x\big) = \big(s(s(x))|x\big) = \big(s(x)|s(x)\big) = \|s(x)\|^2$.
Donc si $\big(u(x)|x\big) = 0$ alors $s(x) = 0$ donc a fortiori $s\big(s(x)\big) = 0$ soit $u(x) = 0$. $\square$

I.B - Preuve du résultat

B.1.a) On a $\big(u(x)|y\big) = \big(x|u(y)\big)$ et $\big(u(x)|x\big) \geqslant 0$ pour tout (x, y) de E^2 donc a fortiori pour tout $(x, y) \in (\operatorname{Im} u)^2$ ce qui prouve déjà que u_1 est autoadjoint positif.
Par ailleurs $\operatorname{Ker} u_1 = \operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u$ et comme u est autoadjoint on a $\operatorname{Ker} u = (\operatorname{Im} u^*)^\perp = (\operatorname{Im} u)^\perp$ donc $\operatorname{Ker} u_1 = \{0\}$ ce qui prouve que $\operatorname{Sp}(u_1) \subset \mathbb{R}^{+*}$ et finalement que $u_1 \in S^{++}(\operatorname{Im} u)$. $\square$

B.1.b) Notons $< .|. >$ le produit scalaire sur $\operatorname{Im} u$ défini par u_1^{-1} et soit $(x, y) \in \operatorname{Im} u$. Il vient :

- $< w(x)|y >= \big(u_1^{-1}(w(x))|y\big) = \big(w(x)|u_1^{-1}(y)\big) = \big(u(v(x))|u_1^{-1}(y)\big) = \big(v(x)|u(u_1^{-1}(y)\big)$

Or $uou_1^{-1} = u_1 ou_1^{-1} = \operatorname{Id}_{\operatorname{Im} u}$ Donc $< w(x)|y >= \big(v(x)|y\big)$
Comme v est autoadjoint, cette fonction est symétrique en x et y donc w est bien symétrique pour $\phi_{u_1^{-1}}$.

- D'après le calcul ci-dessus, $< w(x)|x >= \big(v(x)|x\big) \geqslant 0$ puisque v est positif.
- En conclusion w est bien autoadjoint positif pour $\phi_{u_1^{-1}}$. $\square$

B.2) $\operatorname{Im}(u \circ v)$ est un sous-espace de $\operatorname{Im} u$ et la restriction de $u \circ v$ à $\operatorname{Im} u \circ v$ n'est autre que la restriction de w.
Or w en tant qu'endomorphisme autoadjoint positif est diagonalisable à valeurs propres dans $\mathbb{R}^+$ et on sait que la restriction d'un endomorphisme diagonalisable à un sous-espace stable est diagonalisable (avec ses valeurs propres naturellement à choisir parmi celles de l'endomorphisme de départ).
Ainsi la restriction de $u \circ v$ à $\operatorname{Im}(u \circ v)$ est diagonalisable et son spectre est inclus dans $\mathbb{R}^+$. $\square$

B.3) Soit $x \in \operatorname{Im}(u \circ v) \cap \operatorname{Ker}(u \circ v)$ et soit y tel que $x = u \circ v(y)$.
On a $\big(v(x)|x\big) = \big(v(x)|u(v(y))\big) = \big(u(v(x))|v(y)\big) = \big(0|v(y)\big) = 0$
Comme v est autoadjoint positif, on a $v(x) = 0$ d'après (1).
Par ailleurs $\big(u(v(y))|v(y)\big) = \big(x|v(y)\big) = \big(v(x)|y\big) = \big(0|y\big) = 0$
Donc, toujours d'après (1), $u(v(y))$ c'est à dire x est nul et la somme $\operatorname{Im}(u \circ v) + \operatorname{Ker}(u \circ v)$ est directe.
Le théorème du rang fournit alors la conclusion. $\square$

B.3) $\operatorname{Im}(u \circ v)$ et $\operatorname{Ker}(u \circ v)$ sont deux sous-espaces stables par $u \circ v$ et supplémentaires. La restriction de $u \circ v$ au premier est diagonalisable avec un spectre inclus dans $\mathbb{R}^+$ (question B.2) ainsi bien sûr que la restriction au second avec 0 comme unique valeur propre.
Il en découle que $u \circ v$ est diagonalisable (concaténation de bases de vecteurs propres) et que son spectre est inclus dans $\mathbb{R}^+$. $\square$

I.C - Cas particulier

C.1.a) • Pour y fixé dans F, l'application $x \longmapsto \big(f(x)|y\big)$ est une forme linéaire sur E. Donc (isomorphisme canonique entre un espace euclidien et son dual) il existe un unique vecteur de E noté $g(y)$ tel que $\big(f(x)|y\big) = \big(x|g(y)\big)$.

- En outre pour $(y, z) \in F^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a pour tout x de E :

$\big(x|g(y + \lambda z)\big) = \big(f(x)|y + \lambda z\big) = \big(f(x)|y\big) + \lambda\big(f(x)|z\big) = \big(x|g(y)\big) + \lambda\big(x|g(z)\big) = \big(x|g(y) + \lambda g(z)\big)$ donc :
$g(y + \lambda z) - g(y) - \lambda g(z)$ est nul car élément de $E^\perp$ ce qui établit la linéarité de g. $\square$

C.1.b) $y \in \operatorname{Ker} f^*$ si et seulement si $f^*(y) = 0$ soit si et seulement si $f^*(y) \in E^\perp$ soit si et seulement si $\big(x|f^*(y)\big) = 0$ pour tout $x \in E$ soit si et seulement si $\big(f(x)|y\big) = 0$ pour tout $x \in E$ soit si et seulement si $y \in \big(\operatorname{Im} f\big)^\perp$.
Ainsi $\operatorname{Ker} f^* = \big(\operatorname{Im} f\big)^\perp$ □

C.1.c) Première démonstration :
$z_k \in \operatorname{Im} f = \big(\operatorname{Ker} f^*\big)^\perp$ d'après la question précédente.
Or f^* induit un isomorphisme φ de $\big(\operatorname{Ker} f^*\big)^\perp$ sur $\operatorname{Im} f^*$ puisque $\big(\operatorname{Ker} f^*\big)^\perp$ est un supplémentaire de $\operatorname{Ker} f^*$ (dimension finie).
Ainsi puisque $f^*(z_k) = \varphi(z_k)$ tend vers 0, $z_k = \varphi^{-1}(\varphi(z_k))$ tend vers $\varphi^{-1}(0) = 0$ puisque φ^{-1} est continu (dimension finie).
Ainsi si une suite (z_k) de $\operatorname{Im} f$ est telle que la suite $\big(f^*(z_k)\big)$ tend vers 0 alors la suite (z_k) converge vers 0. □
Deuxième démonstration :
Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ une base orthonormale de $\operatorname{Im} f$ et $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ une famille de E telle que $f(u_i) = e_i$. Alors :
$z_k = \sum\limits_{i=1}^{p} \big(e_i|z_k\big)e_i = \sum\limits_{i=1}^{p} \big(u_i|f^*(z_k)\big)e_i$ d'où la conclusion car $\Big|\big(u_i|f^*(z_k)\big)\Big| \leqslant \|u_i\|.\|f^*(z_k)\| \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ □

C.1.d) Pour $(x, y) \in E^2$ il vient $\big(x|f^* \circ f(y)\big) = \big(f(x)|f(y)\big)$ quantité symétrique en x et y et $\big(x|f^* \circ f(x)\big) = \|f(x)\|^2$ donc $f^* \circ f \in S^+(E)$ □

C.2) $a^{-1} \circ f^* \circ f = a^{-1} \circ (f^* \circ f)$ est donc le produit de deux endomorphismes autoadjoints positifs d'où la conclusion d'après I.B. □

C.3) $a^{-1} \circ f^* \circ f$ est autoadjoint positif pour le produit scalaire défini sur E par $< x|y >= \big(a(x)|y\big)$ car $< a^{-1} \circ f^* \circ f(x)|y >= \big(f^* \circ f(x)|y\big) = \big(f(x)|f(y)\big)$
Or si φ est un endomorphisme autoadjoint pour un produit scalaire $< .|. >$ il vient immédiatment en considérant une base orthodiagonalisante que $| < \varphi(x)|x > \leqslant \rho(\varphi) \times < x|x >^2$ avec $\rho(\varphi)$ le rayon spectral de φ.
En considérant $\varphi = a^{-1} \circ f^* \circ f$ pour le produit scalaire défini précédemment on obtient l'inégalité demandée. □

Partie II. Minimisation d'une fonctionnelle quadratique.

II.A - Minimisation théorique.

A.1) Soit $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ le spectre de a.
En considérant une base orthodiagonalisante de a, il vient immédiatement $\big(a(x)|x\big) \geqslant \lambda_1\|x\|^2$
Comme $\big(b|x\big) \leqslant \|b\|.\|x\|$ on obtient $J(x) \geqslant \Big(\dfrac{\lambda_1}{2}\|x\| - \|b\|\Big)\|x\| \xrightarrow[\|x\|\to+\infty]{} +\infty$ □

A.2) Première démonstration :
En particulier il existe $\alpha > 0$ tel que $\|x\| \geqslant \alpha$ implique $J(x) \geqslant 0$.
$V \cap \overline{B}(0, \alpha)$ est un fermé borné de V espace de dimension finie donc un compact. Or J est une application continue (par continuité du produit scalaire et de a endomorphisme d'un espace de dimension finie) donc admet un minimum $J(x_0)$ sur $V \cap \overline{B}(0, \alpha)$.
Or $J(x_0) \leqslant 0$ car $J(x_0) \leqslant J(0)$ puisque $0 \in V \cap \overline{B}(0, \alpha)$.
On a donc également $J(x_0) \leqslant J(x)$ pour tout x tel que $\|x\| \geqslant \alpha$.
Finalement $J(x_0) \leqslant J(x)$ pour tout $x \in V$. □
Deuxième démonstration :
Soit $\alpha = \operatorname*{Inf}\limits_{x\in V} J(x)$ (a priori α éventuellement égal à $-\infty$) et soit $(x_k)_{k\geqslant1}$ une suite de V minimisante c'est à dire telle que $J(x_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \alpha$. Cette suite est bornée d'après la question précédente donc admet une valeur d'adhérence x_0 dans V (théorème de Bolzano-Weierstrass dans V espace de dimension finie).
Alors si (y_k) avec $y_k = x_{\varphi(k)}$ est une suite extraite convergeant vers x_0 on a que la suite $\big(J(y_k)\big)$ tend vers $J(x_0)$ par continuité de J et vers α en tant que suite extraite de la suite $\big(J(x_k)\big)$. Ainsi $\alpha = J(x_0)$. □

A.3.a) Un calcul immédiat montre que l'inégalité proposée équivaut à $\big(a(x+y)|x+y\big) < 2\big(a(x)|x\big) + 2\big(a(y)|y\big)$ c'est à dire à $\big(a(x-y)|x-y\big) > 0$ ce qui est bien vrai car a est défini positif et $x - y \neq 0$. □

A.3.b) Si le minimum m était atteint en deux points distincts au moins x_0 et y_0 alors on aurait en notant z_0 le milieu de x_0 et y_0 qui appartient bien à V : $J(z_0) < \dfrac{m+m}{2} = m$. Contradiction. □

A.4.a) Un calcul facile (en n'oubliant pas que a est symétrique) fournit :
$J(x + th) = J(x) + \big(a(x) - b|h\big)t + \dfrac{1}{2}\big(a(h)|h\big)t^2$ □

A.4.b) • Supposons $a(x_0) - b \in V^\perp$. Soit x quelconque de V différent de x_0. Il vient en notant $h = x - x_o$:
$J(x) = J(x_0 + h) = J(x_0) + \dfrac{1}{2}\big(a(h)|h\big) > J(x_0)$ car a est défini positif et h non nul.
Ainsi J_V est bien minimale en x_0 en notant J_V la restriction de J à V.

• Réciproquement supposons J_V minimale en x_0.
Fixons h quelconque non nul dans V et envisageons $\varphi : t \longmapsto J(x_0 + th)$
La question précédente permet d'écrire $\varphi(t) = \varphi(0) + \big(a(x_0) - b|h\big)t + o(t)$ ce qui prouve que φ est dérivable en 0 de nombre dérivé $\varphi'(0) = \big(a(x_0) - b|h\big)$.
Mais comme J_V est minimale en x_0, a fortiori φ est minimale en 0 donc $\varphi'(0)$ est nul.
Donc $a(x_0) - b$ est orthogonal à h et comme h est quelconque dans V on a bien $a(x_0) - b \in V^\perp$.

• En conclusion J_V est minimale en x_0 si et seulement si $a(x_0) - b \in V^\perp$. □

A.5.a) Posons $x = \omega + h$ de sorte que $J(x) = J(\omega) + \dfrac{1}{2}\big(a(h)|h\big)$ d'après ce qui précède.

Ainsi dans le repère déduit de la base canonique par translation en prenant ω pour origine, la surface $\mathcal{E}_k$ a pour équation $\big(a(h)|h\big) = k'$ avec $k' = 2\big(k - J(\omega)\big) > 0$.
Comme a est défini positif, il s'agit donc d'un ellipsoïde de centre ω. □

A.5.b) Dans ce repère $\mathcal{E}_k$ a pour équation $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 = k'$ en notant λ_i les valeurs propres de a et Π admet une équation de la forme $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ avec d non nul puisque $\omega \notin \Pi$.
Ce plan est tangent à $\mathcal{E}_k$ si et seulement si il existe (x_1, x_2, x_3) et α tels que :

$$\begin{cases} \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 = k' \\ ax_1 + bx_2 + cx_3 = d \\ \lambda_1 x_1 = \alpha a \\ \lambda_2 x_2 = \alpha b \\ \lambda_3 x_3 = \alpha c \end{cases} \quad \text{soit si et seulement (car } \lambda_i \neq 0) \text{ il existe } \alpha \text{ tel que} \quad \begin{cases} (\dfrac{a^2}{\lambda_1} + \dfrac{b^2}{\lambda_2} + \dfrac{c^2}{\lambda_3})\alpha^2 = k' \\ (\dfrac{a^2}{\lambda_1} + \dfrac{b^2}{\lambda_2} + \dfrac{c^2}{\lambda_3})\alpha = d \end{cases}$$

Or $\lambda_i > 0$ et au moins un des trois réels a, b ou c est non nul donc $\dfrac{a^2}{\lambda_1} + \dfrac{b^2}{\lambda_2} + \dfrac{c^2}{\lambda_3} > 0$ de sorte que la seconde équation détermine α (non nul) et la première équation devient alors une équation de compatibilité qui n'est satisfaite que pour une valeur de k' donc pour une seule valeur de k. □

A.5.c) $\mathcal{E}_k$ a pour équation $(x-1)^2 + 2y^2 + 3z^2 = k - 1$. Avec la même méthode, Π est tangent à $\mathcal{E}_k$ si et seulement si il existe (x, y, z, α) tel que :

$$\begin{cases} (x-1)^2 + 2y^2 + 3z^2 = k + 1 \\ x + y + z = 0 \\ x - 1 = \alpha \\ 2y = \alpha \\ 3z = \alpha \end{cases} \quad \text{soit si et ssi il existe } \alpha \text{ tel que} \quad \begin{cases} (1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3})\alpha^2 = k + 1 \\ \alpha = -\dfrac{6}{11} \end{cases} \quad \text{i.e. } k = -\frac{5}{11} \quad \square$$

II.B - Lagrangien augmenté.

B.1) Notons $\varphi = L_r(x, .)$. Il vient $\varphi(p) = C^{te} + \big(p|f(x)\big)$ donc φ est affine d'où la conclusion. □
En détaillant :
• Si φ admet un maximum alors $f(x) = 0$ sinon $\varphi(nf(x)) = n\|f(x)\|^2$ tendrait vers $+\infty$ avec n et ainsi φ n'admettrait pas de maximum.
• Si $x \in \operatorname{Ker} f$ alors φ est constante d'après (1).
• Si φ est constante alors elle admet évidemment un maximum.
• En conclusion les trois assertions sont bien équivalentes. □

B.2) Notons $\psi = L_r(., p)$. Il vient $\psi(x) = \dfrac{1}{2}\big((a + rf^* \circ f)(x)|x\big) - \big(b - f^*(p)|x\big)$.

Or $a + rf^* \circ f$ est autoadjoint (somme des deux autoadjoints) et en outre défini positif car
$\big((a + rf^* \circ f(x)|x\big) = \big(a(x)|x\big) + r\|f(x)\|^2 \geqslant \big(a(x)|x\big) > 0$ pour $x \neq 0$
Ainsi ψ est une fonctionnelle quadratique du type de J et, d'après la question A.4.b), ψ est minimale en x si et seulement si $(a + rf^* \circ f)(x) - (b - f^*(p))$ est orthogonal à E donc nul.
Ainsi ψ est minimale en x si et seulement si $(a + rf^* \circ f)(x) + f^*(p) = b$. □

B.3.a) Il résulte donc des deux questions précédentes que (x, p) est un point selle si et seulement si $x \in \operatorname{Ker} f$ et $(a + rf^* \circ f)(x) + f^*(p) = b$ soit si et seulement si $x \in \operatorname{Ker} f$ et $a(x) + f^*(p) = b$. □

B.3.b) $J_{|\operatorname{Ker} f}$ est minimale en x si et seulement si $a(x) - b \in (\operatorname{Ker} f)^\perp$ d'après A.4.b) soit si et seulement si $a(x) - b \in \operatorname{Im} f^*$ d'après I.C.1.b) donc si et seulement si il existe $p \in F$ tel que $a(x) - b = f^*(-p)$.
Ainsi $J_{|\operatorname{Ker} f}$ est minimale en x si et seulement si il existe $p \in F$ tel que $a(x) + f^*(p) = b$ et naturellement $x \in \operatorname{Ker} f$ donc si et seulement si il existe $p \in F$ tel que (x, p) soit un point selle de L_r. □

B.4.a) Soit (x,p) un point selle. On a donc $a(x)+f^*(p)=b$.
Alors (x,p') est également point selle si et seulement si $a(x)+f^*(p')=b$ soit si et seulement si $a(x)+f^*(p')=a(x)+f^*(p)$ soit si et seulement si $p'-p\in\operatorname{Ker} f^*=(\operatorname{Im} f)^\perp$ $\square$

B.4.b) Soit (x,p) un point selle et $p=p_1+p_2$ la décomposition de p avec $p_1\in\operatorname{Im} f$ et $p_2\in(Imf)^\perp$.
Alors tout point p' tel que (x,p') soit point selle s'écrit $p+y$ avec $y\in(Imf)^\perp$.
Il en découle que $\|p'\|^2=\|p_1\|^2+\|p_2+y\|^2$
Le minimum est donc atteint avec $y=-p_2$.
En conclusion il existe un point p' et un seul tel que (x,p') soit encore point selle et tel que $\|p'\|$ soit minimum : la projection orthogonale de p sur $\operatorname{Im} f$. $\square$

Partie III. Algorithme d'Uzawa et d'Arrow-Hurwicz

Commençons par noter que les suite (x_k) et (p_k) sont bien définies. En effet comme déjà noté $a+rf^*\circ f$ est symétrique défini positif donc inversible.
Ainsi $x_0=(a+rf^*\circ f)^{-1}(b-f^*(p_0))$ puis $p_1=p_0+\gamma_0 f(x_0)$ puis $x_1=(a+rf^*\circ f)^{-1}(b-f^*(p_1))$ puis $p_2=\dots$ etc

A.1.a) Par définition $r_{k+1}-r_k=p_{k+1}-p_k=\gamma_k f(x_k)=\gamma_k f(x_k-x)=\gamma_k f(y_k)$ puisque $x\in\operatorname{Ker} f$. (1) $\square$

On a par construction $(a+rf^*\circ f)(x_k)+f^*(p_k)=b$ et également $(a+rf^*\circ f)(x)+f^*(p)=b$ puisque (x,p) est un point selle donc par différence $(a+rf^*\circ f)(y_k)+f^*(r_k)=0$ (2). $\square$

A.1.b) De (1) on tire $\|r_k\|^2-\|r_{k+1}\|^2=-\gamma_k^2\|f(y_k)\|^2-2\gamma_k\big(r_k|f(y_k)\big)$ (3).
Or $\big(r_k|f(y_k)\big)=\big(f^*(r_k)|y_k\big)$ et $f^*(r_k)=-(a+rf^*\circ f)(y_k)$ d'après (2).
Donc $\big(r_k|f(y_k)\big)=-\big(a(y_k)|y_k\big)-r\big(f^*\circ f(y_k)|y_k\big)=-\big(a(y_k)|y_k\big)-r\|f(y_k)\|^2$.
En remplaçant dans (3) on obtient $\|r_k\|^2-\|r_{k+1}\|^2=\gamma_k\Big(2\big(a(y_k)|y_k\big)+(2r-\gamma_k)\|f(y_k)\|^2\Big)$ $\square$

D'après I.C.3) on a $\big(a(y_k)|y_k\big)\geqslant\dfrac{1}{\rho}\|f(y_k)\|^2$ et par hypothèse $\alpha\leqslant\gamma_k\leqslant\beta$.
Donc $\gamma_k\Big(2\big(a(y_k)|y_k\big)+(2r-\gamma_k)\|f(y_k)\|^2\Big)\geqslant\alpha\Big(\dfrac{2}{\rho}+(2r-\beta)\Big)\|f(y_k)\|^2=\alpha\Big(2(r+\dfrac{1}{\rho})-\beta\Big)\|f(y_k)\|^2$ $\square$

A.1.c) Par hypothèse $2(r+\dfrac{1}{\rho})-\beta>0$ et $\alpha>0$ donc $M=\alpha\Big(2(r+\dfrac{1}{\rho})-\beta\Big)>0$ donc la suite $(\|r_k\|)$ décroît donc converge en tant que suite décroissante minorée. $\square$

De $M\|f(y_k)\|^2\leqslant\|r_k\|^2-\|r_{k+1}\|^2$ on déduit alors que la suite $\big(f(y_k)\big)$ converge vers 0.
Puis de $\|r_k\|^2-\|r_{k+1}\|^2=\gamma_k\Big(2\big(a(y_k)|y_k\big)+(2r-\gamma_k)\|f(y_k)\|^2\Big)$ on tire
$2\big(a(y_k)|y_k\big)=\dfrac{1}{\gamma_k}\Big(\|r_k\|^2-\|r_{k+1}\|^2\Big)-(2r-\gamma_k)\|f(y_k)\|^2\xrightarrow[k\to+\infty]{}0$
car $0<\dfrac{1}{\gamma_k}\leqslant\dfrac{1}{\alpha}$ et $(2r-\gamma_k)$ est bornée.
Or a est symétrique défini positif donc $\big(a(y_k)|y_k\big)=N_a(y_k)$ en désignant par N_a la norme quadratique de y_k associée au produit scalaire défini par a.
Ainsi on a bien $y_k\xrightarrow[k\to+\infty]{}0$ soit $x_k\xrightarrow[k\to+\infty]{}x$. $\square$

B.1.a) On a $p_{k+1}-p_k=\gamma_k f(x_k)$ par construction donc $p_{k+1}-p_k\in\operatorname{Im} f$ donc $\overline{q}_{k+1}=\overline{q}_k$ et la suite $(\overline{q}_k)$ est bien constante. $\square$

B.1.b) Il en découle que $f^*(\overline{p_k}-\overline{p})=f^*(p_k-p)=f^*(r_k)=-(a+rf^*\circ f)(y_k)\xrightarrow[k\to+\infty]{}0$ puisque (y_k) tend vers 0 et que l'endomorphisme $a+rf^*\circ f$ est continu (dimension finie). $\square$

B.1.c) Ainsi $(\overline{p_k}-\overline{p})$ est une suite de $\operatorname{Im} f$ dont l'image par f^* tend vers 0. Donc par la question I.C.1.c), cette suite tend vers 0 i. e. $\overline{p_k}$ converge vers $\overline{p}$ donc $p_k=\overline{p_k}+\overline{q_k}=\overline{p_k}+\overline{q_0}$ converge bien vers $\overline{p}+\overline{q_0}$ $\square$

B.2) Vu que $p_0=0$ on a $x_0=(a+rf^*\circ f)^{-1}(b)$ donc la formule proposée est vraie pour $k=0$.
Supposons la formule vraie jusqu'au rang $k\geqslant 0$. Pour établir la formule au rang $k+1$ donc à tout rang il suffit de montrer que $\alpha_k\underset{\text{DEF}}{=}\Big(\operatorname{Id}_E-\gamma(a+rf^*\circ f)^{-1}\circ f^*\circ f\Big)(x_k)=x_{k+1}$
Or $\alpha_k=x_k-(a+rf^*\circ f)^{-1}\circ f^*(p_{k+1}-p_k)$ car $p_{k+1}-p_k=\gamma f(x_k)$
Par ailleurs $p_{k+1}-p_k=r_{k+1}-r_k$ et $(a+rf^*\circ f)(y_k)+f^*(r_k)=0$ (III.A.1.a)
donc $(a+rf^*\circ f)^{-1}\circ f^*(r_k)=-y_k$ donc $\alpha_k=x_k+y_{k+1}-y_k=x_{k+1}$ $\square$

B.3.a) Notons A la matrice de $f^* \circ f$ dans la base canonique de E. Il vient $a_{i,j} = \big(f^* \circ f(e_j)|e_i\big) = \big(f(e_j)|f(e_i)\big)$
Or par définition $f(e_i) = e_i$ si $i \leqslant m$ et $f(e_i) = 0$ sinon. Il en découle que $A = \mathrm{diag}(1, 1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$.
Il en résulte que la matrice de $\varphi = (a + rf^* \circ f)^{-1} \circ f^* \circ f$ dans la base canonique est :
$D = \mathrm{diag}(1 - \dfrac{\gamma}{\lambda_1 + r}, \ldots, 1 - \dfrac{\gamma}{\lambda_m + r}, 1, \ldots, 1)$
Cette matrice étant symétrique et la base canonique orthonormée, l'endomorphisme φ est bien autoadjoint. $\square$
Compte-tenu de la matrice de f dans la base canonique, on a $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{vect}(e_{m+1}, \ldots, e_n)$ (en effet cette matrice est de rang m et ce sous-espace est inclus dans $\mathrm{Ker}\, f$ et est de dimension $n - m = \dim\ \mathrm{Ker}\, f$ par le théorème du rang). Comme la base canonique est orthonormée on a donc $(\mathrm{Ker}\, f)^{\perp} = \mathrm{vect}(e_1, e_2, \ldots, e_m)$.
La matrice D de φ dans cette base étant diagonale, les deux sous-espaces $\mathrm{Ker}\, f$ et $(\mathrm{Ker}\, f)^{\perp}$ sont évidemment stables par φ. $\square$

B.3.b) Vu ce qui précède la matrice de la restriction ψ de $\mathrm{Id}_E - \gamma(a + rf^* \circ f)^{-1} of^* \circ f$ à $(\mathrm{Ker}\, f)^{\perp}$ est $\mathrm{diag}(1 - \dfrac{\gamma}{\lambda_1 + r}, \ldots, 1 - \dfrac{\gamma}{\lambda_m + r})$. La norme subordonnée d'un endomorphisme autoadjoint étant son rayon spectral, on a donc $|||\psi||| = \max\left(\left|1 - \dfrac{\gamma}{\lambda_1 + r}\right|, \ldots, \left|1 - \dfrac{\gamma}{\lambda_m + r}\right|\right)$
Or la suite (λ_i) est décroissante positive donc la suite $\left(1 - \dfrac{\gamma}{\lambda_i + r}\right)$ est décroissante également donc finalement
$|||\psi||| = \max\left(\left|1 - \dfrac{\gamma}{\lambda_1 + r}\right|, \left|1 - \dfrac{\gamma}{\lambda_m + r}\right|\right)$ $\square$

B.3.c) On a donc $\begin{cases} -\varepsilon \leqslant 1 - \dfrac{\gamma}{\lambda_1 + r} \leqslant \varepsilon \\ -\varepsilon \leqslant 1 - \dfrac{\gamma}{\lambda_m + r} \leqslant \varepsilon \end{cases}$ donc $\begin{cases} (1 - \varepsilon)(\lambda_1 + r) \leqslant \gamma \leqslant (1 + \varepsilon)(\lambda_1 + r) \\ (1 - \varepsilon)(\lambda_m + r) \leqslant \gamma \leqslant (1 + \varepsilon)(\lambda_m + r) \end{cases}$ donc
$(1 - \varepsilon)(\lambda_1 + r) \leqslant \gamma \leqslant (1 + \varepsilon)(\lambda_m + r) \quad (1)$
Ainsi ε vérifie $(1 - \varepsilon)(\lambda_1 + r) \leqslant (1 + \varepsilon)(\lambda_m + r)$ donc $\varepsilon \geqslant \dfrac{\lambda_1 - \lambda_m}{\lambda_1 + \lambda_m + 2r}$.
Ainsi la plus petite valeur possible de ε est $\dfrac{\lambda_1 - \lambda_m}{\lambda_1 + \lambda_m + 2r}$ et est obtenue lorsqu'il y a égalité dans (1) donc pour
$\gamma = \dfrac{2(\lambda_1 + r)(\lambda_m + r)}{\lambda_1 + \lambda_m + 2r}$ $\square$

B.3.c) Plus r est grand, plus ε est petit donc plus la suite (ψ^k) tend vite vers 0 donc plus la convergence de la suite (x_k) est rapide car, compte tenu de III.B.2), $\|x - x_k\| \leqslant \varepsilon^k \|x - (a + rf^* \circ f)^{-1}(b)\|$ $\square$

B.4.a) La matrice A de a dans une base orthonormée étant symétrique, a est bien autoadjoint.
En outre $\big(ax|x\big) = {}^tXAX = \sum\limits_{i=1}^{n} ix_i^2 + 2\sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j = \sum\limits_{i=1}^{n}(i-1)x_i^2 + \Big(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\Big)^2 = \sum\limits_{i=2}^{n}(i-1)x_i^2 + \Big(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\Big)^2 \geqslant 0$ et
$\big(ax|x\big) = 0$ implique $x_1 = 0$ pour $i \geqslant 2$ et $\sum\limits_{i=1}^{n} x_1 = 0$ donc $x = 0$.
Ainsi a est bien défini positif. $\square$

B.4.b) F est la matrice $m \times n$ bloc $(\widetilde{F}|0)$ où $\widetilde{F}$ est la matrice carrée $m \times m$ dont tous les coefficients sont nuls sauf l'antidiagonale composée de 1 et 0 la matrice $m \times (n - m)$ nulle.
Donc ${}^tFF$ est la matrice $n \times n$ dont tous les coefficients sont nuls sauf le bloc $m \times m$ haut-gauche qui vaut ${}^t\widetilde{F}\widetilde{F} = \widetilde{F}\widetilde{F} = \mathrm{Id}_m$.
Ainsi la matrice de $f^* \circ f$ est comme précédemment $D = \mathrm{diag}(1, 1 \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$
Celle de $a + rf^* \circ f$ est donc N avec $n_{i,j} = 1$ si $i \neq j$, $n_{i,i} = i + r$ si $i \leqslant m$ et $n_{i,i} = i$ sinon.
D'où l'algorithme :

Entrer B
Entrer D
Entrer N
$M \longleftarrow N^{-1}$
$P \longleftarrow I_n - 2rMD$
$X \longleftarrow MB$
Pour i de 1 à k faire
    $X \longleftarrow PX$
Fin pour
X

FIN