# MATHEMATIQUES II-B PT-97

## I PARTIE PRELIMINAIRE

### Dérivabilité de F

Définissons $H(x,t)=\int_c^t f(x,y)dy$ pour (x, t)∈ Ix[c, d].

D'après le théorème de Leibniz, H admet une dérivée partielle par rapport à x, continue, et $\frac{\partial H}{\partial x}(x,t)=\int_c^t \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dy$. De plus H admet une dérivée partielle par rapport à t, continue, avec $\frac{\partial H}{\partial t}(x,t)=f(x,t)$.

F(x)=H(x, g(x)), donc par composition, F est dérivable sur I et :

$F'(x)=\frac{\partial H}{\partial x}(x,g(x))+\frac{\partial H}{\partial t}(x,g(x))g'(x)$.

Il en résulte que $F'(x)=\int_c^{g(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dy+f(x,g(x))g'(x)$.

## II PARTIE B

### 1) Calcul de u

$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=p'(x)$; Il existe donc 2 fonctions, λ et μ de la variable x telles que :

$u(x,y)=\frac{y^2}{2}p'(x)+\lambda(x)y+\mu(x)$. u(x,0)=V ⇔μ(x)=V.

u(x,-h(x))=0 ⇔ $\lambda(x)=\frac{V}{h(x)}+\frac{h(x)}{2}p'(x)$.

Finalement, $u(x,y)=\frac{y^2}{2}p'(x)+y\left(\frac{V}{h(x)}+\frac{h(x)}{2}p'(x)\right)+V$.

On notera que la réciproque est immédiate.

### 2) Q'(x)=0

$Q(x)=-\int_0^{-h(x)}u(x,y)dy$. On utilise la partie préliminaire : Q est dérivable sur R et,

$Q'(x)=-\int_0^{-h(x)}\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)dy+h'(x)u(x,-h(x))$.

$$Q'(x) = -\int_{-h(x)}^{0} \frac{\partial v}{\partial y}(x,y)dy$$. (car u(x,-h(x)=0 et $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}$).

$$Q'(x) = -[v(x,y)]_{-h(x)}^{0} = -v(x,0) + v(x,-h(x)) = 0$$

En conséquence, Q' est nulle sur R.

## 3)

Reprenons l'expression de u(x,y) obtenue à la question 1 de cette partie.

$$Q(x) = \int_{-h(x)}^{0} u(x,y)dy = \left[\frac{y^3}{6}p'(x) + \frac{y^2}{2}\left(\frac{V}{h(x)} + \frac{h(x)}{2}p'(x)\right) + Vy\right]_{-h(x)}^{0}.$$

Par conséquent, $Q(x) = \frac{1}{2}Vh(x) - \frac{1}{12}h^3(x)p'(x)$.

Comme Q'(x)=0, on déduit l'égalité : $\forall x \in R \quad \frac{d}{dx}\left(h^3(x)p'(x)\right) = 6Vh'(x)$

# III PARTIE C

## 1a)

h est une fonction L-périodique, h(R)=h([0,L]). De plus, h est <u>continue</u> sur R, à valeurs dans $R^{+*}$, l'image par h de l'intervalle fermé borné [0,L], est un segment $[h_0,h_1]$ $(0<h_0<h_1)$, inclus dans $R^{+*}$. $h_0$ (resp.$h_1$) est le minimum (resp. maximum) de h sur R et h atteint ses bornes.

## 1b)

p vérifie sur [0,L] les hypothèses du théorème de Rolle. Sa dérivée p' s'annule sur l'ouvert ]0,L[.

## 2a

D'après la question 3 de la partie B, il existe une constante $\alpha$ unique telle que $h^3(x)p'(x) = 6Vh(x) + \alpha$. Si $x_0$ est tel que $p'(x_0)=0$, celà équivaut à $h(x_0) = \frac{-\alpha}{6V}$.

Soit h* cette valeur : $\alpha = -6Vh^*$.

## 2b

On déduit l'égalité $h^3(x)p'(x) = 6V(h(x) - h^*)$.

Or $\int_0^L p'(x)dx = p(L) - p(0) = 0$. Donc $6V\left[\int_0^L \frac{dx}{h^2(x)} - \int_0^L \frac{h^*}{h^3(x)}dx\right] = 0$.

D'où $h^* = \dfrac{\int_0^L \frac{dx}{h^2(x)}}{\int_0^L \frac{dx}{h^3(x)}}$.

## 2c

$h_0 \leq h(x) \leq h_1$, donc $h_0 h^2(x) \leq h^3(x) \leq h_1 h^2(x)$; par passage à l'inverse (h(x)>0) :
$\frac{1}{h_1}.\frac{1}{h^2(x)} \leq \frac{1}{h^3(x)} \leq \frac{1}{h_0}.\frac{1}{h^2(x)}$. Par intégration sur le segment [0,L] :
$\frac{1}{h_1}\int_0^L \frac{dx}{h^2(x)} \leq \int_0^L \frac{dx}{h^3(x)} \leq \frac{1}{h_0}\int_0^L \frac{dx}{h^2(x)}$. Donc $\frac{h^*}{h_1} \leq 1 \leq \frac{h^*}{h_0}$.
On obtient l'encadrement $h_0 \leq h^* \leq h_1$ qui était prévisible puisque $h^*=h(x_0)$.
Le raisonnement qui précède est par contre très utile pour étudier un cas d'égalité.

Supposons par exemple $h^*=h_1$. On obtient la relation $\frac{1}{h_1}\int_0^L \frac{dx}{h^2(x)} = \int_0^L \frac{dx}{h^3(x)}$.

C'est-à-dire $\int_0^L \left(\frac{1}{h_1}.\frac{1}{h^2(x)} - \frac{1}{h^3(x)}\right)dx$ =0. Or la fonction que l'on intègre est à valeurs dans $R^-$, elle est continue, comme l'intégrale est nulle, la fonction est nulle. Donc sur le segment [0,L], $h(x)=h_1$. h étant L-périodique, <u>h est constante sur R</u>.

## 3a)

$u(x,y) = \frac{y^2}{2}p'(x) + y\left(\frac{V}{h(x)} + \frac{h(x)}{2}p'(x)\right) + V$. De plus, $h^3(x)p'(x) = 6V(h(x) - h^*)$.

On déduit $u(x,y) = V\left[\left(\frac{3y^2}{h^2(x)} + \frac{3y}{h(x)}\right) - \left(\frac{3y^2h^*}{h^3(x)} + \frac{3yh^*}{h^2(x)}\right) + \left(1 + \frac{y}{h(x)}\right)\right]$.

Donc $u(x,y) = V\left[\frac{3y}{h(x)}\left(1 + \frac{y}{h(x)}\right)\left(1 - \frac{h^*}{h(x)}\right) + \left(1 + \frac{y}{h(x)}\right)\right]$.

## 3b

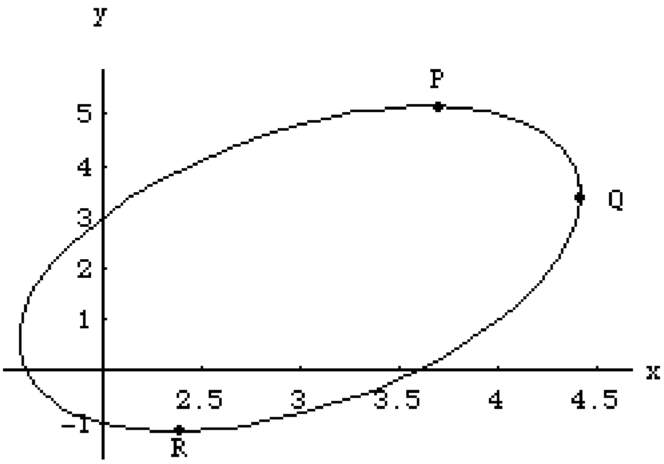
$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x}$, alors $\frac{\partial v}{\partial y} = Vh'(x)\left[\frac{6y^2}{h^3(x)} - \frac{9y^2h^*}{h^4(x)} + \frac{4y}{h^2(x)} - \frac{6yh^*}{h^3(x)}\right]$. Par intégration, et compte tenu de v(x,0)=0, on obtient $v(x,y) = Vh'(x)\left(\frac{y}{h(x)} + 1\right)\left(2 - \frac{3h^*}{h(x)}\right).\frac{y^2}{h^2(x)}$.

## 3c

u et v sont en fait de classe $C^{\infty}$ sur $R^2$.

# IV PARTIE D

**1)**




Lorsqu'un point parcourt l'arc de courbe (PQR), entre P et Q : $u(x,y)^{3}0$, entre Q et R : $u(x,y)^{2}0$. Il convient en effet de noter que u(x,y) est l'abscisse du vecteur vitesse en un point régulier de l'arc.

**2)**

La fonction $\lambda : y \to u(x,y) = V\left[\frac{3y}{h(x)}\left(1+\frac{y}{h(x)}\right)\left(1-\frac{h^*}{h(x)}\right)+\left(1+\frac{y}{h(x)}\right)\right]$ change de signe sur l'intervalle [-h[x],0]; c'est une fonction polynômiale de degré 2, elle admet pour racines $y_1=-h(x)$ et $y_2 = -\frac{h(x)}{3}.\frac{1}{1-\frac{h^*}{h(x)}}$.

$\lambda(0)=V>0$ et $\lambda(-h(x))=0$, pour que la fonction $\lambda$ change de signe sur [-h(x),0], il est nécessaire que $y_1<y_2<0$.

$y_2<0 \Leftrightarrow h(x)>h^*$.

$y_1<y_2 \Leftrightarrow \frac{1}{1-\frac{h^*}{h(x)}}<3$ donc $1-\frac{h^*}{h(x)}>\frac{1}{3}$.

Finalement, $h^*<\frac{2}{3}h(x)\leq\frac{2}{3}h_1$. En particulier $\frac{h^*}{h_1}<\frac{2}{3}$.

# PARTIE E : CAS PARTICULIER

**1)**

L'équation $\cos\frac{2\pi x}{l}=-\frac{a}{b}$ ne doit pas avoir de racine réelle; cette hypothèse est vérifiée si et seulement si $-\frac{a}{b}\in]-\infty,-1[$, c'est-à-dire a>b. (noter que a>0, b>0)

## 2)

On sait que $h^* = \dfrac{\displaystyle\int_0^L \frac{dx}{h^2(x)}}{\displaystyle\int_0^L \frac{dx}{h^3(x)}}$. Le calcul des intégrales est élémentaire.

$\dfrac{1}{h^2(x)} = a^2 + 2ab\cos\dfrac{2\pi x}{L} + b^2\cos^2\dfrac{2\pi x}{L}$ et $\displaystyle\int_0^L \frac{dx}{h^2(x)} = \frac{L}{2}\left(2a^2 + b^2\right)$.

$\dfrac{1}{h^3(x)} = a^3 + 3a^2 b\cos\dfrac{2\pi x}{L} + +3ab^2\cos^2\dfrac{2\pi x}{L} + b^3\cos^3\dfrac{2\pi x}{L}$ et $\displaystyle\int_0^L \frac{dx}{h^3(x)} = \frac{aL}{2}\left(2a^2 + 3b^2\right)$.

Donc $h^* = \dfrac{\left(2a^2 + b^2\right)}{a\left(2a^2 + 3b^2\right)}$.

## 3a

$\begin{cases} a + b = \dfrac{1}{h_0} \\ a - b = \dfrac{1}{h_1} \end{cases}$ d'où $\begin{cases} a = \dfrac{h_0 + h_1}{2h_0 h_1} \\ b = \dfrac{h_1 - h_0}{2h_0 h_1} \end{cases}$

$2a^2 + b^2 = \dfrac{3h_0^2 + 2h_0 h_1 + 3h_1^2}{4h_0^2 h_1^2} = \dfrac{3 + 2\dfrac{h_1}{h_0} + 3\left(\dfrac{h_1}{h_0}\right)^2}{4h_1^2} = \dfrac{3 + 2\alpha + 3\alpha^2}{4h_1^2}$.

De même, $2a^2 + 3b^2 = \dfrac{5 - 2\alpha + 5\alpha^2}{4h_1^2}$.

Ainsi, $h^* = \dfrac{3 + 2\alpha + 3\alpha^2}{5 - 2\alpha + 5\alpha^2} \cdot \dfrac{2h_0 h_1}{h_0 + h_1}$.

Par conséquent, $\dfrac{h^*}{h_1} = \dfrac{3 + 2\alpha + 3\alpha^2}{5 - 2\alpha + 5\alpha^2} \cdot \dfrac{2}{1 + \alpha}$ =r(α).

On sait que $\alpha = \dfrac{h_1}{h_0} > 1$. L'idée d'étudier la limite du rapport précédent lorsque $\alpha \to 0$ est étrange. Par contre, la limite de ce rapport lorsque $\alpha \to 1$ est égale à 1. La limite en +_ est nulle.

## 3b

Pour qu'il existe des trajectoires fermées, il est nécessaire que l'on choisisse α tel que $\dfrac{h^*}{h_1} < \dfrac{2}{3}$. Or $r(2) = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{19}{21} < \dfrac{2}{3}$ ; De tels choix sont possibles : il peut donc exister des trajectoires fermées. Enfin, celà n'est pas demandé, mais il est clair que pour α>2 : $\dfrac{2}{1+\alpha} < \dfrac{2}{3}$ et $\dfrac{3 + 2\alpha + 3\alpha^2}{5 - 2\alpha + 5\alpha^2} < 1$ (inégalité équivalente à $(\alpha-1)^2>0$), donc $r(\alpha) < \dfrac{2}{3}$.

*Il serait intéressant de savoir si l'on peut choisir une de ces valeurs pour obtenir une trajectoire fermée. L'étude est faite avec Mathématica.: la réponse est positive.*