Ecole Polytechnique, option PC

Deuxième épreuve, 1999. Corrigé

Première partie.

1. Si $P(x) = \sum_{p=0}^{n} a_p x^p$, il vient :

$$L(P) = \int_{-1}^{1} P(x)dx = \sum_{p=0}^{n} a_p \int_{-1}^{1} x^p dx = 2 \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{a_{2p}}{2p+1}$$

L'application L étant une forme linéaire non nulle, son noyau est un hyperplan de dimension n ($\dim(E) = n+1$), qui contient tous les polynômes impairs, ainsi que les polynômes pairs vérifiant $\sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{a_{2p}}{2p+1}$. Par exemple :
- si $n = 2k$: $(x, x^3, \ldots, x^{2k-1}, 1-3x^2, 1-5x^4, \ldots, 1-(2k+1)x^{2k})$.
- si $n = 2k+1$: $(x, x^3, \ldots, x^{2k+1}, 1-3x^2, 1-5x^4, \ldots, 1-(2k+1)x^{2k})$.

2. a) Il s'agit du i-ième polynôme de Lagrange :

$$P_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad (\forall\ 0 \leq i \leq n)$$

b) On sait que la famille $(P_0, \ldots, P_n)$ forme une base de E. Pour tout $P \in E$, on a :

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} P(x_i) P_i(x)$$

et

$$L(P) = \sum_{i=0}^{n} P(x_i) \int_{-1}^{1} P_i(x)dx = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P(x_i)$$

Ainsi $\lambda_i = \int_{-1}^{1} P_i(x), \quad (0 \leq i \leq n)$.

3. On suppose que pour tout $i, 0 \leq i \leq n, x_{n-i} = -x_i$.
- si $n = 2k+1$, les points sont $(x_0, \ldots, x_k, -x_k, \ldots, -x_0)$.

$$P_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{k} \frac{(x-x_j)(x+x_j)}{(x_i - x_j)(x_i + x_j)} \times \frac{x + x_i}{2x_i}$$

$$P_{n-i}(x) = \prod_{j=0, j\neq n-i}^{k} \frac{(x-x_j)(x+x_j)}{(x_i - x_j)(x_i + x_j)} \times \frac{x - x_i}{2x_{n-i}}$$

Ainsi :

$$P_i(x) = \frac{N(x)(x+x_i)}{D}, \quad P_{n-i}(x) = \frac{N(x)(x-x_i)}{-D}$$

avec $N(x) = \prod_{j=0,j\neq i}^{k}(x^2 - x_i^2)$. Donc, comme N est pair :

$$\lambda_i = \frac{1}{D}\int_{-1}^{1} xN(x)dx + \frac{x_i}{D}\int_{-1}^{1} N(x)dx = \frac{x_i}{D}\int_{-1}^{1} N(x)dx$$

et

$$\lambda_{n-i} = -\frac{1}{D}\int_{-1}^{1} xN(x)dx + \frac{x_i}{D}\int_{-1}^{1} N(x)dx = \frac{x_i}{D}\int_{-1}^{1} N(x)dx$$

- si $n = 2k$, les points sont $(x_0, \ldots, x_{k-1}, 0, -x_{k-1}, \ldots, -x_0)$.

En dehors du cas 0 :

$$P_i(x) = \frac{N(x)(x + x_i)}{D}, \quad P_{n-i}(x) = \frac{N(x)(x - x_i)}{D}$$

avec $N(x) = x\prod_{j=0,j\neq i}^{k}(x^2 - x_i^2)$. Donc, comme N est impair :

$$\lambda_i = \frac{1}{D}\int_{-1}^{1} xN(x)dx + \frac{x_i}{D}\int_{-1}^{1} N(x)dx = \frac{1}{D}\int_{-1}^{1} xN(x)dx$$

et

$$\lambda_{n-i} = -\frac{1}{D}\int_{-1}^{1} xN(x)dx + \frac{x_i}{D}\int_{-1}^{1} N(x)dx = \frac{1}{D}\int_{-1}^{1} xN(x)dx$$

Le cas 0 est simple, puisqu'alors $P_{n/2} = P_{n-n/2}$.

L'égalité demandée est vérifiée dans le cas général pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à n. Par linéarité de l'intégrale, il reste à le montrer pour $P = x^{n+1}$. Mais, comme n est pair :

$$0 = \int_{-1}^{1} x^{n+1}dx = \sum_{i=0}^{n/2}\lambda_i(x_i^{n+1} + (-x_i)^{n+1})$$

Remarque : une autre solution (peut être plus courte) consiste à remplacer k par $n-k$ et x par $-x$ au lieu de considérer deux cas.

4. a) Soit P_f le polynôme interpolateur de Lagrange de f aux points $(x_i)_{0\leq i\leq n}$. On a alors :

$$P_f(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)P_i(x) \Rightarrow \int_{-1}^{1} P_f(x)dx = \sum_{i=0}^{n}\lambda_i f(x_i)$$

Ecrivons une formule de Taylor Lagrange à l'ordre n pour f. Il existe R_n tel que, pour tout $x \in [-1, 1]$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + R_n(x)x^{n+1} = P(x) + R_n(x)x^{n+1}$$

avec $\sup_{x\in[-1,1]} |R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}$

Donc, comme $P - P_f$ est un polynôme de degré n :

$$\begin{aligned}
\left|\int_{-1}^{1} f(x)dx - \sum_{i=0}^{n}\lambda_i f(x_i)\right| &\leq \left|\int_{-1}^{1}(P(x) - P_f(x))dx\right| + \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\frac{2}{n+2} \\
&\leq \left|\sum_{i=0}^{n}\lambda_i(P(x_i) - P_f(x_i))\right| + \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\frac{2}{n+2} \\
&\leq \left|\sum_{i=0}^{n}\lambda_i(f(x_i) - R_n(x)x_i^{n+1} - f(x_i))\right| + \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\frac{2}{n+2} \\
&\leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\left(\sum_{i=0}^{n}|\lambda_i| + \frac{2}{n+2}\right)
\end{aligned}$$

b) Recommençons la même argumentation avec $f \in C^{n+2}$. Il existe $R_{n+1}(x)$ tel que, pour tout $x \in [-1,1]$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_{n+1}(x)x^{n+2} = P(x) + a_{n+1}x^{n+1} + R_{n+1}(x)x^{n+2}$$

Donc, par la question 3. :

$$\begin{aligned}\left|\int_{-1}^{1} f(x)dx - \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f(x_i)\right| &\leq \left|\int_{-1}^{1} (P(x) + a_{n+1}x^{n+1} - P_f(x))dx\right| + \frac{M_{n+2}}{(n+2)!}\frac{2}{n+3} \\ &\leq \left|\sum_{i=0}^{n} \lambda_i (P(x_i) - P_f(x_i))\right| + \frac{M_{n+2}}{(n+2)!}\frac{2}{n+3} \\ &\leq \left|\sum_{i=0}^{n} \lambda_i (f(x_i) - R_{n+1}(x)x_i^{n+2} - f(x_i))\right| + \frac{M_{n+2}}{(n+2)!}\frac{2}{n+3} \\ &\leq \frac{M_{n+2}}{(n+2)!}\left(\sum_{i=0}^{n} |\lambda_i| + \frac{2}{n+3}\right)\end{aligned}$$

5. a) Puisque les calculatrices sont autorisées, voici un programme, écrit pour la TI-89/92, qui calcule les polynômes de Lagrange :

```
lagr(x,w)        (x : liste des points, w : variable)
Func
Local i,j,p,r
{} →r
For j,1,dim(x)
1→p
For i,1,dim(x)
If i≠j Then
(w-x[i])/(x[j]-x[i])*p→p
EndIf
EndFor
augment({p},r)→r
EndFor
r
EndFunc
```

et `∫(lagr({1,-1/2,0,1/2,1},x),x,-1,1)` donne : $(7/45, 32/45, 4/15, 32/45, 7/45)$.

b) Il vient :

$$\left|\int_{-1}^{1} e^{(x/4)^2} - \sum_{i=0}^{4} \lambda_i e^{(x_i/4)^2}\right| \leq \frac{M_6}{6!}\left(\sum_{i=0}^{4} |\lambda_i| + \frac{2}{7}\right) = \frac{16M_6}{7 \times 720}$$

Une étude rapide de la fonction $x \mapsto e^{(x/4)^2}$ donne $M_6 = \frac{10681e^{1/16}}{262144} \approx 0.043$, soit une majoration de l'ordre de $2\ 10^{-4}$. Ainsi, $\sum_{i=0}^{4} \lambda_i e^{(x_i/4)^2} \approx 2.04246168756$ n'est pas une trop mauvaise approximation de $\displaystyle\int_{-1}^{1} e^{(x/4)^2}dx \approx 2.0424596851536$ donné par la calculatrice.

Deuxième partie

6. a) L'application $P \to |L(P)|$ est continue. La boule unité fermée B d'un evn de dimension finie étant compacte, $\sup_{P \in B} |L(P)|$ existe et est atteint.

Supposons que le sup soit atteint en Q tel que $N(Q) < 1$. Posons $Q_1 = \frac{Q}{N(Q)}$. Alors $N(Q_1) = 1$ et :

$$|L(Q_1)| = \frac{|L(Q)|}{N(Q)} = \frac{\mathcal{N}(L)}{N(Q)} > \mathcal{N}(L)$$

Contradiction.
b) Pour tout $P \in E$: $\dfrac{|L(P)|}{N(P)} \leq K$. Par définition du sup, $\mathcal{N}(L) \leq K$. S'il existe Q tel que $N(Q) = 1$ et $|L(Q)| = K$, alors le sup est atteint.

7. Si $P(x) = \sum_{p=0}^{n} a_p x^p$, alors :

$$N_\infty(P) \leq N_2(P)) \leq \sqrt{n+1} N_\infty(P)$$

On ne peut obtenir mieux. Pour $P(x) = x^p$, on a égalité dans la première inégalité, et pour $P(x) = \sum_{p=0}^{n} x^p$, on a égalité dans la seconde inégalité.

8. a) Posons $Q(x) = \sum_{p=0}^{n} a_p x^p$. Alors :

$$|L(Q)| = \left| 2 \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{a_{2p}}{2p+1} \right| \leq \left(2 \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{2p+1} \right) N_\infty(Q)$$

Ainsi $\mathcal{N}_\infty(L) \leq 2 \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \dfrac{1}{2p+1}$. On a égalité avec $Q(x) = \sum_{p=0}^{n} x^p$.
b) De même, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|L(Q)| = \left| 2 \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{a_{2p}}{2p+1} \right| \leq 2 \left(\sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left(\frac{1}{2p+1} \right)^2 \right)^{1/2} N_2(Q)$$

Ainsi $\mathcal{N}_2(L) \leq 2 \left(\sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left(\dfrac{1}{2p+1} \right)^2 \right)^{1/2}$. On a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz si et seulement si $a_{2p} = \dfrac{\lambda}{2p+1}$. Il reste à choisir λ de façon à ce que $\sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \dfrac{|\lambda|^2}{(2p+1)^2} = 1$ et le polynôme $Q(x) = \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} a_{2p} x^{2p}$.

Troisième partie

9. a) Il suffit de prendre $P_k(x) = \sum_{p=0}^{k} x^p$. On a $N_\infty(P_k) = 1$ et $|L(P_k)| = \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \dfrac{2}{2p+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.
b) L'application L n'est pas continue puisqu'on a trouvé une suite de polynômes (P_k) sur la sphère unité tels que $\lim_{k\to+\infty} L(P_k) = \infty$.

10. a) En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, si $P(x) = \sum_{p=0}^{n} a_p x^p$:

$$\begin{aligned} |L(P)| &= 2 \left| \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{a_{2p}}{2p+1} \right| \\ &\leq 2 \left(\sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} a_{2p}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left(\frac{1}{2p+1} \right)^2 \right)^{1/2} \\ &\leq N_2(P) \frac{\pi}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

(on utilise $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$). Ainsi $|||L|||$ existe et $|||L||| \leq \dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$.

b) Montrons que $|||L||| = \dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on choisit $P_n(x) = \displaystyle\sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{\lambda_n x^{2p}}{2p+1}$ tel que $N_2(P_n) = 1$. On a alors égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz et :

$$|L(P_n)| = 2 \left(\sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left(\frac{1}{2p+1} \right)^2 \right)^{1/2} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

Supposons qu'il existe $Q(x) = \displaystyle\sum_{p=0}^{q} a_p x^p$ polynôme tel que $N_2(Q) = 1$ et $|L(Q)| = |||L|||$. On a alors :

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{\sqrt{2}} = |L(Q)| &\leq 2 \left(\sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} a_{2p}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left(\frac{1}{2p+1} \right)^2 \right)^{1/2} \\ &\leq N_2(Q) \frac{\pi}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

On a donc égalité dans toutes ces inégalités. Donc $a_{2p} = \dfrac{\lambda}{2p+1}$ et

$$\frac{\pi}{\sqrt{2}} = 2 \left(\sum_{p=0}^{\lfloor q/2 \rfloor} \frac{1}{(2p+1)^2} \right)^{1/2}$$

ce qui est impossible puisque $\dfrac{1}{(2p+1)^2} > 0$.