Concours Centrale Supélec
Math 1 MP 2009

Partie I : Questions préliminaires

I.1) $\Gamma(1)=\Gamma(2)=1$. Comme Γ est continue sur $[1,2]$ et dérivable sur $]1,2[$, d'après le théorème de Rolle, il existe $c\in]1,2[$ tel que $\Gamma'(c)=0$.

I.2) Pour $x>0$, $\Gamma''(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}(\ln t)^2\mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\ \mathrm{d}t$ est l'intégrale d'une fonction continue, positive, non identiquement nulle, donc $\Gamma''(x)>0$. Donc Γ' est strictement croissante sur $]0,+\infty[$. On en déduit que Γ' est strictement positive sur $]c,+\infty[$ et Γ strictement croissante sur cet intervalle ; *a fortiori* sur $[2,+\infty[$.

I.3) Comme $(\Gamma(n))_{n\geq 1}$ tend vers $+\infty$ et que Γ est croissante au voisinage de $+\infty$, Γ tend vers $+\infty$ en $+\infty$. On peut donc limiter l'étude à $\gamma>1$.

Pour $x\geq 2$, on note n sa partie entière.

On a alors : $0\leq\dfrac{\gamma^x}{\Gamma(x)}\leq\dfrac{\gamma^{n+1}}{\Gamma(n)}=\gamma^2\dfrac{\gamma^{n-1}}{(n-1)!}$. Comme la partie entière tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et que la suite $\left(\dfrac{\gamma^{n-1}}{(n-1)!}\right)_{n\geq 1}$ converge vers 0, $\dfrac{\gamma^x}{\Gamma(x)}\xrightarrow[x\longrightarrow+\infty]{}0$, *i.e.* $\gamma^x=o(\Gamma(x))$ au voisinage de $+\infty$.

Partie II : Comportement asymptotique de la somme d'une série entière au voisinage de la borne supérieure de son intervalle de convergence

II.A.1) On suppose que ϕ n'est pas positive sur $[t_0,+\infty[$. Soit alors $t_1\geq t_0$ tel que $\phi(t_1)<0$; par décroissance de ϕ, sur $[t_1,+\infty[$, $\phi(t)\leq\phi(t_1)\leq 0$. Or la fonction constante $\phi(t_1)$ n'est pas intégrable sur l'intervalle non borné $[t_1,+\infty[$; donc ϕ n'est pas intégrable sur cet intervalle. Absurde.

Donc ϕ est positive sur $[t_0,+\infty[$.

Remarque : ϕ étant décroissante sur $[t_0,+\infty[$, elle admet une limite en $+\infty$; comme ϕ est intégrable, cette limite est nulle ; par décroissance, ϕ est positive sur $[t_0,+\infty[$.

II.A.2.a) Pour $n\geq(t_0/h)+1$: $\forall t\in[(n-1)h,nh]\subset[t_0,+\infty[$, $\phi(t)\geq\phi(nh)$.

Donc $\displaystyle\int_{(n-1)h}^{nh}\phi(t)\ \mathrm{d}t\geq\int_{(n-1)h}^{nh}\phi(nh)\ \mathrm{d}t=h\phi(nh)\geq 0$.

II.A.2.b) Comme ϕ est intégrable sur $[0,+\infty[$, la série $\displaystyle\sum\int_{(n-1)h}^{nh}\phi(t)\ \mathrm{d}t$ converge ; on déduit de (II.A.2.a) la convergence de la série $\sum h\phi(nh)$.

II.A.3) Pour $n\geq(t_0/h)+1$, pour la même raison qu'au (II.A.2.a) : $h\phi(nh)\leq\displaystyle\int_{(n-1)h}^{nh}\phi(t)\ \mathrm{d}t\leq h\phi((n-1)h)$.

On note n_0 la partie entière de $(t_0/h)+2$.

On a alors : $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty}h\phi(nh)\leq\sum_{n=n_0}^{+\infty}\int_{(n-1)h}^{nh}\phi(t)\ \mathrm{d}t=\int_{(n_0-1)h}^{+\infty}\phi(t)\ \mathrm{d}t\leq\sum_{n=n_0}^{+\infty}h\phi((n-1)h)=\sum_{n=n_0-1}^{+\infty}h\phi(nh)$, donc $0\leq\displaystyle\sum_{n=n_0-1}^{+\infty}h\phi(nh)-\int_{(n_0-1)h}^{+\infty}\phi(t)\ \mathrm{d}t\leq h\phi((n_0-1)h)$.

De plus, $\displaystyle\left|\int_0^{(n_0-1)h}\phi(t)\ \mathrm{d}t-\sum_{n=0}^{n_0-2}h\phi(nh)\right|=\left|\sum_{n=0}^{n_0-2}\int_{nh}^{(n+1)h}(\phi(t)-\phi(nh))\ \mathrm{d}t\right|\leq\sum_{n=0}^{n_0-2}\int_{nh}^{(n+1)h}|\phi(t)-\phi(nh)|\ \mathrm{d}t$

Comme $\forall t\in[nh,(n+1)h]$, $|t-nh|\leq h$:

$$\left|\int_0^{(n_0-1)h}\phi(t)\ \mathrm{d}t-\sum_{n=0}^{n_0-2}h\phi(nh)\right|\leq(n_0-1)h.\sup\{|\phi(t)-\phi(u)|\,,t,u\in[0,(n_0-1)h],|t-u|\leq h\}$$

Or $(n_0-1)h\leq t_0+h$. On se limite à $h\in]0,1]$; ainsi $(n_0-1)h\leq t_0+1$. Comme ϕ est continue sur le segment $[0,t_0+1]$, elle y est uniformément continue.

Soit $\varepsilon>0$; on peut trouver $h_0\in]0,1]$ tel que $\forall t,u\in[0,t_0+1],|t-u|\leq h_0\Longrightarrow|\phi(t)-\phi(u)|\leq\varepsilon$.

Alors, pour $h \in]0, h_0]$, on a : $\left| \displaystyle\int_0^{(n_0-1)h} \phi(t)\ \mathrm{d}t - \sum_{n=0}^{n_0-2} h\phi(nh) \right| \leq (t_0+1)\varepsilon$.

Comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} \phi(t)\ \mathrm{d}t - \sum_{n=0}^{+\infty} h\phi(nh) = \left(\int_0^{(n_0-1)h} \phi(t)\ \mathrm{d}t - \sum_{n=0}^{n_0-2} h\phi(nh) \right) + \left(\int_{n_0-1}^{+\infty} \phi(t)\ \mathrm{d}t - \sum_{n=n_0}^{+\infty} h\phi(nh) \right)$, on en déduit :

$$\left| \int_0^{+\infty} \phi(t)\ \mathrm{d}t - \sum_{n=0}^{+\infty} h\phi(nh) \right| \leq (t_0+1)\varepsilon + h\phi((n_0-1)h).$$

Comme ϕ est continue sur le segment $[0, t_0+1]$, elle y est bornée.
Or $(n_0-1)h \in [0, t_0+1]$; donc $h\phi((n_0-1)h) \xrightarrow[h \longrightarrow 0^+]{} 0$.
On peut donc trouver $h_1 > 0$ tel que $\forall h \in]0, h_1]$, $|h\phi((n_0-1)h)| \leq \varepsilon$.
Finalement, pour tout $h \in]0, \min(h_0, h_1)]$, on a :

$$\left| \int_0^{+\infty} \phi(t)\ \mathrm{d}t - \sum_{n=0}^{+\infty} h\phi(nh) \right| \leq ((t_0+2)\varepsilon.$$

Comme t_0 est une donnée, on peut conclure : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \phi(t)\ \mathrm{d}t - \sum_{n=0}^{+\infty} h\phi(nh) \xrightarrow[h \longrightarrow 0, h>0]{} 0$.

II.B.1) Pour $\alpha < 1$, la fonction g_α ne peut être prolongée en une fonction continue sur $[0, +\infty[$.

Pour la suite, on suppose $\alpha \geq 1$. Alors g_α est continue sur $[0, +\infty[$ (après prolongement naturel en 0) et intégrable sur $[0, +\infty[$ (d'intégrale $\Gamma(\alpha)$). Elle est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $g'_\alpha(t) = \mathrm{e}^{-t} t^{\alpha-2}(-t+\alpha-1)$. Donc g'_α est négative sur $[\alpha-1, +\infty[$ et g_α est décroissante sur cet intervalle. Les hypothèses du (II.A) sont donc satisfaites par g_α, $\alpha \geq 1$.

Pour $x \in]0, 1[$, $h = -\ln x > 0$ et $h \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} g_\alpha(nh) = (-\ln x) \sum_{n=0}^{+\infty} g_\alpha(-n \ln x))$; comme $h \xrightarrow[x \longrightarrow 1, x<1]{} 0$ avec $h > 0$, d'après (II.A), $(-\ln x) \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} g_\alpha(-n \ln x)) \xrightarrow[x \longrightarrow 1, x<1]{} \int_0^{+\infty} g_\alpha = \Gamma(\alpha)$.

II.B.2.a) On étudie la convergence absolue de la série $\sum n^{\alpha-1} x^n$ pour $x \neq 0$:

$\dfrac{\left|(n+1)^{\alpha-1} x^{n+1}\right|}{|n^{\alpha-1} x^n|} = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{\alpha-1} |x| \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} |x|$; d'après la règle de d'Alembert, comme $\left|n^{\alpha-1} x^n\right| > 0$ pour tout $n \geq 1$, si $|x| < 1$, la série $\sum \left|n^{\alpha-1} x^n\right|$ converge, si $|x| > 1$, elle diverge.

Donc le rayon de convergence de la série entière $\sum n^{\alpha-1} x^n$ vaut 1.

II.B.2.b) Pour $x \in]0, 1[$, $g_\alpha(-n \ln x) = (-\ln x)^{\alpha-1} n^{\alpha-1} x^n = (-\ln x)^{\alpha-1} S_\alpha(x)$.

Pour $\alpha \geq 1$:

$-\ln x\, g_\alpha(-n \ln x) = (-\ln x)^\alpha S_\alpha(x) \xrightarrow[x \longrightarrow 1, x<1]{} \Gamma(\alpha) \neq 0$; donc $S_\alpha(x) \sim \dfrac{\Gamma(\alpha)}{(-\ln x)^\alpha}$ au voisinage de 1^-. Comme $\ln x \sim x - 1$ au voisinage de 1 : $S_\alpha(x) \sim \dfrac{\Gamma(\alpha)}{(1-x)^\alpha}$ au voisinage de 1^-.

Partie III : La première fonction eulérienne

III.A) La fonction $t \longmapsto t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}$ est continue sur $]0, 1[$. Équivalente en 0^+ à $t^{\alpha-1}$, elle est intégrable sur $]0, 1/2]$ si et seulement si $\alpha - 1 > -1$, *i.e.* $\alpha > 0$. Équivalente en 1^- à $(1-t)^{\beta-1}$, elle est intégrable sur $[1/2, 1[$ si et seulement si $\beta - 1 > -1$, *i.e.* $\beta > 0$. Elle est donc intégrable sur $]0, 1[$ si et seulement si α et β sont strictement positifs.

III.A.2.i) Égalité obtenue avec le changement de variable affine $t \longmapsto u = 1 - t$, qui est un difféomorphisme de $]0, 1[$ sur lui-même.

III.A.2.ii) $u = \dfrac{t}{1-t} \Longleftrightarrow t = \dfrac{u}{u+1}$; $u \longmapsto t = \dfrac{u}{1+u}$ est un difféomorphisme de $]0, 1[$ sur $]0, +\infty[$; $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = \dfrac{1}{(1+u)^2}$;

$t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} = \left(\dfrac{t}{1-t}\right)^{\alpha-1} (1-t)^{\alpha+\beta-2} = u^{\alpha-1} \dfrac{1}{(1+u)^{\alpha+\beta-2}}$.

Donc $B(\alpha, \beta) = \displaystyle\int_0^{+\infty} u^{\alpha-1} \frac{1}{(1+u)^{\alpha+\beta-2}} \frac{1}{(1+u)^2}\ \mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{(1+u)^{\alpha+\beta}}\ \mathrm{d}u$.

III.A.2.iii) Soit $\varepsilon\in]0,1/2]$; par parties, $\displaystyle\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} t^\alpha(1-t)^{\beta-1}\,\mathrm{d}t=\left[t^\alpha\frac{-(1-t)^\beta}{\beta}\right]_\varepsilon^{1-\varepsilon}+\frac{\alpha}{\beta}\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} t^{\alpha-1}(1-t)^\beta\,\mathrm{d}t$.

Comme α et β sont strictement positifs, $t^\alpha\dfrac{-(1-t)^\beta}{\beta}$ tend vers 0 quand t tend vers 0 ou 1 ;

donc $\left[t^\alpha\dfrac{-(1-t)^\beta}{\beta}\right]_\varepsilon^{1-\varepsilon}\xrightarrow[\varepsilon\longrightarrow 0]{}0$.

De plus, $t^{\alpha-1}(1-t)^\beta=t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}(1-t)=t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}-t^\alpha(1-t)^{\beta-1}$;

donc $\displaystyle\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} t^{\alpha-1}(1-t)^\beta\,\mathrm{d}t\xrightarrow[\varepsilon\longrightarrow 0]{}B(\alpha,\beta)-B(\alpha+1,\beta)$.

On en déduit : $B(\alpha+1,\beta)=\dfrac{\alpha}{\beta}(B(\alpha,\beta)-B(\alpha+1,\beta))$; puis : $B(\alpha+1,\beta)=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}B(\alpha,\beta)$.

III.B.1) On suppose que $\forall\alpha,\beta>2,\ B(\alpha,\beta)=\dfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$.

Soit $\alpha,\beta>0$;

$$\begin{aligned}B(\alpha,\beta)&=\frac{\alpha+\beta}{\alpha}B(\alpha+1,\beta)=\frac{\alpha+\beta}{\alpha}\frac{\alpha+1+\beta}{\alpha+1}B(\alpha+2,\beta)=\frac{\alpha+\beta}{\alpha}\frac{\alpha+1+\beta}{\alpha+1}B(\beta,\alpha+2)\\&=\frac{\alpha+\beta}{\alpha}\frac{\alpha+1+\beta}{\alpha+1}\frac{\alpha+\beta+2}{\beta}B(\beta+1,\alpha+2)=\frac{\alpha+\beta}{\alpha}\frac{\alpha+1+\beta}{\alpha+1}\frac{\alpha+\beta+2}{\beta}\frac{\alpha+\beta+3}{\beta+1}B(\beta+2,\alpha+2).\end{aligned}$$

Comme $\alpha+2$ et $\beta+2$ sont strictement supérieurs à 2 :

$B(\beta+2,\alpha+2)=\dfrac{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\beta+2)}{\Gamma(\alpha+\beta+4)}=\dfrac{(\alpha+1)\alpha\Gamma(\alpha)(\beta+1)\beta\Gamma(\beta)}{(\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta)}$.

Après substitution et simplification : $B(\alpha,\beta)=\dfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$.

III.B.2.a) Comme $\alpha-1$ et $\beta-1$ sont strictement plus grands que 1, $\psi_{\alpha,\beta}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0,1]$, donc sa dérivée est bornée. Donc $\psi_{\alpha,\beta}$ est lipschitzienne.

III.B.2.b) Soit $n\in\mathbb{N}^*$; $B(\alpha,\beta)-u_n(\alpha,\beta)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n}\left(\psi_{\alpha,\beta}(t)-\psi_{\alpha,\beta}(\frac{k}{n})\right)\,\mathrm{d}t$.

Comme, sur $[k/n,(k+1)/n]$, $\left|\psi_{\alpha,\beta}(t)-\psi_{\alpha,\beta}(\frac{k}{n})\right|\le A_{\alpha,\beta}\left|t-\frac{k}{n}\right|=A_{\alpha,\beta}(t-\frac{k}{n})$, on a :

$$\left|\int_{k/n}^{(k+1)/n}\left(\psi_{\alpha,\beta}(t)-\psi_{\alpha,\beta}(\frac{k}{n})\right)\,\mathrm{d}t\right|\le\int_{k/n}^{(k+1)/n}A_{\alpha,\beta}(t-\frac{k}{n})\,\mathrm{d}t=A_{\alpha,\beta}.\frac{1}{2n^2}.$$

On en déduit : $|B(\alpha,\beta)-u_n(\alpha,\beta)|\le\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{k/n}^{(k+1)/n}\left(\psi_{\alpha,\beta}(t)-\psi_{\alpha,\beta}(\frac{k}{n})\right)\,\mathrm{d}t\right|\le n.\frac{A_{\alpha,\beta}}{2n^2}=\frac{A_{\alpha,\beta}}{2n}$.

III.B.2.c) Pour $x\in[0,1[$, les séries $\sum n^{\alpha-1}x^n$ et $\sum n^{\beta-1}x^n$ convergent absolument (séries entières de rayon de convergence 1), donc la série produit converge absolument et sa somme est le produit des sommes, soit $S_\alpha(x)S_\beta(x)$. Le terme d'ordre n de la série produit vaut : $\displaystyle\sum_{k=0}^n k^{\alpha-1}(n-k)^{\beta-1}x^n=n^{\alpha+\beta-2}\sum_{k=0}^n\left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)^{\beta-1}x^n=n^{\alpha+\beta-1}u_n(\alpha,\beta)x^n$.

On en déduit que : $S_\alpha(x)S_\beta(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}n^{\alpha+\beta-1}u_n(\alpha,\beta)x^n$.

Par différence : $S_\alpha(x)S_\beta(x)-B(\alpha,\beta)S_{\alpha+\beta}(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}n^{\alpha+\beta-1}\left(u_n(\alpha,\beta)-B(\alpha,\beta)\right)x^n$.

Avec la majoration du (2.b), on obtient :

$$|S_\alpha(x)S_\beta(x)-B(\alpha,\beta)S_{\alpha+\beta}(x)|\le\sum_{n=0}^{+\infty}n^{\alpha+\beta-1}\left|u_n(\alpha,\beta)-B(\alpha,\beta)\right|x^n\le\frac{A_{\alpha,\beta}}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}n^{\alpha+\beta-2}x^n=\frac{A_{\alpha,\beta}}{2}S_{\alpha+\beta-1}(x).$$

En multipliant par $(1-x)^{\alpha+\beta}$:

$\left|(1-x)^\alpha S_\alpha(x).(1-x)^\beta S_\beta(x)-B(\alpha,\beta).(1-x)^{\alpha+\beta}S_{\alpha+\beta}(x)\right|\le\dfrac{A_{\alpha,\beta}}{2}(1-x).(1-x)^{\alpha+\beta-1}S_{\alpha+\beta-1}(x)$.

Comme α, β, $\alpha+\beta$ et $\alpha+\beta-1$ sont tous supérieurs à 1, on peut utiliser la question (II.B.2) :

$(1-x)^\alpha S_\alpha(x).(1-x)^\beta S_\beta(x)-B(\alpha,\beta).(1-x)^{\alpha+\beta}S_{\alpha+\beta}(x)\xrightarrow[x\longrightarrow 1,x<1]{}\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)-B(\alpha,\beta)\Gamma(\alpha+\beta)$

et $\dfrac{A_{\alpha,\beta}}{2}(1-x).(1-x)^{\alpha+\beta-1}S_{\alpha+\beta-1}(x) \xrightarrow[x\longrightarrow 1, x<1]{} 0$;
donc $|\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) - B(\alpha,\beta)\Gamma(\alpha+\beta)| \leq 0$, *i.e.* $\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) - B(\alpha,\beta)\Gamma(\alpha,\beta) = 0$.

III.C.1) Pour $\alpha \in]0,1[$, $1-\alpha \in]0,1[$, donc $B(\alpha, 1-\alpha)$ existe bien.

$B(\alpha, 1-\alpha) = \displaystyle\int_0^1 f(\alpha,t)\ \mathrm{d}t$ avec $f : (\alpha, t) \longmapsto t^{\alpha}(1-t)^{-\alpha}$.

- Pour tout $\alpha \in]0,1[$, $t \longmapsto f(\alpha,t)$ est continue (par morceaux) sur $]0,1[$.
- Pour tout $t \in]0,1[$, $\alpha \longmapsto f(\alpha,t)$ est continue sur $]0,1[$.
- Domination de f sur le segment $[a,b] \subset]0,1[$: comme une exponentielle de base inférieure à 1 est décroissante sur $\mathbb{R}$, $\forall t \in]0,1[$, $\forall \alpha \in [a,b]$, $0 \leq f(\alpha,t) \leq t^{a-1}(1-t)^{-b}$ et $t \longmapsto t^{a-1}(1-t)^{-b}$ est indépendante de α et intégrable sur $]0,1[$ (comme au (III.A.1)).

D'après le théorème de continuité sous l'intégrale, $\alpha \longmapsto B(\alpha, 1-\alpha)$ est continue sur $]0,1[$.

III.C.2.a) D'abord, $(2p+1)/(2q) \in]0,1[$.

D'après le (III.A.2.ii), $B\left(\dfrac{2p+1}{2q}, 1-\dfrac{2p+1}{2q}\right) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{(2(p-q)+1)/2q)}}{1+t}\ \mathrm{d}t$.

Le changement de variable $u \longmapsto t = u^{2q}$, difféomorphisme de $]0,+\infty[$ sur lui-même, permet d'obtenir :

$B\left(\dfrac{2p+1}{2q}, 1-\dfrac{2p+1}{2q}\right) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^{2(p-q)+1}}{1+u^{2q}}.2qu^{2q-1}\ \mathrm{d}u = 2q\int_0^{+\infty}\frac{u^{2p}}{1+u^{2q}}\ \mathrm{d}u$.

III.C.2.b) Les z_k, k compris entre 0 et $q-1$ et leurs opposés sont les $2q$ zéros de $\mathrm{X}^{2q}+1$ (et ils sont simples).

Comme $A = \mathrm{X}^{2p}$ a un degré strictement inférieur à $B = \mathrm{X}^{2q}+1$, la partie entière de $\dfrac{\mathrm{X}^{2p}}{1+\mathrm{X}^{2q}}$ est nulle. Le développement en éléments simples de $\dfrac{\mathrm{X}^{2p}}{1+\mathrm{X}^{2q}}$ s'écrit donc : $\dfrac{\mathrm{X}^{2p}}{1+\mathrm{X}^{2q}} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{a_k}{\mathrm{X}-z_k} + \frac{b_k}{\mathrm{X}+z_k}\right)$, où les a_k et les b_k sont des nombres complexes définis par : $a_k = \dfrac{A(z_k)}{B'(z_k)}$ et $b_k = \dfrac{A(-z_k)}{B'(-z_k)}$.

Or $B' = 2q\mathrm{X}^{2q-1}$ et $z_k^{2q} = -1$; donc $B'(z_k) = -\dfrac{2q}{z_k}$ et $B'(-z_k) = \dfrac{2q}{z_k}$; d'où la formule de l'énoncé.

III.C.2.c) Vérification par simple dérivation ...

Pour tout k compris entre 0 et $q-1$, la fonction :

$$\begin{aligned}\omega_k : t \longmapsto \quad & \left(\frac{1}{2}\ln\left((t-\mathfrak{Re}\ z_k)^2 + (\mathfrak{Im}\ z_k)^2\right) + \mathrm{i}\arctan\left(\frac{t-\mathfrak{Re}\ z_k}{\mathfrak{Im}\ z_k}\right)\right) \\ & \qquad - \left(\frac{1}{2}\ln\left((t+\mathfrak{Re}\ z_k)^2 + (-\mathfrak{Im}\ z_k)^2\right) + \mathrm{i}\arctan\left(\frac{t+\mathfrak{Re}\ z_k}{-\mathfrak{Im}\ z_k}\right)\right) \\ = & \ \tfrac{1}{2}\ln\frac{(t-\mathfrak{Re}\ z_k)^2 + (\mathfrak{Im}\ z_k)^2}{(t+\mathfrak{Re}\ z_k)^2 + (\mathfrak{Im}\ z_k)^2} + \mathrm{i}\left(\arctan\left(\frac{t-\mathfrak{Re}\ z_k}{\mathfrak{Im}\ z_k}\right) + \arctan\left(\frac{t+\mathfrak{Re}\ z_k}{\mathfrak{Im}\ z_k}\right)\right)\end{aligned}$$

est une primitive de $t \longmapsto \dfrac{1}{t-z_k} - \dfrac{1}{t+z_k}$.

Comme $\mathfrak{Im}\ z_k = \sin\pi\dfrac{2k+1}{2q} > 0$, $\omega_k(t) \xrightarrow[t\longrightarrow+\infty]{} \pi\mathrm{i}$; et $\omega_k(0) = 0$.

La fonction $\omega = -\dfrac{1}{2q}\displaystyle\sum_{k=0}^{q-1} z_k^{2p+1}\,\omega_k$ est une primitive de $t \longmapsto \dfrac{t^{2p}}{1+t^{2q}}$.

De plus, $\omega(0) = 0$ et $\omega(t) \xrightarrow[t\longrightarrow+\infty]{} -\dfrac{1}{2q}\displaystyle\sum_{k=0}^{q-1} z_k^{2p+1}\pi\mathrm{i} = -\mathrm{i}\frac{\pi}{2q}\sum_{k=0}^{q-1} z_k^{2p+1}$.

On en déduit que : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^{2p}}{1+t^{2q}}\ \mathrm{d}t = \lim_{+\infty}\omega - \omega(0) = -\mathrm{i}\frac{\pi}{2q}\sum_{k=0}^{q-1} z_k^{2p+1}$.

Or $z_k^{2p+1} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\frac{2p+1}{2q}}.\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\frac{2p+1}{q}}\right)^k$ et $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\frac{2p+1}{q}} \neq 1$;

donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{q-1} z_k^{2p+1} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\frac{2p+1}{2q}}.\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\frac{2p+1}{q}q}-1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\frac{2p+1}{q}}-1} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\frac{2p+1}{2q}}.\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi(2p+1)}-1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\frac{2p+1}{2q}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\frac{2p+1}{2q}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\frac{2p+1}{2q}}\right)} = \frac{-2}{2\mathrm{i}\sin\pi\frac{2p+1}{2q}}$.

Finalement, $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^{2p}}{1+t^{2q}}\ \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2q}\frac{1}{\sin\pi\frac{2p+1}{2q}}$.

III.C.3) Pour tout α de la forme $\alpha = \dfrac{2p+1}{2q}$, avec $0 < p < q$, $p, q \in \mathbb{N}$, on a ainsi :

$B(\alpha, 1-\alpha) = 2q \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{2p}}{1+t^{2q}}\, dt = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}$.

Comme $\alpha \longmapsto B(\alpha, 1-\alpha)$ et $\alpha \longmapsto \dfrac{\pi}{\sin \pi\alpha}$ sont continues sur $]0,1[$ et que l'ensemble des $\dfrac{2p+1}{2q}$, avec $0 < p < q$, $p, q \in \mathbb{N}$, est dense dans $]0,1[$, on peut affirmer : $\forall \alpha \in]0,1[$, $B(\alpha, 1-\alpha) = \dfrac{\pi}{\sin \pi\alpha}$.

De plus, $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = B(\alpha, 1-\alpha)\Gamma(\alpha + (1-\alpha)) = B(\alpha, 1-\alpha)$.

Partie IV : L'opérateur d'Abel

IV.A.1) La fonction $t \longmapsto \dfrac{f(t)}{(x-t)^\alpha}$ est continue sur $[0,x[$ et, pour tout $t \in [0,x[$, on a $\left|\dfrac{f(t)}{(x-t)^\alpha}\right| \leq \dfrac{\|f\|}{(x-t)^\alpha}$; comme $t \longmapsto \dfrac{1}{(x-t)^\alpha}$ est sur $[0,x[$ (de référence, avec $\alpha < 1$), $t \longmapsto \dfrac{f(t)}{(x-t)^\alpha}$ est intégrable sur $[0,x[$, donc sur $]0,x[$.

IV.A.2.a) Pour $x \in]0,1]$, changement de variable affine $u \longmapsto t = ux$ ... La formule reste valable pour $x = 0$ ($1-\alpha > 0$).

IV.A.2.b) Comme $x \longmapsto x^{1-\alpha}$ est continue sur $[0,1]$, il suffit de montrer la continuité de la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{f(xt)}{(1-t)^\alpha}\, dt$.

- Pour tout $x \in [0,1]$, $t \longmapsto \dfrac{f(xt)}{(1-t)^\alpha}$ est continue (par morceaux) sur $[0,1[$;
- pour tout $t \in [0,1[$, $x \longmapsto \dfrac{f(xt)}{(1-t)^\alpha}$ est continue sur $[0,1]$;
- domination sur $[0,1]$: pour tout $t \in [0,1[$ et tout $x \in [0,1]$, on a : $\left|\dfrac{f(xt)}{(1-t)^\alpha}\right| \leq \dfrac{\|f\|}{(1-t)^\alpha}$; la fonction $t \longmapsto \dfrac{\|f\|}{(1-t)^\alpha}$ est continue, intégrable sur $[0,1[$ et indépendante de x.

Donc $x \longmapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{f(xt)}{(1-t)^\alpha}\, dt$ est continue sur $[0,1]$; donc $A_\alpha f$ est continue sur $[0,1]$.

IV.A.2.c) Par linéarité de l'intégrale, A_α est linéaire. D'après (IV.A.2.b), A_α est un endomorphisme de E.

Continuité :

$\forall f \in E$, $\forall x \in [0,1]$, $|A_\alpha f(x)| \leq x^{\alpha-1}.\displaystyle\int_0^1 \frac{|f(xt)|}{(1-t)^\alpha}\, dt \leq 1.\int_0^1 \frac{\|f\|}{(1-t)^\alpha}\, dt = \|f\| \int_0^1 \frac{dt}{(1-t)^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\, \|f\|$.

Donc,$\forall f \in E$, $\|A_\alpha f\| \leq \dfrac{1}{1-\alpha}\, \|f\|$. On en déduit que l'endomorphisme A_α est continu et que $|||A_\alpha||| \leq \dfrac{1}{1-\alpha}$.

De plus, si f est la fonction constante 1, $\|A_\alpha f\| == \dfrac{1}{1-\alpha}\, \|f\|$. Donc $|||A_\alpha||| = \dfrac{1}{1-\alpha}$.

IV.B.1.a) Pour $n = 1$, on reprend la méthode de majoration du (IV.A.2.c) :

pour tout $x \in [0,1]$, $|A_\alpha(x)| \leq x^\beta\, \|f\| \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{(1-t)^\alpha} = x^\beta\, \|f\|\, \frac{1}{\beta} = x^\beta\, \|f\|\, \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+1)}$.

Soit $n \geq 1$; on suppose : $\forall x \in [0,1]$, $|A_\alpha^n f(x)| \leq x^{n\beta} \dfrac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)}\, \|f\|$.

Soit $x \in [0,1]$; $\left|A_\alpha^{n+1} f(x)\right| = x^\beta \left|\displaystyle\int_0^1 \frac{A_\alpha^n f(xt)}{(1-t)^\alpha}\, dt\right| \leq x^\beta \int_0^1 \frac{|A_\alpha^n f(xt)|}{(1-t)^\alpha}\, dt \leq x^\beta x^{n\beta} \frac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)}\, \|f\| \int_0^1 \frac{t^{n\beta}}{(1-t)^\alpha}\, dt$.

Donc

$$\begin{aligned}\left|A_\alpha^{n+1} f(x)\right| &\leq x^{(n+1)\beta} \frac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} B(n\beta+1, 1-\alpha)\, \|f\| = x^{(n+1)\beta} \frac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} B(n\beta+1, \beta)\, \|f\| \\ &= x^{(n+1)\beta} \frac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} \frac{\Gamma(n\beta+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma((n+1)\beta+1)}\, \|f\| = x^{(n+1)\beta} \frac{\Gamma(\beta)^{n+1}}{\Gamma((n+1)\beta+1)}\, \|f\|\,.\end{aligned}$$

Par récurrence, on a donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [0,1]$, $|A_\alpha^n f(x)| \leq x^{n\beta} \dfrac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)}\, \|f\|$.

IV.B.1.b) On en déduit : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\|A_\alpha^n f\| \leq \dfrac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)}\, \|f\|$. Autrement dit, l'endomorphisme A_α^n de E est continu et

$$|||A_\alpha^n||| \leq \frac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)}.$$

IV.B.2) Soit $\gamma > 0$; alors $\gamma^n \dfrac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} = \dfrac{(\gamma\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} = \dfrac{1}{(\gamma\Gamma(\beta))^{(1/\beta)}} \dfrac{((\gamma\Gamma(\beta))^{(1/\beta)})^{n\beta+1}}{\Gamma(1+n\beta)} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 0$, d'après (I.3).

IV.B.3.a) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|\lambda^n A_\alpha^n f\| \leq |\lambda|^n \dfrac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} \|f\|$.

Or $|\lambda|^n \dfrac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} \|f\| = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n (2\,|\lambda|)^n \dfrac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} \|f\| = o\left(\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right)$; donc la série $\sum |\lambda|^n \dfrac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} \|f\|$ converge et la série $\sum \lambda^n A_\alpha^n f$ converge normalement donc uniformément sur $[0,1]$.

IV.B.3.b) Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $(\mathrm{Id}_E - \lambda A_\alpha) \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \lambda^n A_\alpha^n f = f - \lambda^{N+1} A_\alpha^{N+1} f$.

Or $\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{N} \lambda^n A_\alpha^n f\right)_N$ converge uniformément sur [0,1] vers g ; $\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{N} \lambda^n A_\alpha^n f\right)_N$ est une suite d'éléments de E (*i.e.* de fonctions continues), donc g est continue ($g \in E$) et $\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{N} \lambda^n A_\alpha^n f\right)_N$ converge vers g dans E. Comme $\mathrm{Id}_E - \lambda A_\alpha$ est continu dans E, $\left((\mathrm{Id}_E - \lambda A_\alpha) \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \lambda^n A_\alpha^n f\right)_N$ converge dans E, *i.e.* uniformément sur $[0,1]$ vers $(\mathrm{Id}_E - \lambda A_\alpha)g$.

D'autre part, $\left(\lambda^{N+1} A_\alpha^{N+1} f\right)_N$ converge uniformément vers 0 sur $[0,1]$, *i.e.* converge vers 0 dans E.

Donc $(\mathrm{Id}_E - \lambda A_\alpha)g = f$.

IV.B.3.c) D'après la question précédente, $(\mathrm{Id}_E - \lambda A_\alpha) \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n A_\alpha^n = \mathrm{Id}_E$.

On montre de même : $\forall f \in E$, $\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n A_\alpha^n\right) (\mathrm{Id}_E - \lambda A_\alpha) f = f$, *i.e.* $\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n A_\alpha^n\right) (\mathrm{Id}_E - \lambda A_\alpha) = \mathrm{Id}_E$.

Donc $\mathrm{Id}_E - \lambda A_\alpha$ est inversible dans E, d'inverse $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n A_\alpha^n$.

IV.C.1.a) $A_\alpha e_n(x) = x^\beta \displaystyle\int_0^1 \frac{(xt)^n}{(1-t)^\alpha}\, \mathrm{d}t = x^{\beta+n} B(n+1,\beta) = x^{\beta+n} \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(n+1+\beta)}$; donc $A_\alpha e_n = B(n+1,\beta) e_{n+\beta} = \dfrac{\Gamma(n+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(n+1+\beta)} e_{n+\beta}$ en prolongeant la définition des e_k à $k \in [0,+\infty[$. Le résultat précédent reste vrai pour tout $n \in [0,+\infty[$.

IV.C.1.b)

$$\begin{aligned}
(A_{1-\alpha} \circ A_\alpha) e_n &= \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(n+1+\beta)} A_{1-\alpha}(e_{n+\beta}) = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(n+1+\beta)} . \frac{\Gamma((n+\beta)+1)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma((n+\beta)+1+(1-\beta))} e_{(n+\beta)+1-\beta} \\
&= \Gamma(\beta)\Gamma(1-\beta) \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+2)} e_{n+1} = \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(1-\beta)}{n+1} e_{n+1} = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} \frac{e_{n+1}}{n+1}
\end{aligned}$$

IV.C.2) Vrai par linéarité ...

IV.C.3.a) Pour tout $f \in E$, Pf est bien continu ; de plus, P est linéaire.

Soit $f \in E$; alors $\forall x \in [0,1], |Pf(x)| \leq \displaystyle\int_0^x |f(t)|\ \mathrm{d}t \leq \int_0^x \|f\|\ \mathrm{d}t = \|f\|\, x \leq \|f\|$; donc $\|Pf\| \leq \|f\|$.

Donc P est linéaire continu et $|||P||| \leq 1$.

De plus, si f est l'application constante 1, alors $Pf : x \longmapsto x$; donc $\|Pf\| = \|f\|$. Donc $|||P||| = 1$.

IV.C.3.b) L'ensemble $\mathcal{P}$ des fonctions polynômiales sur $[0,1]$ est dense dans E pour la norme $\|.\|$ (théorème de Weierstrass). Comme B_α et $\dfrac{\pi}{\sin \pi\alpha} P$ sont deux applications continues sur E coïncidant sur $\mathcal{P}$, elles sont égales.

IV.C.3.c) Comme P est à valeurs dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{C})$, $D \circ B_\alpha$ est bien défini. Comme $D \circ P = \mathrm{Id}_E$, on a la formule de l'énoncé.

IV.C.3.d) Soit $f \in E$ tel que $A_\alpha f = 0$; alors $B_\alpha f = 0$, donc $P \circ B_\alpha f = 0$; avec la relation du (IV.C.3.c), $f = 0$.

Donc l'opérateur (linéaire) A_α est injectif.