

CONCOURS AGRO-VETO, SESSION 2011

Corrigé de l'épreuve A

I - Première partie

1.1 Le théorème de factorisation des polynômes donne :

$$ar^2 + br + c = a(r - \omega_1)(r - \omega_2).$$

En développant le second membre, on obtient alors

$$ar^2 + br + c = a(r^2 - (\omega_1 + \omega_2)r + \omega_1\omega_2).$$

On en déduit le résultat par identification des coefficients.

$$\boxed{a(\omega_1 + \omega_2) = -b \quad a\omega_1\omega_2 = c}$$

1.2 Si y est de classe C^2 , alors z est clairement C^1 , en tant que combinaison linéaire de fonctions C^1 . On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} z' - \omega_2 z &= y'' - (\omega_1 + \omega_2)y' + \omega_1\omega_2 y \\ &= \frac{1}{a}(ay'' + by' + cy) \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\boxed{z \text{ est de classe } C^1, \text{ de sorte que } z' - \omega_2 z = 0.}$$

On déduit alors une expression de z du fait que toute solution de l'équation $z' - \omega_2 z = 0$ est de la forme $x \mapsto \lambda e^{\omega_2 x}$, avec λ un réel.

$$\boxed{\text{Il existe un réel } \lambda \text{ tel que } z(x) = \lambda e^{\omega_2 x}.$$

On vient de prouver que y est solution de l'équation différentielle

$$y' - \omega_1 y = \lambda e^{\omega_2 x} \quad (\star)$$

pour un réel λ donné. Or on sait déjà que la solution générale de l'équation homogène associée à (\star) est $x \mapsto \mu e^{\omega_1 x}$, il ne reste donc plus qu'à déterminer une solution particulière de (\star) .

Si $\omega_1 \neq \omega_2$. Puisque ω_2 n'est pas racine de l'équation $r - \omega_1 = 0$, on sait que (\star) admet une solution particulière de la forme $y_0(x) = \alpha e^{\omega_2 x}$. Cela assure que la solution générale de celle-ci est de la forme $x \mapsto \mu e^{\omega_1 x} + \alpha e^{\omega_2 x}$, ce qui donne le résultat.

$$\boxed{\text{Si } \omega_1 \neq \omega_2, y \text{ est de la forme } x \mapsto A e^{\omega_1 x} + B e^{\omega_2 x}, \text{ avec } A, B \text{ des réels.}}$$

Si $\omega_1 = \omega_2$. Puisque ω_2 est racine de l'équation $r - \omega_1 = 0$, on sait que (\star) admet une solution particulière de la forme $y_0(x) = \alpha x e^{\omega_2 x}$. Cela assure que la solution générale de celle-ci est de la forme $x \mapsto \mu e^{\omega_1 x} + \alpha x e^{\omega_1 x}$, d'où le résultat.

$$\boxed{\text{Si } \omega_1 = \omega_2, y \text{ est de la forme } x \mapsto (Ax + B) e^{\omega_1 x}, \text{ avec } A, B \text{ des réels.}}$$

1.3 Soient A, B deux réels, et u la fonction définie par $u(x) = (Ax + B)e^{\omega_1 x}$. Le calcul de ses dérivées donne :

$$\begin{aligned} u'(x) &= Ae^{\omega_1 x} + \omega_1(Ax + B)e^{\omega_1 x} \\ u''(x) &= 2\omega_1 Ae^{\omega_1 x} + \omega_1^2(Ax + B)e^{\omega_1 x} \end{aligned}$$

On en déduit alors, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} au''(x) + bu'(x) + cu(x) &= e^{\omega_1 x} (Ax(a\omega_1^2 + b\omega_1 + c) + B(a\omega_1^2 + b\omega_1 + c) + A(2a\omega_1 + b)) \\ &= e^{\omega_1 x} (AxP(\omega_1) + BP(\omega_1) + AP'(\omega_1)) \end{aligned}$$

où on a posé $P(r) = ar^2 + br + c$. Mais lorsque $\omega_1 = \omega_2$, dire que ω_1 et ω_2 sont les racines de P c'est dire que ω_1 est une racine double de P . Cela donne $P(\omega_1) = P'(\omega_1) = 0$, ce qui donne le résultat recherché.

Pour tous réels A et B , les fonctions $x \mapsto (Ax + B)e^{\omega_1 x}$ sont solutions de (ε'_2) sur \mathbb{R} .

On vient d'établir l'inclusion suivante :

$$\text{Vect}(x \mapsto xe^{\omega_1 x}, x \mapsto e^{\omega_1 x}) \subset S'_2.$$

Réciproquement, il faudrait prouver que tout élément de S'_2 est de la forme $x \mapsto Axe^{\omega_1 x} + Be^{\omega_1 x}$, mais on remarque que cela a été fait à la question précédente. D'où le résultat.

Si $\omega_1 = \omega_2$, $S'_2 = \text{Vect}(x \mapsto xe^{\omega_1 x}, x \mapsto e^{\omega_1 x})$

On déduit du résultat ci-dessus que S'_2 est le sous-espace vectoriel de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ engendré par $f_1 : x \mapsto xe^{\omega_1 x}$ et $f_2 : x \mapsto e^{\omega_1 x}$. Pour démontrer que celui-ci est de dimension 2, il suffit de prouver que la famille (f_1, f_2) est libre. Considérons pour cela deux réels λ_1, λ_2 tels que

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = 0.$$

Pour tout réel x on a alors

$$\lambda_1 x e^{\omega_1 x} + \lambda_2 e^{\omega_1 x} = 0.$$

En multipliant cette égalité par $e^{-\omega_1 x}$ on obtient

$$\lambda_1 x + \lambda_2 = 0,$$

ce qui donne ensuite $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ par identification des coefficients. D'où le résultat.

S'_2 est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 2.

1.4 Soient A, B deux réels, et u la fonction définie par $u(x) = Ae^{\omega_1 x} + Be^{\omega_2 x}$. Le calcul de ses dérivées donne :

$$\begin{aligned} u'(x) &= \omega_1 Ae^{\omega_1 x} + \omega_2 Be^{\omega_2 x} \\ u''(x) &= \omega_1^2 Ae^{\omega_1 x} + \omega_2^2 Be^{\omega_2 x} \end{aligned}$$

On en déduit alors, pour tout réel x :

$$au''(x) + bu'(x) + cu(x) = Ae^{\omega_1 x} (a\omega_1^2 + b\omega_1 + c) + Be^{\omega_2 x} (a\omega_2^2 + b\omega_2 + c) = 0.$$

D'où le résultat recherché.

Pour tous réels A et B , les fonctions $x \mapsto Ae^{\omega_1 x} + Be^{\omega_2 x}$ sont solutions de (ε'_2) sur \mathbb{R} .

On vient d'établir l'inclusion suivante :

$$\text{Vect}(x \mapsto e^{\omega_1 x}, x \mapsto e^{\omega_2 x}) \subset S'_2.$$

Réciproquement, il faudrait prouver que tout élément de S'_2 est de la forme $x \mapsto Ae^{\omega_1 x} + Be^{\omega_2 x}$, mais on remarque que cela a été fait à la question 1.2. D'où le résultat.

Si $\omega_1 \neq \omega_2$, $S'_2 = \text{Vect}(x \mapsto e^{\omega_1 x}, x \mapsto e^{\omega_2 x})$

On déduit du résultat ci-dessus que S'_2 est le sous-espace vectoriel de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ engendré par $x \mapsto e^{\omega_1 x}, x \mapsto e^{\omega_2 x}$. Pour démontrer que celui-ci est de dimension 2, il suffit de prouver que la famille $(x \mapsto e^{\omega_1 x}, x \mapsto e^{\omega_2 x})$ est libre. Considérons pour cela l'application linéaire :

$$\Psi : \begin{array}{ccc} C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \rightarrow & C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f & \mapsto & f' \end{array}$$

Puisque $x \mapsto e^{\omega_1 x}, x \mapsto e^{\omega_2 x}$ sont des vecteurs propres de Ψ associés à deux valeurs propres distinctes (ω_1 et ω_2), on en déduit qu'ils forment une famille libre, ce qui termine la démonstration.

S'_2 est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 2.

Remarque. Pour établir la liberté de la famille $(u : x \mapsto e^{\omega_1 x}, v : x \mapsto e^{\omega_2 x})$, on aurait également pu revenir à la définition d'une famille libre, et ainsi démontrer que pour λ et μ réels on a $\lambda u + \mu v = 0 \Rightarrow \lambda = \mu = 0$. Pour ce faire on peut, par exemple, choisir deux valeurs différentes de x , ou bien dériver la relation considérée et choisir une valeur de x .

1.5 Il suffit d'utiliser la méthode qui vient d'être établie, en remarquant que l'équation caractéristique associée admet 1 et -1 comme racines.

L'ensemble des solutions de $y'' - y = 0$ est $\text{Vect}(x \mapsto e^x, x \mapsto e^{-x})$.

2.1.1 Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que f vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) - f(x) = xe^x.$$

Puisque f et $x \mapsto xe^x$ sont de classe C^∞ sur \mathbb{R} , on obtient en dérivant n fois cette égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n+2)}(x) - f^{(n)}(x) = \frac{d^n(xe^x)}{dx^n}.$$

Pour obtenir le résultat, il suffit donc d'établir $\frac{d^n(xe^x)}{dx^n} = xe^x + ne^x$. On utilise pour cela la formule de Leibniz, qui donne

$$\frac{d^n(xe^x)}{dx^n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{(k)} (e^x)^{(n-k)} = \binom{n}{0} x^{(0)} (e^x)^{(n)} + \binom{n}{1} x^{(1)} (e^x)^{(n-1)} = xe^x + ne^x.$$

D'où le résultat.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f^{(n+2)}(x) - f^{(n)}(x) = xe^x + ne^x}$$

Remarque. On aurait également pu démontrer cette formule par récurrence.

En prenant $x = 0$, on obtient alors l'égalité suivante.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_{n+2} - \alpha_n = n}$$

Montrons le résultat suivant par récurrence, comme indiqué.

Initialisation. En $p = 0$, la propriété considérée s'écrit

$$\begin{cases} \alpha_0 = \alpha_0 \\ \alpha_1 = \alpha_1 \end{cases}$$

ce qui est trivialement vrai.

Héritage. Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que la propriété est vraie au rang p . En utilisant la propriété établie ci-avant ainsi que l'hypothèse de récurrence, on obtient :

$$\alpha_{2p+2} = \alpha_{2p} + 2p = \alpha_0 + p(p-1) + 2p = \alpha_0 + p(p+1)$$

et

$$\alpha_{2p+1} = \alpha_{2p-1} + 2p - 1 = \alpha_1 + (p-1)^2 + 2p - 1 = \alpha_1 + p^2.$$

D'où la propriété au rang $p+1$, et par suite le résultat.

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, \begin{cases} \alpha_{2p} = \alpha_0 + p(p-1) \\ \alpha_{2p+1} = \alpha_1 + p^2 \end{cases}}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque f est de classe C^∞ , elle admet un développement limité à tout ordre en 0, ce qui donne

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{2n+1} \alpha_k \frac{x^k}{k!} + o(x^{2n+1}) \\ &= \sum_{k=0}^n \alpha_{2k} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^n \alpha_{2k+1} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}) \\ &= \sum_{k=0}^n (\alpha_0 + k(k-1)) \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^n (\alpha_1 + k^2) \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}) \end{aligned}$$

D'où le résultat.

$$\boxed{\text{Au voisinage de 0, on a } f(x) = \sum_{k=0}^n (\alpha_0 + k(k-1)) \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^n (\alpha_1 + k^2) \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1})}$$

2.1.2 Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\frac{1}{(2p-2)!} - \frac{1}{(2p-1)!} = \frac{2p-2}{(2p-1)!} = \frac{4p(p-1)}{(2p)!}$$

et

$$\frac{1}{(2p-1)!} - \frac{1}{(2p)!} = \frac{2p-1}{(2p)!} = \frac{4p^2-1}{(2p+1)!}.$$

D'où le résultat.

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ on a $\frac{4p(p-1)}{(2p)!} = \frac{1}{(2p-2)!} - \frac{1}{(2p-1)!}$ et $\frac{4p^2-1}{(2p+1)!} = \frac{1}{(2p-1)!} - \frac{1}{(2p)!}$.

En choisissant $\alpha_0 = 0, \alpha_1 = -\frac{1}{4}$, on peut alors écrire :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{4} \left(\sum_{k=0}^n \frac{4k(k-1)}{(2k)!} x^{2k} + \sum_{k=0}^n \frac{4k^2-1}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right) + o(x^{2n+1}) \\ &= \frac{1}{4} \left(\sum_{k=1}^n \frac{4k(k-1)}{(2k)!} x^{2k} + 0 + \sum_{k=1}^n \frac{4k^2-1}{(2k+1)!} x^{2k+1} - x \right) + o(x^{2n+1}) \\ &= \frac{1}{4} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-2)!} x^{2k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)!} x^{2k} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)!} x^{2k+1} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k)!} x^{2k+1} - x \right) + o(x^{2n+1}) \\ &= \frac{1}{4} \left(\sum_{\substack{k=2 \\ k \text{ pair}}}^{2n+1} \frac{1}{(k-2)!} x^k - \sum_{\substack{k=2 \\ k \text{ pair}}}^{2n+1} \frac{1}{(k-1)!} x^k + \sum_{\substack{k=2 \\ k \text{ impair}}}^{2n+1} \frac{1}{(k-2)!} x^k - \sum_{\substack{k=2 \\ k \text{ impair}}}^{2n+1} \frac{1}{(k-1)!} x^k - x \right) + o(x^{2n+1}) \\ &= \frac{1}{4} \left(\sum_{k=2}^{2n+1} \frac{1}{(k-2)!} x^k - \sum_{k=2}^{2n+1} \frac{1}{(k-1)!} x^k - x \right) + o(x^{2n+1}) \\ &= \frac{1}{4} \left(\sum_{i=0}^{2n-1} \frac{1}{i!} x^{i+2} - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{(k-1)!} x^k \right) + o(x^{2n+1}) \\ &= \frac{1}{4} \left(\sum_{i=0}^{2n-1} \frac{1}{i!} x^{i+2} - \sum_{i=0}^{2n} \frac{1}{i!} x^{i+1} \right) + o(x^{2n+1}) \end{aligned}$$

D'où le résultat.

Au voisinage de 0, on a $f(x) = \frac{1}{4} \left(\sum_{i=0}^{2n-1} \frac{1}{i!} x^{i+2} - \sum_{i=0}^{2n} \frac{1}{i!} x^{i+1} \right) + o(x^{2n+1})$

2.1.3 De la question précédente on déduit, pour tout entier n :

$$f(x) = \frac{1}{4} \left(x^2 \sum_{i=0}^{2n-1} \frac{1}{i!} x^i - x \sum_{i=0}^{2n} \frac{1}{i!} x^i \right) + o(x^{2n+1}).$$

On voit alors que f possède au voisinage de 0 et à l'ordre $2n+1$, le même développement limité que la fonction $u : x \mapsto \frac{1}{4}(x^2 e^x - x e^x)$. En effet, pour obtenir un développement limité de u à l'ordre $2n+1$, il suffit d'utiliser le développement à l'ordre $2n-1$ de l'exponentielle pour la première occurrence de e^x , et le développement à l'ordre $2n$ de l'exponentielle pour la seconde occurrence.

f possède en 0 le même développement limité que $x \mapsto \frac{1}{4}(x^2 - x)e^x$, à tout ordre impair.
--

2.1.4 Soit $u(x) = \frac{1}{4}(x^2 - x)e^x$. Le calcul de ses dérivées donne :

$$u'(x) = \frac{1}{4}(x^2 + x - 1)e^x$$

et

$$u''(x) = \frac{1}{4}(x^2 + 3x)e^x.$$

Il est alors évident que u vérifie $u''(x) - u(x) = xe^x$ pour tout réel x .

$$x \mapsto \frac{1}{4}(x^2 - x)e^x \text{ est solution de } (\varepsilon_2).$$

2.2 À la question 1.5, nous avons donné la solution générale de l'équation homogène associée à (ε_2) . Il suffit alors de lui ajouter la solution particulière obtenue ci-dessus pour conclure.

$$\text{Les solutions de } (\varepsilon_2) \text{ sont les fonctions de la forme } x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{-x} + \frac{1}{4}(x^2 - x)e^x \text{ avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

3.1 Si z est une solution de Δ_2 , elle est forcément de classe C^2 . On en déduit alors que $y : x \mapsto z(e^x)$ est également de classe C^2 , par composition. D'où le résultat.

$$\begin{aligned} y : x \mapsto z(e^x) \text{ est de classe } C^2 \text{ sur } \mathbb{R}, \text{ de sorte que :} \\ y'(x) = e^x z'(e^x) \\ y''(x) = e^x z'(e^x) + e^{2x} z''(e^x) \end{aligned}$$

Mais puisque z vérifie (Δ_2) , on a pour tout réel t :

$$t^2 z''(t) + t z'(t) - z(t) = t \ln(t).$$

D'où, en prenant $t = e^x$:

$$e^{2x} z''(e^x) + e^x z'(e^x) - z(e^x) = xe^x;$$

on voit ainsi que l'on a

$$y''(x) - y(x) = xe^x$$

pour tout réel x .

$$y \text{ est solution de } (\varepsilon_2).$$

On déduit alors de la question 2.2 une expression de y .

$$\text{Il existe des réels } \lambda \text{ et } \mu \text{ tels que } y(x) = \lambda e^x + \mu e^{-x} + \frac{1}{4}(x^2 - x)e^x.$$

Pour tout réel x on a donc :

$$z(e^x) = \lambda e^x + \mu e^{-x} + \frac{1}{4}(x^2 - x)e^x.$$

En posant $x = \ln t$, on obtient alors directement une expression de $z(t)$ en fonction de t .

$$z(t) = \lambda t + \frac{\mu}{t} + \frac{1}{4}((\ln t)^2 - \ln t) t$$

3.2 On vient de démontrer que si z est une solution de (Δ_2) , alors celle-ci est de la forme $t \mapsto \lambda t + \frac{\mu}{t} + \frac{1}{4} ((\ln t)^2 - \ln t) t$. Réciproquement, il reste à vérifier si toute fonction de cette forme est bien une solution de l'équation différentielle. Considérons donc une telle fonction. On a alors

$$z'(t) = \lambda - \frac{1}{4} - \frac{\mu}{t^2} + \frac{1}{4} ((\ln t)^2 - \ln t)$$

et

$$z''(t) = \frac{1}{4t} + \frac{2\mu}{t^3} + \frac{\ln t}{2t},$$

ce qui permet de vérifier aisément que l'on a $t^2 z'' + tz' - z = t \ln t$. D'où le résultat.

La solution générale de (Δ_2) est $t \mapsto \lambda t + \frac{\mu}{t} + \frac{1}{4} ((\ln t)^2 - \ln t) t$, avec λ, μ des réels.

II - Deuxième partie

1. On a

$$Y' = AY \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y^{(3)}(x) \\ y''(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y''(x) + y'(x) - 2y(x) \\ y''(x) \\ y'(x) \end{pmatrix}$$

On voit alors que cette égalité est vraie, puisque y est solution de (ε'_3) .

$$Y' = AY$$

2.1 Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et I la matrice identité de taille 3. On a

$$\begin{aligned} (A - \lambda I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \begin{cases} (2 - \lambda)x + y - 2z = 0 \\ x - \lambda y = 0 \\ y - \lambda z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (2 - \lambda)x + y - 2z = 0 \\ x - \lambda y = 0 \\ -\lambda(2 - \lambda)x + (2 - \lambda)y = 0 & L_3 \leftarrow 2L_3 - \lambda L_1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (2 - \lambda)x + y - 2z = 0 \\ x - \lambda y = 0 \\ (2 - \lambda)(1 - \lambda^2)y = 0 & L_3 \leftarrow L_3 + \lambda(2 - \lambda)L_2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{-2}z + (2 - \lambda)x + y = 0 \\ \boxed{1}x - \lambda y = 0 \\ \boxed{(2 - \lambda)(1 - \lambda)(1 + \lambda)}y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ce dernier système étant échelonné, on voit que le système considéré est de rang 3 si et seulement si $(2 - \lambda)(1 - \lambda)(1 + \lambda) \neq 0$, ce qui assure que les valeurs propres de A sont $-1, 1$ et 2 .

Les valeurs propres de A sont $-1, 1$ et 2 .

On voit ainsi que la matrice (d'ordre 3) A admet trois valeurs propres distinctes, ce qui assure qu'elle est diagonalisable.

A est diagonalisable.

2.2 En $\lambda = 1$, le système précédent équivaut à

$$\begin{cases} -2z + x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

soit encore à

$$\begin{cases} z = x \\ x = y \end{cases}$$

On voit alors que le sous-espace propre associé à 1 est la droite vectorielle engendrée par $(1, 1, 1)$.

Le sous-espace propre associé à 1 est la droite vectorielle engendrée par $u = (1, 1, 1)$.

En $\lambda = -1$, le système précédent équivaut à

$$\begin{cases} -2z + 3x + y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

soit encore à

$$\begin{cases} z = x \\ y = -x \end{cases}$$

On voit alors que le sous-espace propre associé à -1 est la droite vectorielle engendrée par $v = (1, -1, 1)$.

Le sous-espace propre associé à -1 est la droite vectorielle engendrée par $v = (1, -1, 1)$.

En $\lambda = 2$, le système précédent équivaut à

$$\begin{cases} -2z + y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

soit encore à

$$\begin{cases} z = \frac{1}{2}y \\ x = 2y \end{cases}$$

On voit alors que le sous-espace propre associé à 2 est la droite vectorielle engendrée par $(4, 2, 1)$.

Le sous-espace propre associé à 2 est la droite vectorielle engendrée par $w = (4, 2, 1)$.

La famille (u, v, w) étant formée de vecteurs propres de A associés aux valeurs propres 1, -1 , 2, on en déduit qu'il s'agit d'une base de \mathbb{R}^3 (puisque ces valeurs propres sont deux à deux distinctes) dans laquelle la matrice de A est

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si P désigne alors la matrice de passage de la base canonique à (u, v, w) , soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

on a alors :

$$A = PDP^{-1}.$$

D'où le résultat.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ convient.}$$

2.3 On sait déjà que P est inversible, en tant que matrice d'une base dans la base canonique. Quels que soient les réels x, y, z, a, b, c on a :

$$\begin{aligned} P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 4z = a \\ x - y + 2z = b \\ x + y + z = c \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 4z = a \\ 2x + 6z = a + b & L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ 3z = a - c & L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{6}a - \frac{1}{2}b + \frac{1}{3}c \\ x = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + c \\ z = \frac{1}{3}a - \frac{1}{3}c \end{cases} \end{aligned}$$

On en déduit $P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

$$P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

3. On a

$$Y' = AY = PDP^{-1}Y.$$

On obtient alors directement le résultat en multipliant cette égalité par P^{-1} à gauche.

$$P^{-1}Y' = DP^{-1}Y$$

4.1 Remarque. La fonction z qui est introduite ici vous semblera certainement « sortie de nulle part, » son introduction est pourtant motivée par les questions précédentes. De la relation $P^{-1}Y' = DP^{-1}Y$ on peut en effet déduire l'égalité $Z' = DZ$ en posant $Z = P^{-1}Y$ (si vous êtes prêts à admettre que l'on peut dériver des vecteurs de fonctions comme on dérive des fonctions...). Si l'on appelle ensuite z la première coordonnée de $Z = P^{-1}Y$, on obtient $z = -\frac{1}{2}y'' + \frac{1}{2}y' + y$ après calcul du produit $P^{-1}Y'$, et le calcul du produit dans l'égalité $Z' = DZ$ montre que z vérifie l'équation différentielle $z' = z$.

y étant une solution de (ε'_3) , on en déduit qu'elle est de classe C^1 . Il vient alors que z est de classe C^3 en tant que combinaison linéaire de fonctions de classe C^1 . On peut alors écrire :

$$z' = -\frac{1}{2}y^{(3)} + \frac{1}{2}y'' + y' = -\frac{1}{2}(2y'' + y' - 2y) + \frac{1}{2}y'' + y' = -\frac{1}{2}y'' + \frac{1}{2}y' + y = z.$$

z est de classe C^1 sur \mathbb{R} de sorte que $z' = z$.

On en déduit qu'il existe un réel λ tel que $z(x) = \lambda e^x$, pour tout réel x .

Il existe un réel λ tel que $z(x) = \lambda e^x$, pour tout réel x .

On vient de prouver que y vérifie l'équation différentielle $-\frac{1}{2}y'' + \frac{1}{2}y' + y = \lambda e^x$, soit encore

$$(\dagger) \quad -y'' + y' + 2y = 2\lambda e^x.$$

L'équation caractéristique associée à (\dagger) est $-r^2 + r + 2 = 0$, qui admet pour racines -1 et 2 (après calcul du discriminant). On en déduit que la solution générale de l'équation homogène associée à (\dagger) est

$$x \mapsto Ae^{-x} + Be^{2x}.$$

Considérant enfin que 1 n'est pas racine de l'équation caractéristique, on en déduit que (\dagger) admet une solution particulière définie par $y_0(x) = \alpha e^x$. Pour déterminer la valeur de α , il suffit de remarquer que l'on a

$$-y_0''(x) + y_0'(x) + 2y_0(x) = 2\alpha e^x,$$

ce qui donne $\alpha = \lambda$ après calcul des dérivées de y_0 . Au final, on voit que y est de la forme $y(x) = Ae^{-x} + Be^{2x} + \lambda e^x$.

Il existe trois réels A, B, λ tels que $y(x) = Ae^{-x} + Be^{2x} + \lambda e^x$.

4.2 On vient de prouver que toute solution de (ε'_3) est de la forme $y(x) = Ae^{-x} + Be^{2x} + \lambda e^x$, ce qui prouve :

$$S'_3 \subset Vect(x \mapsto e^{-x}, x \mapsto e^{2x}, x \mapsto e^x).$$

Réciproquement, il reste à vérifier si toute fonction de la forme $y(x) = Ae^{-x} + Be^{2x} + \lambda e^x$ est bien une solution de (ε'_3) , ce qui se fait trivialement :

$$\begin{aligned} y^{(3)}(x) - 2y''(x) - y'(x) + 2y(x) &= (-Ae^{-x} + 8Be^{2x} + \lambda e^x) \\ &\quad - 2(Ae^{-x} + 4Be^{2x} + \lambda e^x) \\ &\quad - (-Ae^{-x} + 2Be^{2x} + \lambda e^x) \\ &\quad + 2(Ae^{-x} + Be^{2x} + \lambda e^x) \\ &= 0. \end{aligned}$$

D'où le résultat.

$S'_3 = Vect(x \mapsto e^{-x}, x \mapsto e^{2x}, x \mapsto e^x)$

5. On déduit du résultat ci-dessus que S'_3 est le sous-espace vectoriel de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ engendré par $x \mapsto e^{-x}, x \mapsto e^{2x}, x \mapsto e^x$. Pour démontrer que celui-ci est de dimension 3, il suffit de prouver que la famille $(x \mapsto e^{-x}, x \mapsto e^{2x}, x \mapsto e^x)$ est libre. Pour cela, on peut raisonner comme à la question 1.4 de la partie I, en remarquant que $x \mapsto e^{-x}, x \mapsto e^{2x}, x \mapsto e^x$ sont des vecteurs propres associées à des valeurs propres deux à deux distinctes (en l'occurrence $-1, 2$ et 1) de l'application linéaire $\Psi : f \mapsto f'$. Ce qui termine la démonstration.

S'_3 est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 3.

Remarque. Pour établir la liberté de la famille considérée, on aurait pu cette fois encore revenir à la définition d'une famille libre.

III - Troisième partie

1.1 On peut écrire :

$$\begin{aligned} F_n &= \{x \mapsto Q(x)e^{\lambda x}, Q \in \mathbb{R}_n[X]\} \\ &= \left\{ x \mapsto \sum_{i=0}^n \alpha_i x^i e^{\lambda x}, (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n \right\} \\ &= \left\{ \sum_{i=0}^n \alpha_i g_i, (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n \right\} \\ &= Vect(g_i, 0 \leq i \leq n) \end{aligned}$$

D'où le résultat.

$$\boxed{F_n = Vect(g_i, 0 \leq i \leq n)}$$

Montrons enfin que la famille (g_0, \dots, g_n) est libre, ce qui prouvera $\dim(F_n) = n + 1$. Considérons pour cela des réels $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ tels que

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i g_i = 0.$$

Cela équivaut à

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{i=0}^n \alpha_i x^i e^{\lambda x} = 0,$$

soit encore à

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{i=0}^n \alpha_i x^i = 0.$$

Par identification des coefficients, on en déduit $\alpha_0 = \dots = \alpha_n = 0$, ce qui termine la démonstration.

$$\boxed{\dim(F_n) = n + 1}$$

2.1 Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On a

$$(D - \lambda Id)(g_i) = D(g_i) - \lambda Id(g_i) = g'_i - \lambda g_i.$$

Si $i > 0$, on a $g'_i(x) = ix^{i-1}e^{\lambda x} + \lambda x^i e^{\lambda x} = ig_{i-1}(x) + \lambda g_i(x)$, ce qui donne

$$\forall i > 0, (D - \lambda Id)(g_i) = ig_{i-1}.$$

Par contre, si $i = 0$, on a $g'_0(x) = \lambda e^{\lambda x} = \lambda g_0(x)$, ce qui donne $(D - \lambda Id)(g_0) = 0$. D'où le résultat.

$$\boxed{\forall (i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2, (D - \lambda Id)(g_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i = 0 \\ ig_{i-1} & \text{sinon} \end{cases}}$$

Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Montrons par récurrence sur j le résultat suivant :

$$\forall j \in \mathbb{N}, (D - \lambda Id)^j (g_i) = \begin{cases} \frac{i!}{(i-j)!} g_{i-j} & \text{si } 0 \leq j \leq i \\ 0 & \text{si } i < j \end{cases}$$

Initialisation. En $j = 0$, la propriété s'écrit $g_i = g_i$, ce qui est trivialement vrai.

Héritage. Soit $j \in \mathbb{N}$ tel que la propriété soit vraie au rang j . Démontrons que celle-ci est encore vérifiée au rang $j + 1$.

•Premier cas : si $j < i$. On peut écrire dans ce cas :

$$\begin{aligned} (D - \lambda Id)^{j+1} (g_i) &= (D - \lambda Id) \left((D - \lambda Id)^j (g_i) \right) \\ &= (D - \lambda Id) \left(\frac{i!}{(i-j)!} g_{i-j} \right) \\ &= \frac{i!}{(i-j)!} (D - \lambda Id) (g_{i-j}) \\ &= \frac{i!}{(i-j)!} (i-j) g_{i-j-1} \\ &= \frac{i!}{(i-(j+1))!} g_{i-(j+1)}. \end{aligned}$$

Ce qui prouve la propriété au rang $j + 1$.

•Deuxième cas : si $j = i$. On peut écrire dans ce cas :

$$\begin{aligned} (D - \lambda Id)^{i+1} (g_i) &= (D - \lambda Id) \left((D - \lambda Id)^i (g_i) \right) \\ &= (D - \lambda Id) (i! g_0) \\ &= i! (D - \lambda Id) (g_0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ce qui prouve la propriété au rang $j + 1$.

•Troisième cas : si $j > i$. On peut écrire dans ce cas :

$$\begin{aligned} (D - \lambda Id)^{j+1} (g_i) &= (D - \lambda Id) \left((D - \lambda Id)^j (g_i) \right) \\ &= (D - \lambda Id) (0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ce qui prouve la propriété au rang $j + 1$ et termine la démonstration.

$$\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, (D - \lambda Id)^j (g_i) = \begin{cases} \frac{i!}{(i-j)!} g_{i-j}, & 0 \leq j \leq i \\ 0, & i < j \leq n \end{cases}$$

2.2 On obtient directement le résultat en appliquant la formule de Taylor en λ au polynôme \prod , qui est de degré inférieur ou égal à n .

$$\forall x \in \mathbb{R}, \prod(x) = \sum_{j=0}^n \frac{\prod^{(j)}(\lambda)}{j!} (x - \lambda)^j$$

2.3 En utilisant le résultat précédent et la question 2.1 on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\Phi(g_i) &= \sum_{j=0}^n \frac{\Pi^{(j)}(\lambda)}{j!} \left[(D - \lambda Id)^j (g_i) \right] \\
&= \sum_{j=0}^i \frac{\Pi^{(j)}(\lambda)}{j!} \times \frac{i!}{(i-j)!} g_{i-j} + 0 \\
&= \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \Pi^{(j)}(\lambda) g_{i-j}.
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

$$\boxed{\Phi(g_i) = \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \Pi^{(j)}(\lambda) g_{i-j}}$$

2.4 On observe que pour toute fonction $f \in F_n$ on a

$$\Phi(f) = \sum_{i=0}^n a_i f^{(i)} = \sum_{i=0}^n a_i D^i(f),$$

ce qui prouve que l'on a $\Phi = \sum_{i=0}^n a_i D^i$. On commence alors par remarquer que chacun des D^i est un endomorphisme de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et donc que $\Phi \in \mathcal{L}(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$ en tant que combinaison linéaire des D^i . On observe alors qu'à la question précédente on a établi $\Phi(g_i) \in F_n$ pour tout entier i compris entre 0 et n , ce qui établit $\Phi(F_n) \subset F_n$, et démontre ainsi que Φ est un endomorphisme de F_n .

$$\boxed{\Phi \in \mathcal{L}(F_n)}$$

On obtient alors directement la matrice M de Φ dans la base \mathcal{G} en utilisant la question 2.3 puisque la formule $\Phi(g_i) = \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \Pi^{(j)}(\lambda) g_{i-j}$ décompose dans \mathcal{G} l'image par Φ des vecteurs de \mathcal{G} .

$$M = \begin{pmatrix}
\Pi(\lambda) & \binom{1}{1} \Pi'(\lambda) & \cdots & \binom{i}{i} \Pi^{(i)}(\lambda) & \cdots & \binom{n}{n} \Pi^{(n)}(\lambda) \\
0 & \Pi(\lambda) & & \vdots & & \vdots \\
\vdots & & \ddots & \binom{i}{1} \Pi'(\lambda) & & \vdots \\
0 & & & \Pi(\lambda) & & \binom{n}{1} \Pi'(\lambda) \\
0 & \cdots & & & \ddots & 0 \\
& & & & & \Pi(\lambda)
\end{pmatrix}$$

2.5 Il apparaît que M est une matrice triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux sont tous non nuls, ce qui assure qu'elle est inversible. On en déduit alors que Φ est une bijection.

Φ est une bijection

3. Il est clair que y est une solution de (ε_k) si et seulement si $\Phi(y) = g_k$. Mais comme Φ est un isomorphisme de F_n et puisque $g_k \in F_n$, on en déduit que l'équation $\Phi(y) = g_k$ admet une unique solution dans F_n . D'où le résultat.

Il existe une unique fonction f_k appartenant à F_n solution de (ε_k) sur \mathbb{R} .

4.1 En appliquant la formule de Taylor à Π on obtient :

$$\Pi = \sum_{i=0}^n \frac{\Pi^{(i)}(0)}{i!} X^i.$$

Il suffit alors d'identifier les coefficients des deux expressions de Π pour obtenir le résultat.

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \Pi^{(i)}(0) = 1$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \binom{1}{1} & \cdots & \binom{i}{i} & \cdots & \binom{n}{n} \\ 0 & 1 & & \binom{i}{1} & & \vdots \\ & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & 1 & & \binom{n}{1} \\ 0 & & \cdots & & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

4.2 Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. En lui appliquant la formule de Taylor en $t \in \mathbb{R}$ on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(t)}{k!} (x - t)^k.$$

Il suffit alors de prendre $x = t + 1$ pour obtenir le résultat.

$$\forall t \in \mathbb{R}, \frac{P(t)}{0!} + \frac{P'(t)}{1!} + \frac{P''(t)}{2!} + \cdots + \frac{P^{(n)}(t)}{n!} = P(t + 1)$$

Prenons $P(t) = (t - 1)^k$. La formule ci-dessus s'écrit alors :

$$\sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(t)}{k!} = t^k,$$

soit encore

$$\Phi(P) = g_k.$$

On en déduit $P = \Phi^{-1}(g_k)$, ce qui équivaut à dire que P est une solution de (ε_k) .

$$\boxed{t \mapsto (t-1)^k \text{ est une solution de } (\varepsilon_k).$$

$$\boxed{\Phi^{-1}(g_k) = t \mapsto (t-1)^k}$$

On déduit directement du résultat ci-dessus que, pour tout réel x on a :

$$\Phi^{-1}(g_k)(x) = (x-1)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^i x^{k-i} = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^i g_{k-i}(x).$$

$$\boxed{\Phi^{-1}(g_k) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^i g_{k-i}}$$

4.3 L'expression de M^{-1} se déduit directement des égalités obtenues ci-dessus.

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & (-1)^1 \binom{1}{1} & \cdots & (-1)^i \binom{i}{i} & \cdots & (-1)^n \binom{n}{n} \\ & & & \vdots & & \\ 0 & 1 & & (-1) \binom{i}{1} & & \vdots \\ & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & 1 & & \\ & & & & & (-1) \binom{n}{1} \\ & & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 & \end{pmatrix}$$

4.4 Soient i, j deux entiers tels que $i < j$. Choisissons alors pour n un entier strictement supérieur à j . Après une observation attentive des expressions de M et de M^{-1} données précédemment, on voit que le terme général $m_{p,q}$ de M vérifie :

$$m_{p,q} = \begin{cases} \binom{q-1}{q-p} & \text{si } p \leq q \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et le terme général $n_{p,q}$ de M^{-1} vérifie :

$$n_{p,q} = \begin{cases} (-1)^{q-p} \binom{q-1}{q-p} & \text{si } p \leq q \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Et comme MM^{-1} est égal à la matrice identité de taille $n + 1$, on en déduit que si $i < j$, le terme d'indices i, j de cette matrice est nul. On a donc :

$$\sum_{k=1}^{n+1} m_{i,k} n_{k,j} = 0,$$

soit

$$\sum_{k=i}^j \binom{k-1}{k-i} (-1)^{j-k} \binom{j-1}{j-k} = 0,$$

ce qui équivaut à

$$\sum_{k=i}^j \binom{k-1}{i-1} (-1)^{j-k} \binom{j-1}{k-1} = 0.$$

Si l'on change alors j en $j + 1$ et i en $i + 1$ (ce qui est possible car cette égalité est valable quels que soient les entiers i et j avec $i < j$) on obtient :

$$\sum_{k=i+1}^{j+1} \binom{k-1}{i} (-1)^{j+1-k} \binom{j}{k-1} = 0.$$

Il ne reste alors plus qu'à effectuer le changement d'indice $u = k - 1$ pour obtenir le résultat.

$$\boxed{\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, i < j \Rightarrow \sum_{k=i}^j (-1)^{j-k} \binom{k}{i} \binom{j}{k} = 0}$$